RIDEMA
Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática

Princípios da Contagem na perspectiva da Resolução de Problemas com futuros professores de Matemática

Counting Principles through Problem Solving with Prospective Mathematics Teachers

Tallys Yuri de Almeida Kanno[1]
Universidade Estadual de Londrina

Edilaine Regina dos Santos[2]
Universidade Estadual de Londrina

Bruno Rodrigo Teixeira[3]
Universidade Estadual de Londrina

RESUMO

No presente artigo tem-se por objetivo apresentar o relato de uma experiência envolvendo os Princípios Aditivo e Multiplicativo da Contagem, na perspectiva da Resolução de Problemas, com licenciandos em Matemática. A Resolução de Problemas, na perspectiva em que os problemas são considerados como pontos de partida para o ensino e a aprendizagem de Matemática, foi adotada em uma ação formativa, desenvolvida pelo primeiro autor, sob a orientação da segunda autora e supervisão de terceiro autor, para a abordagem dos referidos conteúdos em uma disciplina de Prática e Metodologia de Ensino de Matemática: Estágio Supervisionado de um curso de Licenciatura em Matemática, de uma universidade pública estadual paranaense. Os futuros professores puderam vivenciar uma abordagem do conteúdo matemático que vai ao encontro tanto de recomendações de documentos curriculares oficiais relativas ao trabalho com esse conteúdo que se espera que desenvolvam com seus alunos, quanto de diretrizes curriculares nacionais para a formação inicial de professores no aspecto metodológico de seu futuro trabalho em sala de aula.
Palavras-chave: Educação Matemática; Resolução de Problemas; Formação Inicial de Professores de Matemática; Princípio Aditivo da Contagem; Princípio Multiplicativo da Contagem.

[1] Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Doutorando do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da UEL, Londrina, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Rio de Janeiro, 1422, 307, centro, Londrina, Paraná, Brasil, CEP: 86010-150. ORCID iD: https://orcid.org/0009-0003-3851-1025. Lattes: https://lattes.cnpq.br/6774328961773017. E-mail: tkzin@outlook.com.

[2] Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da UEL, Londrina, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Rodovia Celso Garcia Cid, PR 445, km 380, Jardim Portal de Versalhes 1, Londrina, Paraná, Brasil, Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Campus Universitário, CEP: 86057-970 – Caixa Postal 10.011. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-2086-4044. Lattes: http://lattes.cnpq.br/7796006562239758. E-mail: edilaine.santos@uel.br.

[3] Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da UEL, Londrina, Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Rodovia Celso Garcia Cid, PR 445, km 380, Jardim Portal de Versalhes 1, Londrina, Paraná, Brasil, Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Campus Universitário, CEP: 86057-970 – Caixa Postal 10.011. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0294-4470. Lattes: http://lattes.cnpq.br/8152553722779306. E-mail: bruno@uel.br.

ABSTRACT

The objective of this paper is to present the report of an experience involving the Addition and Multiplication Principles of Counting, through Problem Solving, with Mathematics undergraduate students. Problem Solving, from the perspective in which problems are considered as starting points for teaching and learning Mathematics, was adopted in a training action, developed by the first author, under the guidance of the second author and supervision of the third author, to develop the aforementioned contents in a Mathematics Teaching Practice subject from a Mathematics Teaching degree program of a public university in the state of Paraná. The prospective teachers were able to experience an approach to mathematical content that converges both the recommendations of official curricular documents regarding the work with this content that they are expected to develop with their students, as well as national curricular guidelines for the preservice teacher education in the methodological aspect of their future practice in the classroom.
Keywords: Mathematics Education; Problem Solving; Preservice Mathematics Teacher Education; Addition Principle of Counting; Multiplication Principle of Counting.

INTRODUÇÃO

De acordo com as atuais Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores (Resolução CNE/CP nº 4, de 29 de maio de 2024), o exercício da docência, enquanto ação educativa, é compreendido "a partir da condução de processos pedagógicos intencionais e metódicos, os quais baseiam-se em conhecimentos e conceitos próprios da docência e das especificidades das diferentes áreas do conhecimento, incluindo o domínio e manejo de conteúdos e metodologias [...]". Nessa direção:

> É importante considerar que, na formação inicial, ao conhecer as atuais tendências educacionais, o futuro professor de Matemática perceba a Resolução de Problemas como uma Metodologia [...], como um caminho através do qual seus futuros alunos possam apoderar-se do conhecimento matemático e, além disso, superar obstáculos epistemológicos e abrir espaço para a construção do conhecimento. (Azevedo; Onuchic, 2017, p. 409).

Estudos (Moço, 2013; Bicalho; Allevato; Silva, 2020; Mendes; Proença, 2020) têm defendido o trabalho com a Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática como fundamental para a sua incorporação na prática docente desses futuros professores. Além disso, a opção pela sua utilização na formação inicial de professores de Matemática, pode se justificar, entre outros aspectos, "porque ela se apresenta como um caminho para se trabalhar com compreensão e significado de forma dialógica propiciando os alunos a construir novos conceitos, justificando o que se aprende e o que se ensina" (Azevedo; Onuchic, 2017, p. 420).

Considerando tais aspectos, a Resolução de Problemas (em que os problemas são o ponto de partida para o ensino e a aprendizagem de Matemática) foi adotada em uma ação formativa, desenvolvida pelo primeiro autor, sob a orientação da segunda autora e supervisão de terceiro autor, para a abordagem do conteúdo Análise Combinatória, em uma disciplina de *Prática e Metodologia de Ensino de Matemática: Estágio Supervisionado* de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública estadual paranaense.

Diante disso, no presente artigo tem-se por objetivo apresentar o relato da experiência do trabalho com os Princípios Aditivo e Multiplicativo da Contagem na perspectiva da Resolução de Problemas com licenciandos em Matemática.

