



Resolução de problemas matemáticos por meio do uso coordenado do ChatGPT e do GeoGebra

Resolución de problemas matemáticos mediante el uso coordinado de ChatGPT y GeoGebra

Daniel Medina-Alarcón¹

Cinvestav-IPN, México

Luz Manuel Santos-Trigo²

Cinvestav-IPN, México

Janaína Poffo Possamai³

FURB, Brasil

Norma Suely Gomes Allevato⁴

UTFPR, Brasil

RESUMO

Atualmente, professores e estudantes mobilizam diversas tecnologias digitais na busca por informações relacionadas à compreensão de conceitos, à resolução de problemas e à discussão de ideias. Este estudo examina como um grupo de seis professores em exercício no Ensino Médio integra, de forma coordenada, o ChatGPT e o GeoGebra em atividades de resolução de problemas nos domínios da álgebra, geometria analítica e cálculo diferencial. Sob uma abordagem qualitativa exploratória, a pesquisa visa analisar os diálogos estabelecidos com o ChatGPT e as construções dinâmicas realizadas no GeoGebra durante um seminário de atualização e formação docente, guiado por um marco metodológico de seis fases, que contempla o diálogo inicial, a análise crítica das respostas da ferramenta, a redirecionamento exploratório, a solicitação de métodos alternativos, a reflexão retrospectiva e a construção de modelos dinâmicos no GeoGebra. Os achados revelam dois tipos de raciocínios complementares: o algébrico-analítico, favorecido pelo ChatGPT, que impulsiona a criação de modelos algébricos;

¹ Licenciatura em Física pela Universidad Autónoma Metropolitana (UAM). Mestrando em Ciências com especialidade em Matemática Educativa no Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV), CDMX, México. Endereço para correspondência: Calle República de Honduras 14, Colonia Centro, Cuauhtémoc, Cidade do México, CDMX, México. CEP: 06010. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0000-0000-0000>. E-mail: medinaalarcond@gmail.com.

² Licenciatura em Física pela Universidad Autónoma Metropolitana (UAM). Mestrando em Ciências com especialidade em Matemática Educativa no Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV), CDMX, México. Calle República de Honduras 14, Colonia Centro, Cuauhtémoc, Cidade do México, CDMX, México. CEP: 06010. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0000-0000-0000>. E-mail: msantos@cinvestav.mx

³ Doutorado em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Professora do departamento de Matemática da Universidade Regional de Blumenau (FURB), Blumenau, SC, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Iguape, 180, Itoupava Seca, Blumenau, SC, Brasil, CEP 89030112. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3131-9316> Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9011361495097968> E-mail: janainap@furb.br

⁴ Doutorado Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Professora visitante da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Londrina, PR, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Caracas, n. 550, ap 1503, Jardim Santa Rosa, Londrina, PR, Brasil, CEP 86050-070 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3131-9316> Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9614794595123496> E-mail: normallev@gmail.com

e o dinâmico-geométrico, favorecido pelo GeoGebra, que facilita a validação gráfica e a exploração dinâmica. A coordenação de ambas as ferramentas promove processos metacognitivos que permitem aos docentes avaliar e refinar continuamente suas soluções. Conclui-se que a combinação entre inteligência artificial generativa e ambientes de geometria dinâmica configura um modelo pedagógico promissor para o fortalecimento das competências de resolução de problemas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Inteligência Artificial Generativa; ChatGPT; GeoGebra; Raciocínio Matemático.

RESUMEN

En la actualidad, profesores y estudiantes activan diversas tecnologías digitales en la búsqueda de información relacionada con la comprensión de conceptos, la resolución de problemas y en la discusión de ideas. Este estudio examina cómo un grupo de seis profesores, en servicio de nivel medio, integran de manera coordinada ChatGPT y GeoGebra en actividades de resolución de problemas de los dominios del álgebra, geometría analítica y cálculo diferencial. Bajo un enfoque cualitativo exploratorio, la investigación se orienta a analizar los diálogos con ChatGPT y las construcciones dinámicas realizadas en GeoGebra durante un seminario de actualización y formación de profesores, guiado por un marco metodológico de seis fases que contempla el diálogo inicial, el análisis crítico de las respuestas de la herramienta, la redirección exploratoria, la solicitud de métodos alternativos, la reflexión retrospectiva y la construcción de modelos dinámicos en GeoGebra. Los hallazgos muestran dos tipos de razonamientos complementarios: algebraico-analítico, favorecido por ChatGPT, que impulsa la creación de modelos algebraicos; y dinámico-geométrico, favorecido por GeoGebra, que facilita la validación gráfica y la exploración dinámica. La coordinación de ambas herramientas promueve procesos metacognitivos que permiten a los docentes evaluar y refinar continuamente sus soluciones. Se concluye que la combinación de IA generativa y entornos de geometría dinámica constituye un modelo pedagógico prometedor para fortalecer las competencias de resolución de problemas.

Palabras clave: Resolución de Problemas, Inteligencia Artificial Generativa, ChatGPT, GeoGebra, Razonamiento Matemático.

INTRODUCCIÓN

La pandemia de COVID-19 trajo consigo consecuencias como el confinamiento, impulsando transformaciones en los procesos educativos, entre ellos la adopción de ambientes de enseñanza remotos o en línea. Esta transición generó nuevas perspectivas sobre cómo integrar tecnologías digitales en el currículum y planteó nuevos paradigmas acerca de cómo reformular las prácticas escolares, considerando estas prácticas emergentes de enseñanza-aprendizaje en el diseño de actividades que combinan entornos tanto remotos como presenciales (Santos-Trigo, 2024).