Para isso, inicialmente são tecidas algumas considerações a respeito da Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática. Em seguida, o relato da experiência, e por fim, são apresentadas algumas considerações.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA FORMAÇÃO DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA: BREVES CONSIDERAÇÕES

Segundo Mendes, Proença e Pereira (2020, p. 835), a Resolução de Problemas "em que o problema é o ponto de partida, vem apresentando possibilidades interessantes e resultados significativos" no contexto da formação inicial de professores de Matemática. Além disso, esses autores destacam "como sendo recente esta relação entre resolução de problemas e formação inicial de professores de Matemática no cenário nacional." (p. 829)

Indo ao encontro dessas considerações, podem ser citados como exemplos os estudos desenvolvidos por Onuchic e Morais (2013), Nunes (2014), Proença (2016), Bonato (2020), Rodrigues (2020) e Bicalho, Allevato e Silva (2020). Tais estudos, assim como o de Mendes, Proença e Pereira (2020), apresentam potencialidades da Resolução de Problemas no âmbito da formação inicial de professores de Matemática, das quais apresentamos algumas no quadro a seguir.

Quadro 1– Potencialidades da Resolução de Problemas para a formação inicial de professores de Matemática

Trabalho	Potencialidade(s)
Onuchic e Morais (2013)	"A metodologia adotada possibilitou ao futuro professor **estabelecer a relação entre conceitos matemáticos abordados nos diferentes níveis de ensino, da Educação Básica ao Ensino Superior**. [...] Um aspecto positivo que pôde ser observado foi o de **alunos engajados em um forte processo de formação** [...]." (p. 690, grifo nosso)
Nunes (2014)	"Houve uma conscientização, tanto da professora-pesquisadora quanto dos envolvidos na pesquisa, de que um trabalho feito no contexto da resolução de problemas na formação inicial de futuros professores de Matemática,

	sobretudo na disciplina Didática da Matemática pode se constituir como um **espaço de reflexão, de investigação, de aprendizagem e de desenvolvimento profissional**.” (p. 15, grifo nosso)
Proença (2016)	“Consideramos que os futuros professores puderam compreender que no ensino via resolução de problemas há **a necessidade de uma previsão das possíveis estratégias de resolução, tendo em vista ações no ensino para favorecer uma articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo**.” (p. 19, grifo nosso)
Bonato (2020)	“[...] destacamos que diferentes ações desenvolvidas no planejamento [de aulas] associadas à perspectiva de Resolução de Problemas adotada, tais como a busca de uma justificativa matemática para o procedimento a ser abordado em sala de aula tendo em vista sua formalização, a descrição de resoluções esperadas para os problemas propostos bem como de dúvidas e dificuldades que poderiam ser manifestadas pelos alunos, a abordagem do conteúdo a partir de conceitos já estudados pelos alunos e a expectativa de introduzi-lo a partir de resoluções desenvolvidas por eles, **foram essenciais para a mobilização/desenvolvimento desses conhecimentos** [matemáticos para o ensino] dos graduandos.” (p. 6, grifo nosso)
Rodrigues (2020)	“No contexto investigado, a perspectiva de ensinar através da Resolução de Problemas possibilitou que os futuros professores realizassem um **estudo mais detalhado do conteúdo**, tendo em vista a necessidade de no momento da aula assumirem posição de guias para que os alunos alcancem os objetivos estabelecidos, e **estivessem preparados para lidar com diferentes estratégias de resolução**.” (p. 111, grifo nosso)
Bicalho, Allevato e Silva (2020)	“Em todo o processo de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas **o papel do professor é revisto**, a **necessidade dos conhecimentos especializados fica evidente** e **a Matemática passa a fazer sentido para o aluno**, quando aquele inverte a ordem institucionalizada nas aulas de Matemática, que parte da apresentação formal do conteúdo matemático e segue para resolução de problemas de aplicação, em detrimento de uma nova ordem: alunos autônomos, tendo um problema em mãos como ponto de partida para fazer Matemática, e um professor gerenciando o processo recursivo de ensinar, aprender, avaliar, reensinar, reaprender...” (p. 23, grifo nosso)
Mendes, Proença e Pereira (2020)	“Como resultados, quatro categorias emergiram revelando como potencialidades que trabalhar com esta perspectiva: I) propicia um **maior interesse** por parte dos licenciandos; II) **agrega ao seu arcabouço metodológico**, uma vez que se constitui como algo novo aos estudantes; III) possibilita um **processo colaborativo** de aprendizagem; e, IV) favorece um **processo de reflexão**.” (p. 821, grifo nosso)

Fonte: Elaboração pelo(s) autor(es)

Em síntese, a partir dos estudos supracitados, pode-se destacar o potencial da Resolução de problemas para a formação inicial de professores de Matemática em aspectos, como engajamento com a própria formação (Onuchic, Morais, 2013), articulação entre conteúdos abordados em diferentes níveis de ensino (Onuchic, Morais, 2013),

10.34019/2594-4673.

mobilização/desenvolvimento de conhecimentos específicos e didáticos do conteúdo matemático abordado (Proença, 2016; Bonato, 2020; Rodrigues, 2020), compreensão de seu papel como professor e dos alunos em uma perspectiva de ensino diferente da tradicional (Bicalho; Allevato; Silva, 2020), favorecimento de práticas colaborativas e reflexivas (Nunes, 2014; Mendes; Proença; Pereira, 2020), que podem impulsionar seu desenvolvimento profissional.

RELATO DA EXPERIÊNCIA DESENVOLVIDA

No ano de 2024, a disciplina de *Prática e Metodologia de Ensino de Matemática: Estágio Supervisionado*, de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública estadual paranaense, ficou sob a responsabilidade do terceiro autor deste artigo. Entre os tópicos que compunham a ementa da disciplina constava “Tendências pedagógicas para a Educação Matemática no currículo e na sala de aula do Ensino Médio”. Uma das tendências pedagógicas a serem abordadas seria a Resolução de Problemas. Aliado a isso, houve a manifestação por parte dos alunos da disciplina da necessidade de um estudo do conteúdo Análise Combinatória.

No referido ano, o primeiro autor deste trabalho, enquanto doutorando de um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da mesma universidade, orientado pela segunda autora, deveria cumprir seu Estágio de Docência na Graduação. Tendo isso em vista, e considerando a experiência do doutorando com o conteúdo Análise Combinatória como docente na Educação Básica, o professor da disciplina de *Prática e Metodologia de Ensino de Matemática: Estágio Supervisionado* lhe fez o convite para abordar esse conteúdo, na perspectiva da Resolução de Problemas, com os futuros professores.

Diante disso, o doutorando elaborou um plano de aula nesta perspectiva para o trabalho com o conteúdo Análise Combinatória (considerando os itens Princípios Aditivo e Multiplicativo da Contagem, Fatorial, Permutações Simples, Arranjos Simples e Combinações Simples) e o desenvolveu com os futuros professores. Por conta do limite de páginas, neste artigo será relatada a experiência apenas com os Princípios Aditivo e Multiplicativo da Contagem.

10.34019/2594-4673.

A implementação em sala de aula, seguiu ações inspiradas nas propostas de autores como Allevato e Onuchic (2014) e Proença (2018), em que os problemas são tidos como ponto de partida para o ensino e a aprendizagem de Matemática. Assim, o doutorando iniciou a aula explicando aos futuros professores a dinâmica que seria adotada:

- A turma seria organizada em grupos. Inicialmente, a ideia era formar pelo menos três grupos para que pudesse haver mais possibilidades de resoluções distintas. Como dos dez alunos matriculados na disciplina, nove compareceram à aula, eles foram organizados em três duplas e um trio.
- Os grupos não deveriam utilizar em suas resoluções conceitos de Análise Combinatória ainda não formalizados com eles pelo doutorando.
- Os alunos fariam uma leitura individual do enunciado do problema. Caso surgissem dúvidas durante a leitura individual poderia ser realizada uma leitura coletiva para esclarecê-las.
- Seria entregue o enunciado de um problema por vez para que os grupos pudessem resolvê-lo de forma organizada.
- Seria considerado um tempo para que discutissem e resolvessem os problemas em seus grupos. Neste momento, o doutorando iria percorrer os grupos para se inteirar de suas resoluções e fazer as intervenções que fossem necessárias para auxiliá-los.
- Um representante de cada grupo deveria registrar suas resoluções no quadro para discussão com a turma.
- De forma articulada com alguma(s) resolução(ões) apresentada(s), conceitos seriam formalizados junto à turma.
- Posteriormente, seria entregue de forma impressa aos alunos a parte formal de cada conteúdo abordado a partir dos problemas.
- Por fim, seriam propostos novos problemas tanto com a intenção de aplicar conteúdos já estudados quanto para a introdução de novos conteúdos.

Após isso, foi entregue o primeiro problema aos grupos, em que o objetivo era formalizar o Princípio Aditivo da Contagem, cujo enunciado é apresentado a seguir.

Figura 1 – Enunciado do Problema 1

Numa estante encontram-se 4 dicionários de inglês, 3 de espanhol e 2 de francês, todos diferentes entre si. De quantas maneiras uma pessoa pode escolher um dicionário dessa estante?

Fonte: Adaptada de Idecan (2017)

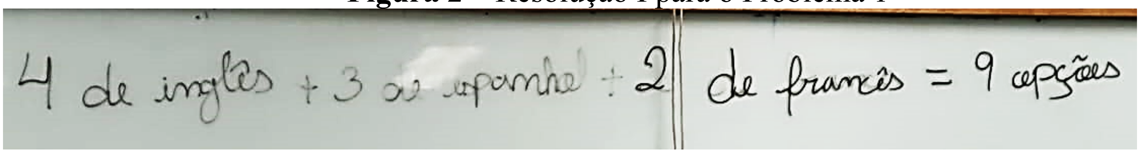
Para este problema, os alunos preferiram fazer apenas a leitura individual e foi destinado um tempo para resolvê-lo.

Ao observar o trabalho realizado pelos grupos, o doutorando percebeu que todos haviam resolvido o problema sem dificuldades e corretamente. Porém, dois dos grupos já haviam utilizado a ideia de adicionar as quantidades de possibilidades envolvidas. Como desconheciam formalmente o Princípio Aditivo da Contagem, conforme mencionaram posteriormente, não utilizaram suas características para justificar sua resolução.

Após todos finalizarem as resoluções, foi solicitado que um representante de cada grupo fosse ao quadro registrá-las, as quais são apresentadas a seguir.

Em uma delas, foram adicionadas as quantidades de possibilidades.

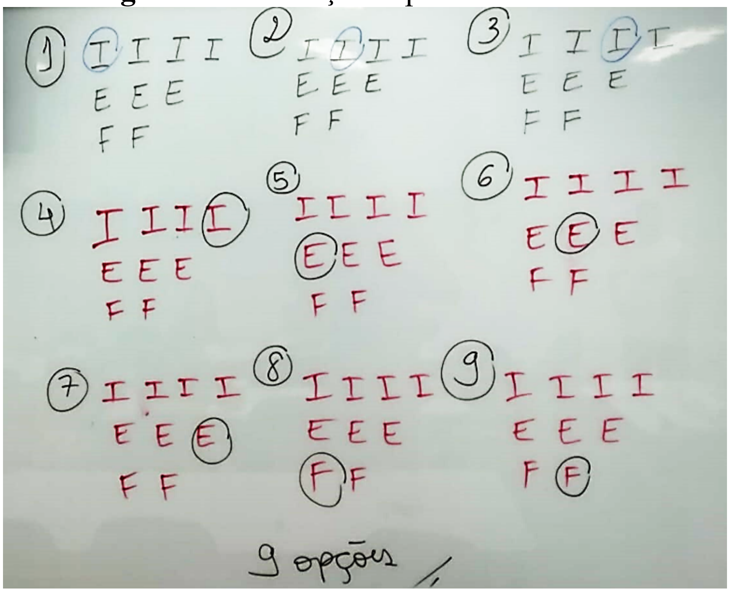
Figura 2 – Resolução I para o Problema 1



Fonte: os autores

Em outra, os dicionários de Inglês foram denominados de I, os dicionários de Espanhol de E e os dicionários de Francês de F, e os integrantes do grupo desenharam nove possibilidades separadas com os nove dicionários, e para cada possibilidade foram circulando um dos dicionários, conforme a figura a seguir. Cabe destacar que como todos os dicionários eram distintos entre si, a notação mais adequada teria sido utilizar índices em cada uma das letras escolhidas.