En el ámbito de la educación matemática, el uso de tecnologías digitales, específicamente en la resolución de problemas, favorece el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. La enseñanza de las matemáticas a través de este enfoque realza aspectos de la naturaleza y práctica de las matemáticas que son consistentes con el quehacer de la disciplina. Además, la integración de la tecnología en el salón de clases promueve la generación de distintas estrategias de resolución de problemas.

Entre las tecnologías digitales emergentes, la inteligencia artificial generativa (GenIA) ha cobrado especial relevancia en el ámbito educativo (Rudolph *et al.*, 2024; Baidoo-Anu; Owusu Ansah, 2023). Un ejemplo de este tipo de tecnología es el Chatbot Generative Pre-trained Transformer (ChatGPT), un modelo de lenguaje amplio (Large Language Model, LLM) basado en técnicas de aprendizaje profundo (Deep Learning), entrenado con cientos de miles de millones de parámetros provenientes de diversas fuentes, como datos de Internet, libros y documentos (Plevris *et al.*, 2023).

ChatGPT, desarrollado e introducido el 30 de noviembre de 2022 por OpenIA (ChatGPT, 2022), es una aplicación de software conversacional que se presenta como un chatbot que utiliza procesamiento de lenguaje natural. La facilidad del uso de ChatGPT ha permitido su adopción por parte de estudiantes y educadores (Jeon *et al.*, 2023). Al interactuar con esta herramienta, los estudiantes pueden recibir retroalimentación inmediata, acceder a múltiples perspectivas sobre un problema y experimentar con métodos no convencionales para resolver tareas matemáticas (Opesemowo; Ndlovu, 2024; Wardat, 2023). Por ejemplo, los estudiantes pueden utilizar ChatGPT para explorar diferentes enfoques en la resolución de un mismo problema (Getenet, 2024) o para realizar pruebas matemáticas que validen sus conjeturas (Yoon *et al.*, 2024).

Se argumenta que al combinar ChatGPT con sistemas de geometría dinámica (SGD) como GeoGebra, se puede crear un entorno de aprendizaje más sólido, en el que no solo se privilegia la resolución de problemas, sino que también promueve el análisis crítico, la creatividad y el uso de diferentes representaciones. En este escenario, se espera que los profesores colaboren de manera activa y reflexiva al integrar ambas herramientas para complementar sus estrategias en el proceso de resolución de los problemas. De este modo, los participantes no solo reciben respuestas por parte de ChatGPT, sino que también participan en el proceso de aprendizaje, formulando preguntas y reflexionando sobre sus respuestas.

Así, no solo se maximizan los beneficios de ChatGPT, sino que también ayuda a mitigar los riesgos asociados con su uso excesivo, fomentando una experiencia educativa más profunda y significativa. Estas ideas sugieren que la coordinación de ChatGPT con GeoGebra y la instrucción humana podría ofrecer un enfoque integral en la resolución de problemas y en la comprensión de conceptos matemáticos.

En esta dirección, se analizan y documentan los acercamientos empleados en la resolución de problemas en los dominios del álgebra, geometría analítica y cálculo diferencial, por parte de un grupo de profesores en servicio del nivel medio. Dichos acercamientos involucran, por un lado, el análisis de los diálogos sostenidos por los participantes al abordar el problema mediante el uso de ChatGPT. Y por otro lado, la construcción de los modelos dinámicos de los problemas que los participantes exploraron utilizando GeoGebra. El propósito es caracterizar los tipos de razonamientos estratégicos que los participantes exhiben durante el proceso de resolución de dichas actividades.

REFERENTES TÉORICOS

El aprendizaje y el desarrollo del pensamiento matemático se fortalece cuando los estudiantes problematizan sus procesos de comprensión de conceptos y de resolución de problemas. Problematicar, en este contexto, implica formular preguntas como un medio para representar, explorar y analizar conceptos en las diversas fases de resolución de problemas: comprensión del enunciado, planteamiento de un plan, ejecución del plan, presentación de resultados y la formulación de extensiones o nuevos problemas (Polya, 1945). De este modo, las tareas matemáticas se convierten en un vehículo para que los estudiantes se enganchen en una reflexión matemática. Es decir, el tipo de tareas y la manera en que se implementan en un entorno de aprendizaje son fundamentales para que los estudiantes desarrollen su habilidad de resolución de problemas y comprensión de conceptos matemáticos.

En este sentido, Santos-Trigo (2020) afirma que el principio de problematizar a la disciplina (sus contenidos) es clave para que los estudiantes se involucren en actividades de resolución de problemas y de esa manera profundicen en la comprensión y significado de conceptos matemáticos. Además, la resolución de problemas, entendida como práctica central en la educación matemática, no solo desarrolla competencias cognitivas, sino también habilidades metacognitivas y disposiciones afectivas que permiten abordar situaciones complejas con creatividad y pensamiento crítico (Lester; Cai, 2016; Schoenfeld, 1985).