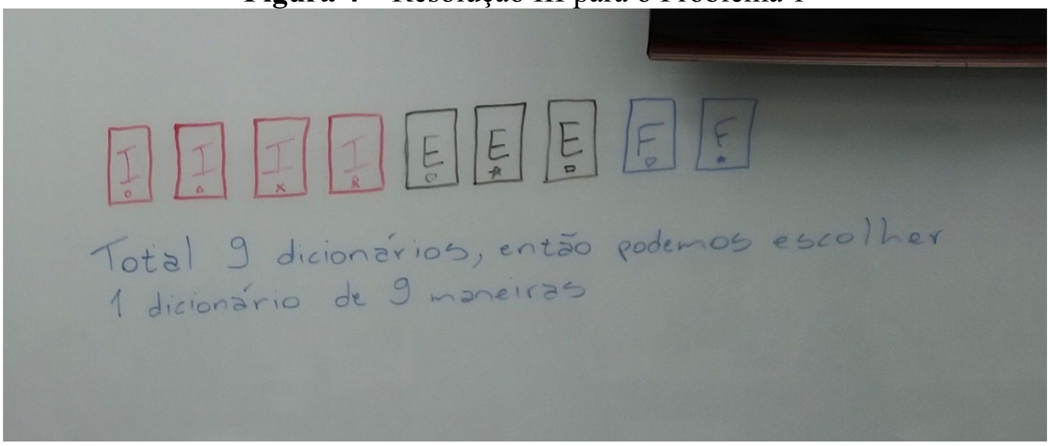
Figura 3 - Resolução II para o Problema 1



Fonte: os autores

E uma última resolução, semelhante à anterior, também surgiu, com a diferença de que o grupo de alunos fez um único esquema com 9 dicionários coloridos, de cores diferentes por idioma, e com pequenos símbolos diferentes, para representar cada um dos dicionários, conforme a imagem a seguir.

Figura 4 – Resolução III para o Problema 1



Fonte: os autores

A formalização do conceito do Princípio Aditivo da Contagem aconteceu a partir desta última resolução com o desenho dos 9 dicionários. Para isso, foi conduzido pelo doutorando o seguinte diálogo com os alunos do grupo que apresentou essa resolução.

Professor: Como vocês chegaram em 9 possibilidades distintas de se escolher um único dicionário dentre os 9 possíveis?

Aluno: Primeiro, desenhamos 9 dicionários coloridos (4 vermelhos que representavam os de Inglês, 3 pretos que representavam os de Espanhol e 2 azuis que representavam os de Francês) e com pequenos símbolos diferentes (abaixo de cada letra) e fomos contando um por um, ou seja, ou podemos escolhemos o primeiro dicionário vermelho ou escolhemos o segundo dicionário vermelho e assim por diante, totalizando em 9 escolhas distintas.

Professor: Então vocês resolveram o problema utilizando apenas a contagem dos dicionários.

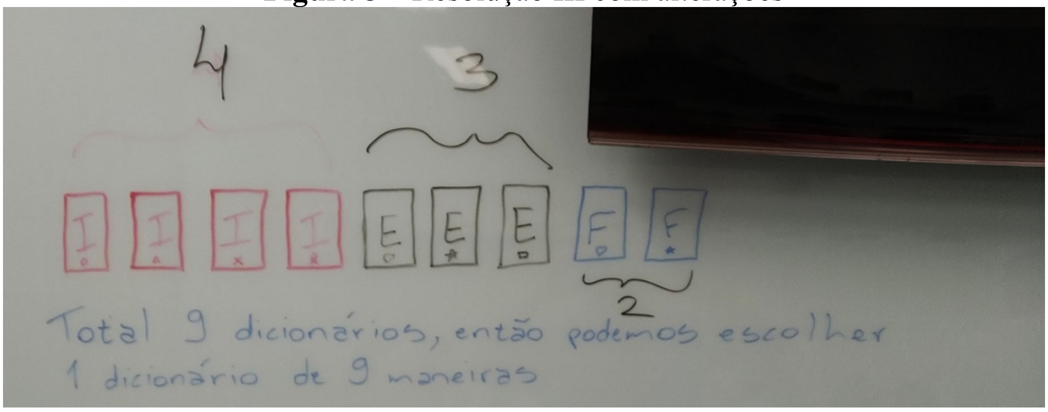
Aluno: Isso mesmo!

Professor: E como poderíamos resolver esse problema sem precisar contar cada um deles?

Aluno: Ah, poderíamos fazer os grupinhos de dicionários de mesma língua.

Professor: Certo, como ficaria?

Figura 5 – Resolução III com alterações



Fonte: os autores

Aluno: Temos então 4 dicionários de Inglês, 3 dicionários de Espanhol e 2 dicionários de Francês.

Professor: Certo, e em seguida o que podemos fazer com esses números para se chegar na resposta correta desse problema?

Aluno: Podemos fazer a soma deles, ou seja, $4 + 3 + 2$, totalizando 9 possibilidades distintas de se escolher um único dicionário.

Professor: E, por exemplo, quando escolhemos um dicionário de Inglês, poderíamos escolher um dicionário de Espanhol ou um dicionário de Francês?

Aluno: Não, devemos escolher apenas um dicionário entre eles.

Professor: Isso mesmo, então quando escolhemos um dicionário de Inglês exclui a possibilidade de escolher um dicionário de Espanhol ou de Francês. Nesse contexto temos a ideia de eventos mutuamente exclusivos, ou seja, eventos que não podem ocorrer simultaneamente.