ChatGPT como herramienta tecnológica en la resolución de problemas matemáticos

Durante la Conferencia de Dartmouth en 1956 apareció por primera vez el concepto de inteligencia artificial (IA) (McCarthy *et al.*, 2006) usado para referirse a la capacidad de un dispositivo electrónico para resolver problemas que requieren inteligencia. Desde sus orígenes en la segunda mitad del siglo XX, con la llamada “prueba de Turing” (Turing, 1950) (que plantea la posibilidad de que exista un dispositivo capaz de imitar el comportamiento de un humano) la IA ha evolucionado considerablemente. Hoy en día las redes neuronales profundas como los modelos Transformer (Devlin *et al.*, 2018), constituyen el corazón de la GenIA, como los LLM, entre los que se encuentran ChatGPT, Gemini, Claude y DeepSeeak.

Recientemente, el uso de LMM en distintas disciplinas ha ampliado las formas de resolver tareas o problemas, herramientas como ChatGPT han generado controversias sobre cómo usarlas en el estudio de las disciplinas. La posibilidad de que el usuario mantenga un diálogo con esta herramienta permite la exploración y búsqueda constante de posibles caminos de resolución de problemas (Rudolph *et al.* 2023). En el ámbito de la educación matemática, las tecnologías de IA ofrecen un espectro de beneficios potenciales, incluidos los sistemas de aprendizaje interactivo, la evaluación adaptativa mediante chatbots, los sistemas de tutoría interactivos y la generación de sistemas de aprendizaje personalizados que pueden adaptarse a las necesidades individuales de los usuarios (Engelbrecht; Borba, 2024; Engelbrecht *et al.*, 2025), esto puede conducir a un aumento en la participación, la motivación y el rendimiento académico de los estudiantes (Wardat *et al.*, 2023).

Se argumenta que el uso de tecnologías digitales como ChatGPT no solo transforman la manera en que los estudiantes interactúan con las matemáticas, sino que también amplían sus formas de representar, explorar y razonar sobre problemas matemáticos. En particular, ChatGPT ofrece un enfoque de diálogo continuo con el usuario para la resolución de problemas al proporcionar retroalimentación inmediata, sugerir estrategias y facilitar discusiones matemáticas. El potencial de ChatGPT en la resolución de problemas radica en su capacidad para responder de manera rápida a los usuarios y así explorar procesos complejos, desde la descomposición de problemas hasta la aplicación de heurísticas específicas. Es decir, a partir de su interfaz interactiva permite que los estudiantes formulen preguntas, evalúen respuestas y reflexionen sobre los conceptos involucrados.

Sobre la integración de ChatGPT en actividades de resolución de problemas matemáticos

Santos-Trigo (2024) subraya que el uso de ChatGPT en actividades como la resolución de problemas matemáticos involucra que los estudiantes problematizan situaciones y formulen preguntas o indicaciones claras para que la herramienta procese y genere respuestas que ayuden a resolver los problemas. Este proceso implica que los estudiantes, no solo reciban la información proporcionada por ChatGPT, sino que la analicen y evalúen la pertinencia, viabilidad y consistencia de las respuestas dadas por la herramienta. Además, los estudiantes pueden redireccionalizar el diálogo o solicitar alternativas de resolución, lo que permite explorar diferentes enfoques para resolver un problema (Santos-Trigo, 2024). En esta línea, se argumenta que coordinar el uso de ChatGPT con SGD, como GeoGebra, puede potenciar los procesos de razonamiento y la comprensión conceptual, al ofrecer distintas representaciones y estrategias de solución (Santos-Trigo, 2022).

Con base en estudios recientes (Amos *et al.*, 2024, Santos-Trigo, 2024) se propone un marco metodológico para guiar la interacción de los usuarios con ChatGPT en el contexto de la resolución de problemas matemáticos. Dicho marco comprende seis fases interconectadas:

1. **Diálogo o interacción inicial con la herramienta.** En esta fase, los estudiantes establecen un primer contacto con ChatGPT para abordar el problema matemático. Para activar la herramienta, los alumnos deben proporcionar una entrada o sugerencia que se exprese en términos de preguntas, el enunciado del problema o datos para plantear un problema.
2. **Análisis de la respuesta de la herramienta.** Tras recibir la respuesta de ChatGPT, los estudiantes deben analizarla de manera crítica. La idea es evaluar la validez de la información proporcionada, así como identificar las estrategias que la herramienta ha utilizado para abordar el problema. Los estudiantes reflexionan sobre el proceso que sigue la solución ofrecida, considerando si es coherente con lo que se espera y si se ajusta a los pasos adecuados para resolver el problema matemático.
3. **Redirigir la exploración.** En esta fase, los estudiantes vuelven a interactuar con ChatGPT para redirigir su exploración, guiados por los resultados del análisis anterior. Si la solución no es completamente clara o si la herramienta comete errores, los estudiantes deben formular nuevas preguntas, o atribuir nuevos comandos, para explorar

otras alternativas. Esta fase se caracteriza por la toma de decisiones sobre cómo afinar la búsqueda de soluciones.

4. **Preguntar por diferentes formas de resolver el problema.** Los estudiantes siempre deben buscar diferentes formas de resolver problemas matemáticos y una entrada o sugerencia para la herramienta sería pedirle explícitamente a ChatGPT que busque varias formas de resolver el problema, permitiendo explorar diferentes representaciones. Además, los alumnos deben preguntar a la herramienta qué conceptos y estrategias estaban involucrados en cada forma o enfoque para resolver el problema.
5. **Visión retrospectiva.** La fase final implica una reflexión sobre todo el proceso de resolución del problema. Los estudiantes deben analizar cómo se ha resuelto el problema, qué estrategias fueron efectivas, qué aprendieron del uso de la herramienta y cómo podrían abordar problemas similares en el futuro.
6. **Construir un modelo dinámico del problema con el uso de GeoGebra.** La idea es explorar dinámicamente otras maneras de resolver el problema y analizar los conceptos y estrategias importantes asociadas con el uso de la herramienta.

METODOLOGÍA

La presente investigación se inscribe en un enfoque cualitativo, de carácter exploratorio, orientado a analizar y caracterizar las maneras en que profesores en servicio desarrollan y exhiben habilidades y estrategias de resolución de problemas matemáticos mediante el uso de herramientas digitales, específicamente ChatGPT y GeoGebra. Este estudio busca aportar evidencia en un campo escasamente documentado, como es el uso coordinado de modelos de inteligencia artificial generativa en la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva de resolución de problemas.

Participaron seis profesores en servicio que imparten clases de matemáticas en nivel medio superior, en la Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM, plantel Vallejo, en México. La mayoría cuenta con formación profesional en áreas científicas o de ingeniería, sin formación pedagógica formal. Los docentes participaron en un programa de formación y actualización de profesores de matemáticas de enseñanza media superior, por lo que mostraron disposición para

integrar nuevas tecnologías en sus prácticas docentes, incluyendo el uso de ChatGPT y GeoGebra en actividades de resolución de problemas matemáticos.

Los datos de la investigación que conforman la unidad de análisis incluyen los acercamientos y estrategias que los participantes desarrollaron en las actividades de resolución de problemas al usar de manera coordinada ChatGPT y GeoGebra, durante las sesiones presenciales del seminario. Asimismo, se analizaron los reportes escritos que cada participante entregó al finalizar las seis sesiones del seminario, documentos que fueron recopilados en una carpeta de Google Drive. Dichos reportes incluyen la explicación detallada de los razonamientos matemáticos presentes durante el proceso de la resolución de los problemas, así como una reflexión sobre el uso de ChatGPT en cada fase del proceso.

Diseño de las actividades

El seminario tuvo una duración de seis semanas, con sesiones presenciales semanales de cuatro horas. Durante las sesiones, los profesores trabajaron en la resolución de cinco problemas matemáticos, asociados a los contenidos de los cursos de nivel medio. Utilizando ChatGPT como asistente conversacional y GeoGebra como herramienta de geometría dinámica. Los problemas abordados en el desarrollo de las sesiones se abordaron fueron uno de geometría analítica (G1) dos de álgebra (A1 y A2) y dos de cálculo (C1 y C2) que se presentan a continuación:

- **G1. Lugar geométrico.** Dado un punto $P(x_1, y_1)$ en el plano, encontrar el lugar geométrico de todos los puntos $Q(a, b)$ que se encuentren a la misma distancia del eje Y y del punto P .
- **A1. Llenado de agua de una cisterna con dos llaves.** Una llave llena de agua una cisterna en 2 horas y otra llave la llena en 4 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará la cisterna si se utilizan ambas llaves al mismo tiempo?
- **A2. Dilución de concentración salina.** Un tanque de 80 litros está a una concentración de 5% de sal. ¿Cuántos litros de agua pura debo agregar para bajar la concentración de sal al 2%
- **C1. Análisis de la gráfica de la derivada.** Interpretar la gráfica de la derivada de una función f para responder las siguientes preguntas a) ¿Cuál es el valor de la pendiente

de la recta tangente a f cuando $x = 4$? b) ¿Es posible que $f(2) = -1$? ¿Por qué sí o por qué no? c) ¿Se cumple que $f(5) - f(4) > 0$? d) Encuentra dónde la curva es cóncava hacia abajo y donde es cóncava hacia arriba. e) Bosqueja la gráfica de f .

- **C2. Máxima área de un rectángulo con perímetro fijo.** De todos los rectángulos con perímetro fijo P , identifica ¿cuál es el que tiene la máxima área?

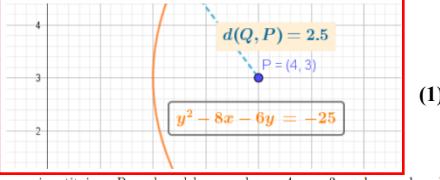
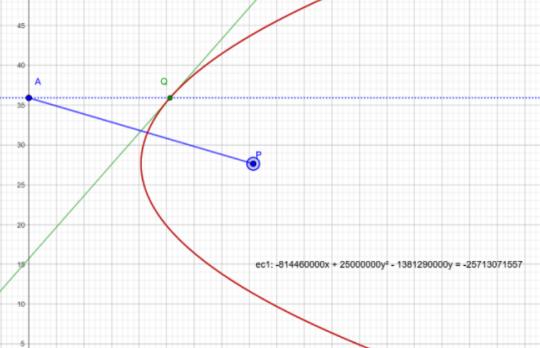
Durante las actividades, los participantes contaron con computadoras que les permitieron interactuar tanto con ChatGPT como con GeoGebra. La actividad central consistió en que los profesores resolvieran las cinco tareas matemáticas aplicando el marco de seis fases para guiar la interacción con ChatGPT propuesto en la sección anterior, lo que les permitió desarrollar sus razonamientos matemáticos de forma colaborativa y reflexiva, además de construir modelos dinámicos para representar y validar las soluciones.

INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

En esta sección presentamos los hallazgos del estudio, proporcionando una visión general del trabajo de los participantes al realizar las actividades. En esta dirección, se distinguen dos acercamientos en la resolución de los problemas. Por un lado, se presenta parte del diálogo que siguieron algunos participantes al abordar el problema con el uso de ChatGPT. Posteriormente, se ilustra la construcción de un modelo dinámico de los problemas que los participantes exploraron en cada uno de los problemas discutidos en las sesiones. Para ilustrar los diferentes acercamientos vamos a mostrar el análisis que corresponde al problema G1.

Cuadro 1 – Acercamiento con el uso de ChatGPT, del problema G1

Evidencia	Interpretación
<p>(1) Dado un punto $P(x_1, y_1)$ en el plano, encontrar el lugar geométrico de todos los puntos $Q(a, b)$ que se encuentren a la misma distancia del eje Y y del punto P.</p> <p>Queremos encontrar el lugar geométrico de todos los puntos $Q(a, b)$ que cumplan las siguientes condiciones:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Q está a la misma distancia del eje Y que del punto $P(x_1, y_1)$. <p>1. Distancia del punto $Q(a, b)$ al eje Y:</p> <p>La distancia al eje Y es simplemente el valor absoluto de la coordenada x:</p> $\text{Distancia al eje Y} = a $ <p>2. Distancia del punto $Q(a, b)$ al punto $P(x_1, y_1)$:</p> <p>La distancia al punto $P(x_1, y_1)$ está dada por la fórmula de la distancia euclídea:</p> $\text{Distancia al punto } P = \sqrt{(a - x_1)^2 + (b - y_1)^2}$ <p>3. Igualamos las distancias:</p> <p>Para que $Q(a, b)$ esté a la misma distancia del eje Y que del punto P, tenemos:</p> $ a = \sqrt{(a - x_1)^2 + (b - y_1)^2}$ <p>Dame los pasos a seguir para resolver el siguiente problema en GeoGebra:</p> <p>(2) Dado un punto $P(x_1, y_1)$ en el plano, encontrar el lugar geométrico de todos los puntos $Q(a, b)$ que se encuentren a la misma distancia del eje Y y del punto P.</p> <p>Para resolver este problema en GeoGebra, puedes seguir estos pasos:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Definir el punto P: <ul style="list-style-type: none"> • Abre GeoGebra y selecciona la vista de "Geometría" o "Álgebra". • Crea el punto $P(x_1, y_1)$ ingresando sus coordenadas específicas o colocando un punto libremente y asignándole un nombre. 2. Definir un punto genérico Q: <ul style="list-style-type: none"> • Define un punto $Q(a, b)$ que representará los puntos que buscamos. En GeoGebra, esto se puede hacer escribiendo $Q = (a, b)$. 3. Calcular la distancia de Q al eje Y: <ul style="list-style-type: none"> • La distancia de un punto $Q(a, b)$ al eje Y es a (valor absoluto de la coordenada x). 4. Calcular la distancia de Q al punto P: 	<p>Para el diálogo inicial se distinguen dos modos de interacción con ChatGPT.</p> <p>(1) Cuatro profesores ingresaron el enunciado de problema textualmente y recibieron la solución directa.</p> <p>(2) Dos profesores, además del enunciado, solicitaron una construcción paso a paso en GeoGebra.</p>
<p>Paso 3: Lugar geométrico</p> <p>La ecuación final representa el lugar geométrico de todos los puntos $Q(a, b)$ que cumplen la condición dada. Observemos que:</p> <p>(1) 1. Si $x_1 \neq 0$ y $y_1 \neq 0$, la ecuación corresponde a una parábola inclinada en el plano. 2. Si $x_1 = 0$, entonces la ecuación se simplifica a una parábola con eje vertical: $b^2 - 2by_1 + y_1^2 = 0,$</p> <p>¿Esta ecuación corresponde a alguna cónica conocida?</p> <p>(2) Si, la ecuación obtenida en el paso anterior corresponde a una cónica, específicamente una hipérbola. Vamos a analizar esto más a fondo.</p> <p>Revisión de la ecuación</p> <p>La ecuación obtenida es:</p> $0 = -2ax_1 + x_1^2 + b^2 - 2by_1 + y_1^2$ <p>Esta ecuación puede ser reorganizada y simplificada de tal forma que tenga una forma similar a la de la ecuación estándar de una hipérbola. Para hacerlo, necesitamos observar que la ecuación en su forma general está relacionada con el concepto de la locus de puntos equidistantes de un punto y una línea, lo cual es una característica de la hipérbola.</p>	<p>Los participantes analizaron el proceso de resolución del problema proporcionado por ChatGPT y redireccionaron el diálogo.</p> <p>(1) En la mayoría de los casos ChatGPT reconoció correctamente que el lugar geométrico era una parábola.</p> <p>(2) En dos ocasiones ChatGPT se equivocó, pero los profesores identificaron el error y redirigieron el diálogo hasta confirmar que correspondía a una parábola.</p>