Professor: E nesse caso, quem são nossos eventos?

Aluno: Escolher um dicionário!

Professor: Então, podemos dizer que temos 3 eventos aqui. Um evento A que seria escolher um dicionário de Inglês, um evento B que seria escolher um dicionário de Espanhol e um evento C que seria escolher um dicionário de Francês.

Professor: Então, podemos dizer que, quando temos um evento A (nesse caso escolher um dicionário de Inglês) com m maneiras distintas de se fazer uma escolha (nesse caso 4), um evento B (nesse caso escolher um dicionário de Espanhol) com n maneiras distintas de se fazer uma escolha (nesse caso 3) e um evento C (nesse caso escolher um dicionário de Francês) com p maneiras distintas de se fazer uma escolha (nesse caso 2), sendo A, B e C eventos mutuamente exclusivos, podemos fazer a adição $m + n + p$ (nesse caso 4+3+2) para obter o número total de maneiras de ocorrer um dos eventos (A ou B ou C), o que denominamos de Princípio Aditivo da Contagem, que pode ser estendido para mais eventos.

E por fim, esta parte formal foi entregue de maneira impressa aos alunos.

Feito isso, foi entregue o segundo problema aos grupos, em que o objetivo era formalizar o Princípio Fundamental da Contagem, comumente chamado de Princípio Multiplicativo da Contagem, cujo enunciado é apresentado a seguir.

Figura 6 – Enunciado do Problema 2

O centro cívico de uma escola realiza eleições para preenchimento das vagas de sua diretoria. Para presidente, apresentam-se 2 candidatos; para vice-presidente, 3 candidatos; e para secretário, 4 candidatos. Quantas chapas diferentes, com um presidente, um vice-presidente e um secretário podem ser formadas?

Fonte: Adaptado de Ferreira (2014, p. 6)

Os grupos novamente preferiram fazer a leitura individual e foi dado um tempo para que conseguissem resolver o problema.

Enquanto resolviam os problemas, durante a observação das resoluções dos alunos, foi observado que como não poderiam utilizar conceitos que ainda não haviam sido formalizados ainda, todos estavam tentando resolver por meio da listagem direta das possibilidades. Porém, alguns alunos não se atentaram que não poderiam ainda utilizar o esquema de árvore de possibilidades, inclusive um dos alunos estava com dificuldades de montar o esquema, pois não conseguiu esquematizar em apenas uma árvore de possibilidades, separando em dois esquemas menores, uma que relacionava apenas os presidentes e os vices e um que relacionava os vices e o secretários. O doutorando, neste caso, permitiu que tentassem resolver desta forma, já que haviam também resolvido por listagem direta.

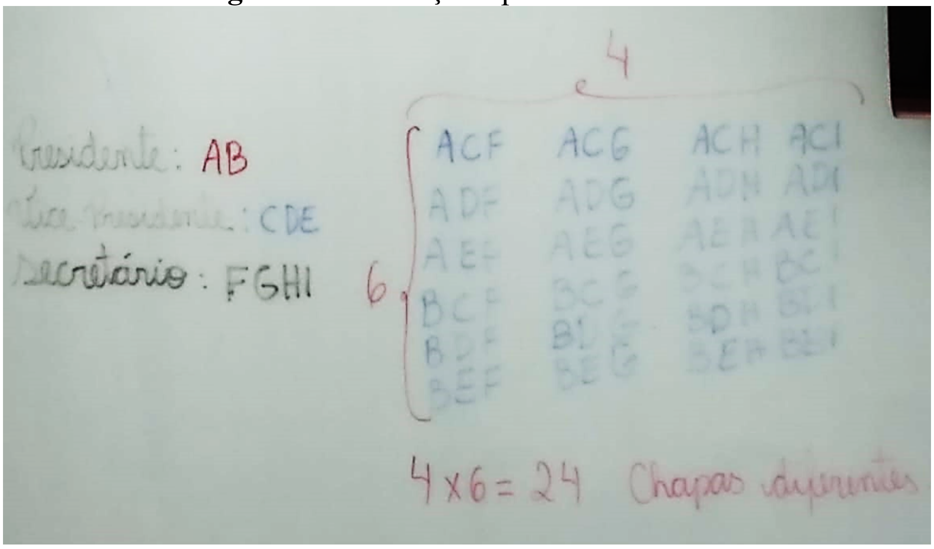
Após todos os grupos finalizarem as resoluções, foi solicitado que um representante de cada grupo com os tipos de resolução supracitadas fosse ao quadro para fazer o registro.

Inicialmente, foi evidenciado que todos haviam resolvido o problema corretamente, porém, dois dos grupos já utilizaram o esquema de árvore de possibilidades. Então, foi comentado que essa resolução ainda não poderia ser utilizada apesar de estar correta, pois ainda não havia sido formalizada, conforma havia sido combinado inicialmente.

Com isso, foram discutidas as duas resoluções que listaram todas as possibilidades de se montar uma chapa com um presidente, um vice-presidente e um secretário, ambas estavam corretas, porém um dos grupos preferiu chamar de A e B os presidentes, C, D e E os vice-presidentes e F, G, H e I os secretários em vez de utilizarem a primeira letra das palavras, como o outro grupo fez.