<p>Paso 3: Lugar geométrico</p> <p>La ecuación final representa el lugar geométrico de todos los puntos $Q(a, b)$ que cumplen la condición dada. Observemos que:</p> <p>(2) 1. Si $x_1 \neq 0$ y $y_1 \neq 0$, la ecuación corresponde a una parábola inclinada en el plano. 2. Si $x_1 = 0$, entonces la ecuación se simplifica a una parábola con eje vertical: $b^2 - 2by_1 + y_1^2 = 0,$ la cual puede ser reescrita como: $b = y_1.$ Este análisis depende de los valores de P. ¿Te gustaría que lo resolvamos con un ejemplo específico?</p>	
<p>Obtiene el modelo general del lugar geométrico, si quisieramos comprobar si este modelo abarca la solución particular empleando nuestra construcción de Geogebra, demos una coordenada específica a P por ejemplo (4,3) de nuestra construcción se deriva la expresión y la grafica del lugar geométrico.</p>  <p>(1)</p> <p>Veamos ahora que si sustituimos P en el modelo general $x_1 = 4; y_1 = 3$ por lo que el modelo que predice queda</p> $2ax_1 = x_1^2 + (b - y_1)^2$ $2a(4) = (4)^2 + (b - 3)^2$ $8a = 16 + b^2 - 6b + 9$ $8a = b^2 - 6b + 25$	<p>Ningún profesor solicitó diferentes maneras de resolver el problema.</p> <p>(1) Sólo dos participantes recurrieron a explorar un caso particular, asignándole un valor específico a P, y usaron GeoGebra para validar su respuesta. Sin embargo, solo uno de ellos probó la condición de equidistancia.</p>
<p>Podemos decir como con la construcción de dos puntos que se explican en el comienzo del problema y con otras herramientas se puede formular una parábola como lugar geométrico. Cabe resaltar que chatgpt te explica muchos temas de manera detallada el solicitarle que resuelva el problema de manera detallada si es algo complicado irlo siguiendo.</p> <p>(1)</p> <p>Me agrada lo que hace el chat GPT porque con un solo tema propone trabajar todas las habilidades, tengo que ponerlo en práctica para verificar los tiempos que menciona. Por otro lado, el Chat GPT menciona el uso de Geogebra para confirmar la gráfica, pero no indica cómo serviría este uso al conocimiento del estudiante. Y aquí es donde radica la importancia de lo propuesto por los impartidores de este Diplomado, acerca de crear construcciones "robustas" en Geogebra para que el estudiante logre, de manera diferente al uso de lápiz y papel, la comprensión del concepto.</p>	<p>La mayoría de los participantes no registraron explícitamente una reflexión acerca del proceso de resolución del problema proporcionado por ChatGPT.</p> <p>(1) Algunos de ellos incluyen comentarios sobre la importancia de mantener el diálogo continuo con ChatGPT. También reconocieron el valor de complementar el uso de ChatGPT con herramientas como GeoGebra que ofrecen un acercamiento dinámico.</p>
	<p>Todos, excepto un participante, consiguieron hacer una construcción dinámica en GeoGebra para representar los conceptos matemáticos involucrados en el enunciado del problema.</p> <p>El participante que no consiguió hacer la construcción en GeoGebra fue debido a que no conectó los conceptos clave de la representación gráfica de la resolución del problema (mediatriz y recta perpendicular al eje Y).</p>

Fuente: datos de investigación

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En general, para el problema que involucra encontrar el lugar geométrico, sin importar de qué manera introdujeron la instrucción en el prompt, ChatGPT resolvió el problema planteando la expresión algebraica que modela el enunciado del problema. Esta expresión algebraica se obtiene al igualar las distancias de un punto $Q(a, b)$ en el lugar geométrico al eje Y y al punto fijo P . Como la distancia de un punto $Q(a, b)$ del lugar geométrico al eje Y es simplemente el valor absoluto de la coordenada x del punto Q , es decir $|a|$ y la distancia de Q a un punto fijo $P(x_1, y_1)$ es $\sqrt{(a - x_1)^2 + (b - y_1)^2}$ entonces se iguala $|a| = \sqrt{(a - x_1)^2 + (b - y_1)^2}$. Al desarrollar la expresión algebraica obtenemos que

$$0 = -2ax_1 + x_1^2 + (b - y_1)^2$$

Aunque la interpretación correcta de esta expresión algebraica debería conducir a la conclusión de que el lugar geométrico corresponde a una parábola, en algunos casos ChatGPT proporcionó respuestas incorrectas. Esto pone en evidencia la importancia del control metacognitivo, enfatizado por Schoenfeld (1985), en la supervisión y evaluación crítica del proceso de resolución. De manera consistente con lo sugerido por Lester y Cai (2016), los participantes intervinieron activamente redireccionando el diálogo con ChatGPT, solicitando aclaraciones o proponiendo modificaciones en las instrucciones iniciales, para guiar el razonamiento hacia la respuesta correcta. Esta interacción subraya la importancia de que los estudiantes desarrollemn habilidades de razonamiento crítico y reflexivo para evaluar las soluciones propuestas por herramientas tecnológicas, tal como plantean Santos-Trigo (2020).

La mayoría de los profesores no documentó de manera explícita una reflexión sobre el proceso de resolución del problema, lo que sugiere que esta evaluación pudo haber sido realizada de forma interna, sin un registro. Únicamente dos de los seis profesores incluyeron una reflexión explícita en sus reportes, en la cual destacaron la importancia del diálogo continuo con ChatGPT para obtener una representación algebraica del problema, así como el papel complementario de GeoGebra en la validación gráfica de la solución.