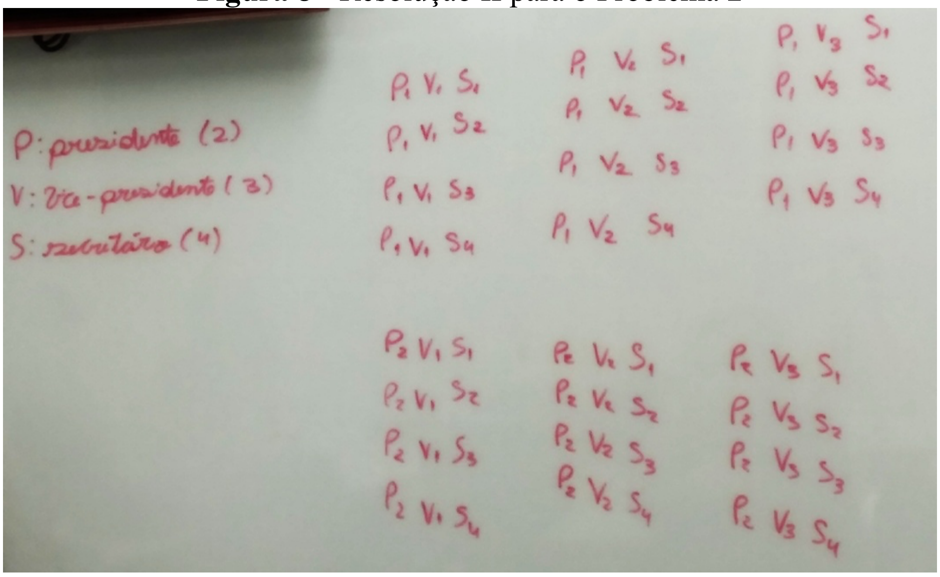
doi 10.34019/2594-4673.

Figura 7 - Resolução I para o Problema 2



Fonte: os autores

Figura 8 - Resolução II para o Problema 2



Fonte: os autores

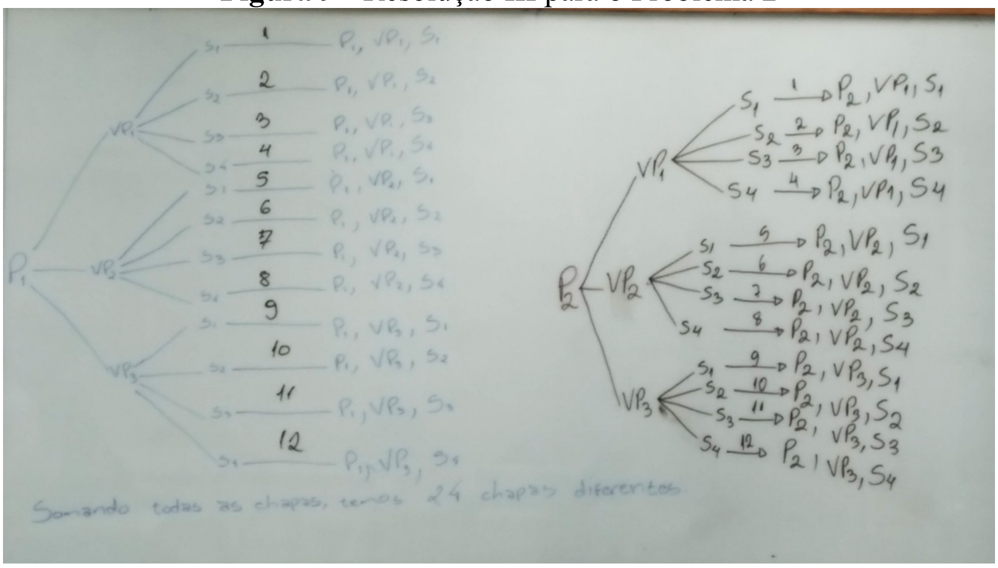
Em seguida, novamente por meio de um diálogo com os alunos, foram feitos questionamentos a um dos grupos sobre a listagem desenvolvida, e, de forma articulada com a resolução, realizada a formalização do esquema de árvore de possibilidades e do Princípio Multiplicativo da Contagem, por meio da árvore de possibilidades. Assim como no Problema 1, a intenção era que os futuros professores pudessem compreender, o que é destacado por autores como Proença (2016, p. 19), que nesta perspectiva de Resolução de Problemas "há a

10.34019/2594-4673.

necessidade de uma previsão das possíveis estratégias de resolução, tendo em vista ações no ensino para favorecer uma articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo.”

Professor: O que vocês acabaram de fazer chamamos de listagem direta, onde mostramos todas as possibilidades de um certo acontecimento. Um grupo preferiu utilizar outras letras para representar e o outro preferiu utilizar a primeira letra com índices numéricos, mas ambos estão corretos! Além da listagem direta, vocês também podem mostrar para seus alunos um esquema que chamamos de árvore de possibilidades, veja só o exemplo que um dos colegas de vocês fez (se referindo a uma das resoluções que relacionava primeiramente apenas os presidentes e os vices e depois, separadamente, relacionava os vices e o secretários) e tomem cuidado na hora de elaborar, não podemos fazer separados, porque estamos tentar montar uma chapa que contenha um presidente, um vice-presidente e um secretário, tudo ao mesmo tempo. Caso vocês não relacionem os três (presidente, vice-presidente e secretário), vocês estarão encontrando apenas chapas com presidente e vice-presidente ou com presidente e secretário ou com vice-presidentes e secretários e isso não é o que o problema pede. O que o problema pede pode ser observado na resolução apresentada na lousa (se referindo à Figura 9, a seguir).

Figura 9 - Resolução III para o Problema 2



Fonte: os autores

Professor: E o que vocês pensaram de início para mostrar todas essas possibilidades (se referindo à Figura 8, contendo a listagem direta)?

10.34019/2594-4673.

Aluno: Tentamos descobrir primeiro a quantidade de chapas com um presidente, um vice-presidente e um secretário, começando pelo presidente 1 (P_1), ou seja, fomos variando os vice-presidentes e os secretários.

Professor: Percebam que foi exatamente o que os integrantes do outro grupo também fizeram por meio do esquema de árvore de possiblidades (Figura 9)! Olhem bem cada ligação que temos ali, presidente 1 (P_1) com o vice-presidente 1 (VP_1), depois temos os secretários $(S_1, S_2, S_3\ e\ S_4)$ e assim por diante.

Professor: E, a partir disso que relataram, o que vocês encontraram?

Aluno: Encontramos que havia 12 possibilidades para o presidente 1 (P_1).

Professor: Isso mesmo! E então ... para o presidente 2 (P_2), o que aconteceria?

Aluno: Como encontramos 12 possibilidades distintas com o presidente 1 (P_1), então também temos 12 possibilidades com o presidente 2 (P_2).

Professor: Isso mesmo! Então o que fazemos com esses resultados para chegar no total de chapas distintas?

Aluno: É só somar tudo $(12 + 12)$.

Professor: E por que devemos somar nesse caso?

Aluno: Porque ou temos 12 chapas distintas com o presidente 1 (P_1) ou temos 12 chapas com o presidente 2 (P_2).

Professor: Certo, e podemos escrever isso de outra forma também né?

Aluno: Podemos escrever 2.12.

Professor: Isso mesmo! E esse 2 representa o que?

Aluno: A quantidade de presidentes que concorrem as chapas.

Professor: Isso mesmo! Agora vamos olhar para o número 12, de onde será que ele vem considerando as informações do problema?

Aluno: Ele vem dos vices e dos secretários.

Professor: Mas como assim?

Aluno: Porque temos 3 vices e 4 secretários, ou seja, $3.4 = 12$.

Professor: E o 12 representa o que então?

Aluno: A quantidade de chapas contendo apenas um vice-presidente e um secretário.

Professor: Então, se formos pensar na chapa completa e chegar no resultado desse problema, o que vocês podem fazer?

Aluno: Podemos fazer $2.3.4 = 24$ chapas distintas contendo um presidente, um vice-presidente e um secretário.

Professor: Isso mesmo! Então olha que interessante, para cada um dos 2 presidentes que escolhemos temos quantas opções de vice-presidentes?

Aluno: 3 opções distintas!

Professor: E para cada uma dessas opções de vice-presidentes temos quantas opções de secretários?

Aluno: 4 opções distintas!

Professor: Então, quando temos um evento A (que nesse caso é escolher um presidente para compor a chapa) com m maneiras distintas de se escolher (que nesse caso são 2) e para cada uma dessas opções, existe um outro evento B (que nesse caso é escolher um vice-presidente para compor a chapa) com n maneiras distintas de se escolher (que nesse caso são 3) e para cada uma dessas opções de se escolher um presidente e um vice-presidente, existe um evento C (que nesse caso é escolher um secretário para compor a chapa) com p maneiras distintas de se escolher (que nesse caso são 4) podemos resolver o problema fazendo $m.n.p$ (nesse caso 2.3.4), seguindo um princípio que chamamos de Princípio Fundamental da Contagem, também chamado de Princípio Multiplicativo da Contagem, que pode se estender a mais eventos. Por exemplo, se além de presidente, vice-presidente e secretário, ainda tivéssemos que escolher um tesoureiro entre 5 possíveis para compor a chapa, como resolveríamos?

Aluno: Era só pegar o nosso resultado e multiplicar por 5, ou seja, (2.3.4.5).

Professor: Isso mesmo!

E por fim, foi entregue o enunciado do Princípio Fundamental da Contagem, comumente chamado de Princípio Multiplicativo da Contagem aos alunos.

Antes de ser entregue o próximo problema, foi chamada a atenção dos alunos novamente para o fato de que cada ramificação da árvore de possibilidades, formavam os agrupamentos, por exemplo (P_1, VP_1, S_1) , e não apenas ajudaria a contar as possibilidades.

Após isso, foi entregue um problema de aplicação aos alunos, conforme a seguir:

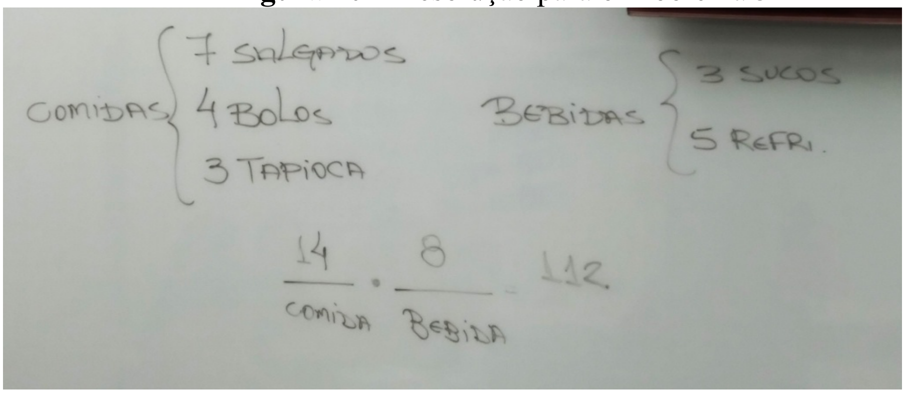
Figura 10 - Enunciado do Problema 3

Em um intervalo para descanso, a assistente em administração Marta foi a uma lanchonete cujo cardápio oferecia 7 tipos diferentes de salgados, 4 tipos diferentes de bolos, 3 espécies diferentes de tapioca, sucos de 3 sabores diferentes e 5 tipos diferentes de refrigerantes. Se Marta desejar fazer um lanche com apenas uma opção de comida e apenas uma bebida, ela terá mais de 100 maneiras distintas de organizar seu lanche?

Fonte: Adaptada de CEBRASPE (2016)

Todos conseguiram resolver e justificar corretamente, respondendo que teria mais do que 100 maneiras distintas, se atentando quando utilizar o Princípio Aditivo ou o Princípio Multiplicativo. As resoluções foram semelhantes à que segue:

Figura 10 – Resolução para o Problema 3



Fonte: os autores

Além de aplicarem o Princípio Multiplicativo nesta resolução, também se utilizaram dele nos problemas trabalhados pelo doutorando com a turma posteriormente para introduzir os tópicos *Fatorial, Permutações Simples, Arranjos Simples e Combinações Simples*, fato que ajudou a concluírem que, compreendendo conceitualmente cada tipo de agrupamento que seria formado, caso não quisessem utilizar as fórmulas apresentadas nos livros didáticos, poderiam empregar o Princípio Multiplicativo na resolução de problemas tanto de Permutações quanto de Arranjos e Combinações Simples.