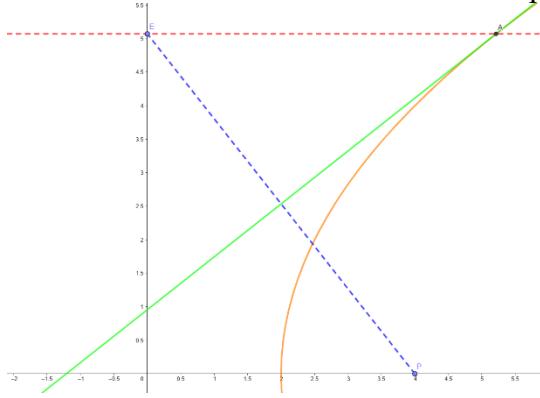
Los profesores que consiguieron hacer la construcción dinámica en GeoGebra, lograron representar los conceptos involucrados en el enunciado del problema y encontrar el lugar geométrico correspondiente a una parábola. Tales construcciones presentaban la característica de ser generales, ya que mantenían las propiedades matemáticas (el lugar geométrico

correspondiente a una parábola) al mover los objetos matemáticos. Es decir, la construcción era dinámica y robusta

Los participantes reconocieron explícitamente la importancia de coordinar GeoGebra y ChatGPT. Mientras la construcción dinámica en GeoGebra permitió a los profesores centrar la atención en el significado geométrico del problema, el diálogo con ChatGPT facilitó la exploración del modelo algebraico correspondiente. Este enfoque complementario refleja claramente las ideas planteadas por Santos-Trigo (2020), quien sugiere la integración de diversas herramientas tecnológicas para enriquecer las formas en que los estudiantes representan, exploran y razonan sobre problemas matemáticos.

Por ejemplo, en el problema del lugar geométrico, ChatGPT privilegia la construcción del modelo algebraico que involucra determinar e igualar las distancias de un punto $Q(a, b)$ en el lugar geométrico al eje Y y al punto fijo $P(x_1, y_1)$. Posteriormente desarrolla dicha igualdad hasta llegar a una expresión que está en términos de las variables a y b , que podemos tomar como una función $b(a)$ dada la condición que es el punto P . Por otro lado, GeoGebra ofreció a los participantes la oportunidad de representar geométricamente en el plano cartesiano, un punto E que es un móvil sobre el eje Y . Si se traza la perpendicular al eje Y que pasa por E y la mediatrix del segmento EP . Obtenemos el punto A que es la intersección de la perpendicular al eje Y y la mediatrix del segmento EP . Así, el lugar geométrico del punto Q al mover E sobre el eje Y genera la solución del problema: Una parábola con foco el punto fijo P y directriz el eje Y (véase Figura 1). Este proceso combinado valida la propuesta de Azaria et al. (2024), quienes destacan la necesidad de complementar las respuestas generadas por herramientas tecnológicas con validaciones externas y representaciones alternativas.

Figura 1 – Construcción dinámica en GeoGebra del problema G1



Fuente: datos de investigación

En las soluciones de los participantes se observa que más que privilegiar un acercamiento a los problemas, reconocieron la importancia de complementarlos. La mayoría comenzó con el modelo dinámico y reconocieron que este acercamiento demanda un análisis del significado geométrico de los conceptos involucrados en el problema. Esta fase inicial coincide con la etapa de “comprensión del problema” descrita por Pólya (1945), pues el modelo dinámico les permitió explorar visualmente los elementos esenciales del enunciado sin requerir, inicialmente, la representación algebraica.

Por otro lado, el uso del ChatGPT, en general, dirige las soluciones a la representación algebraica del problema y la solución analítica de tal representación, evidenciando claramente el uso de estrategias heurísticas y recursos matemáticos, aspectos fundamentales descritos por Schoenfeld (1985). Algunas veces las respuestas de ChatGPT fueron incorrectas, en tales casos, los participantes ejercieron activamente su control metacognitivo para identificar dichos errores, formular preguntas adicionales y redirigir la búsqueda de soluciones, tal como recomiendan Lester y Cai (2016) en su propuesta de fomentar habilidades críticas y reflexivas.

En términos generales, los participantes reconocieron explícitamente la importancia de integrar ambos acercamientos, dinámico y algebraico, para promover un entendimiento más profundo y completo del problema. Este resultado concuerda plenamente con la perspectiva de Santos-Trigo (2020), quien sostiene que coordinar diversas representaciones (dinámicas y analíticas) potencia la comprensión matemática y permite contrastar y valorar las formas específicas de razonamiento promovidas por cada acercamiento tecnológico utilizado.

CONSIDERACIONES FINALES

En respuesta a la pregunta de investigación sobre cuáles razonamientos estratégicos emergen en profesores de nivel medio al usar de manera coordinada ChatGPT y GeoGebra en actividades de resolución de problemas matemáticos, los resultados muestran que los participantes exhiben distintas estrategias durante el proceso de resolución.