Em suma, pode-se dizer que o trabalho desenvolvido pelo doutorando foi ao encontro de uma recomendação expressa na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em relação ao trabalho com os problemas de contagem na Educação Básica, os quais, segundo este documento “devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo [...]” (BRASIL, 2018, p. 275). Assim, os licenciandos puderam vivenciar uma experiência próxima da que se espera que desenvolvam com seus futuros alunos, o que pode colaborar com seu desenvolvimento profissional.

CONSIDERAÇÕES

No presente artigo, o objetivo foi apresentar o relato de uma experiência de um trabalho com os Princípios Aditivo e Multiplicativo da Contagem, na perspectiva da Resolução de Problemas, com licenciandos em Matemática.

Em síntese, para os futuros professores, tal experiência constituiu-se uma oportunidade de aprofundar seus conhecimentos a respeito do conteúdo, abordado conforme sua solicitação ao professor da disciplina, além de inspirá-los na abordagem do conteúdo com seus futuros alunos por meio de uma perspectiva de ensino apontada na literatura tanto como potencial para seu desenvolvimento profissional quanto para a aprendizagem dos alunos.

Para além disso, ao detalhar os diálogos ocorridos entre doutorando e futuros professores tendo em vista a formalização do conteúdo, espera-se poder colaborar com professores e futuros professores para o trabalho de introdução de um conteúdo matemático partindo de resoluções dos alunos.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas? *In:* ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 35-52.

AZEVEDO, E. Q., ONUCHIC, L. R. A Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática. **Eventos Pedagógicos**, *[S. l.]*, v. 8, n. 1, p. 401–423, 2017.

Disponível em: https://periodicos.unemat.br/index.php/reps/article/view/9925. Acesso em: 3 jul. 2025.

BICALHO, J. B.S.; ALLEVATO, N. S. G.; SILVA, J. F. A Resolução de Problemas na formação inicial: compreensões de futuros professores de Matemática. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 4, n. 10, p. 1–26, 2020. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/2794. Acesso em: 3 jul. 2025.

BONATO, G. V. **Conhecimento matemático para o ensino mobilizado em um planejamento de aula na perspectiva da Resolução de Problemas**. 2020. 97 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, 2020. Disponível em: https://pos.uel.br/pecem/wp-content/uploads/2022/01/Gabriel_PECEM_Dissertacao.pdf. Acesso em: 3 jul. 2025.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Resolução CNE/CP nº 4/2024, de 29 de maio de 2024.** Dispõe sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial em Nível Superior de Profissionais do Magistério da Educação Escolar Básica (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados não licenciados e cursos de segunda licenciatura). Diário Oficial da União: Seção 1, Brasília, p. 26-29, 3 de junho de 2024. Disponível em: https://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=258171-rcp004-24&category_slug=junho-2024&Itemid=30192. Acesso em: 3 jul. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 3 jul. 2025.

CEBRASPE. **Item 109**. In: Prova Objetiva de Conhecimentos Específicos para o cargo de Assistente em Administração. 18 de dezembro de 2016. Disponível em: http://www.cespe.unb.br/concursos/fub_16_1/arquivos/281FUB_009_01.pdf. Acesso em: 3 jul. 2025.

FERREIRA, M F R. **Plano de Trabalho I - Análise Combinatória.** PROJETO SEEDUC-FORMAÇÃO CONTINUADA. Petrópolis, 2014. Disponível em: https://canal.cecierj.edu.br/012016/8140c1f95f90d68a091591350b7ad377.pdf. Acesso em: 3 jul. 2025.

IDECAN. **Questão 12**. In: Prova Objetiva para o cargo de Agente Fiscal. 28 de maio de 2017. Conselho Regional de Educação Física – 5ª região (CREF 5). Disponível em: https://arquivos.qconcursos.com/prova/arquivo_prova/74183/idecan-2017-cref-5-regiao-agente-fiscal-prova.pdf. Acesso em: 3 jul. 2025.

MENDES, L. O. R.; PROENÇA, M. C. O Ensino de Matemática via Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores. **Revista de Educação Matemática**, [*s. l.*], v. 17, p. 1–24, 2020. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/189. Acesso em: 3 jul. 2025.

MENDES, L. O. R.; PROENÇA, M. C.; PEREIRA, A. L. As potencialidades da Resolução de Problemas nas pesquisas sobre a formação inicial de professores de Matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 9, n. 19, p. 821–839, 2020. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/6198. Acesso em: 3 jul. 2025.

MOÇO, P. P. **Discussões sobre a Resolução de Problemas enquanto estratégia metodológica para o ensino de Matemática.** 2013. 114 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências, Rio Grande, 2013. Disponível em: https://repositorio.furg.br/bitstream/handle/1/4801/Priscila%20Pedroso%20Mo%c3%a7o.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 3 jul. 2025.

NUNES, C. B. Resolução de Problemas: uma proposta didática na formação de professores. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 5, n. 2, p. 1–17, 2014. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/rencima/article/view/849. Acesso em: 3 jul. 2025.

ONUCHIC, L. R.; MORAIS, R. S. Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 671–691, 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/16951. Acesso em: 3 jul. 2025.

PROENÇA, M. C. A Compreensão de Licenciandos em Matemática sobre o Ensino via Resolução de Problemas: análise por meio de uma proposta de formação. **Boletim GEPEM**, *[S. l.]*, n. 68, p. 19–35, 2016. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/75. Acesso em: 3 jul. 2025.

PROENÇA, M. C. **Resolução de problemas:** encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula. Maringá: Eduem, 2018.

RODRIGUES, A. L. **Conhecimento Especializado do Professor de Matemática mobilizado em uma disciplina de Prática de Ensino**. 2020. 116 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Londrina, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, 2020. Disponível em: https://pos.uel.br/pecem/wp-content/uploads/2022/01/2020_16_12_Andre_Dissertacao_Versao-Final.pdf. Acesso em: 3 jul. 2025.

HISTÓRICO

Submetido: 05 de julho de 2025.
Aprovado: 21 de agosto de 2025.
Publicado: 12 de setembro de 2025.