Por un lado, durante su interacción con ChatGPT, los docentes pusieron en juego razonamientos estratégicos de tipo algebraico-analítico, consistentes con las primeras etapas del marco metodológico, en la formulación de preguntas iniciales, el análisis crítico de las respuestas ofrecidas por la herramienta y la redirección del diálogo cuando se detectaron errores o respuestas incompletas. Estos razonamientos se orientaron a construir representaciones algebraicas de los problemas, así como a explorar soluciones analíticas mediante un proceso iterativo de validación y refinamiento de estrategias.

Por otro lado, el uso de GeoGebra permitió a los profesores desarrollar razonamientos estratégicos dinámico-geométricos, expresados en la construcción de modelos visuales y en la manipulación de objetos matemáticos para explorar propiedades geométricas y validar soluciones. Estos razonamientos incluyeron acciones como representar gráficamente relaciones algebraicas, examinar invariantes geométricos y contrastar resultados obtenidos con ChatGPT, generando una visión más amplia del resultado obtenido.

Se concluyó que, el razonamiento algebraico, predominante al interactuar con ChatGPT, favorece una comprensión abstracta y simbólica de los conceptos matemáticos. En contraste, el razonamiento dinámico, potenciado por GeoGebra, enfatiza la comprensión visual y exploratoria de los conceptos matemáticos. Ambos razonamientos emergieron de manera coordinada y se fortalecieron mutuamente a través de la interacción crítica y metacognitiva de los participantes, quienes continuamente evaluaron, redirigieron y validaron sus procesos.

AGRADECIMIENTOS

Este estudio fue financiado en parte por la Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiación 001.

REFERÊNCIAS

AMOS, A.; RINA, A.; SHULAMIT, R. ChatGPT is a remarkable tool—for experts. **Data Intelligence**, v. 6, n. 1, p. 240–296, 2024. Disponível em:
https://doi.org/10.1162/dint_a_00235. Acesso em: 16 de maio de 2025.

BAIDOO-ANU, D.; OWUSU ANSAH, L. Education in the era of generative artificial intelligence (AI): understanding the potential benefits of ChatGPT in promoting teaching and learning. **Journal of AI**, v. 7, n. 1, p. 52–62, 2023. DOI:
<https://doi.org/10.33902/JPR.202426428>.

DEVLIN, J.; CHANG, M.-W.; LEE, K.; TOUTANOVA, K. BERT: Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding. **arXiv preprint**, arXiv:1810.04805, 2018. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1810.04805>. Acesso em: 16 de maio de 2025.

ENGELBRECHT, J.; BORBA, M. Recent developments in using digital technology in mathematics education. **ZDM: Mathematics Education**, v. 56, n. 2, p. 281–292, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01530-2>. Acesso em: 16 de maio de 2025.

ENGELBRECHT, J.; OATES, G.; BORBA, M. Artificial Intelligence and Social Media in Mathematics Education. In: ENGELBRECHT, J.; OATES, G.; BORBA, M. (Eds.). **Social Media in the Changing Mathematics Classroom**. Advances in Mathematics Education. Cham: Springer Cham, 2025. p. 43–65. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-82837-9>.

FLORIDI, L.; CHIRIATTI, M. GPT-3: Its nature, scope, limits, and consequences. **Minds & Machines: Journal for Artificial Intelligence, Philosophy and Cognitive Science**, v. 30, n. 4, p. 681–694, 2020.

GETENET, S. Pre-service teachers and ChatGPT in multistrategy problem-solving: implications for mathematics teaching in primary schools. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 19, n. 1, art. em0766, 2024. Disponível em:
<https://doi.org/10.29333/iejme/14141>.

JEON, J.; LEE, S. Large language models in education: a focus on the complementary relationship between human teachers and ChatGPT. **Education and Information Technologies**, v. 28, p. 15873–15892, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10639-023-11834-1>.

LESTER, F.; CAI, J. Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. In: FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (Eds.). **Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives**. Springer, 2016. p. 19–38.

LO, C. K. What is the impact of ChatGPT on education? A rapid review of the literature. **Education Sciences**, v. 13, n. 4, p. 410, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/educsci13040410>.

McCARTHY, J.; MINSKY, M. L.; ROCHESTER, N.; SHANNON, C. E. A proposal for the Dartmouth Summer Research Project on artificial intelligence, August 31, 1955. **AI Magazine**, v. 27, n. 4, p. 12, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1609/aimag.v27i4.1904>. Acesso em: 16 de maio de 2025.

OPESEMWO, O. A. G.; NDLOVU, M. Artificial intelligence in mathematics education: the good, the bad, and the ugly. **Journal of Pedagogical Research**, v. 8, n. 3, p. 333–346, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.33902/JPR.202426428>.

PLEVRIS, V.; PAPAZAFEIROPOULOS, G.; JIMÉNEZ, R. A. Chatbots put to the test in math and logic problems: a comparison and assessment of ChatGPT-3.5, ChatGPT-4, and Google Bard. **AI**, v. 4, n. 4, p. 949–969, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/ai4040048>.

POLYA, G. How to solve it. **Princeton: Princeton University Press**, 1945.

RUDOLPH, J.; TAN, S.; TAN, S. ChatGPT: bullshit spewer or the end of traditional assessments in higher education? **Journal of Applied Learning & Teaching**, v. 6, n. 1, p. 1–22, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.37074/jalt.2023.6.1.9>.

SANTOS-TRIGO, M. Problem-solving in mathematics education. In: LERMAN, S. (Ed.). **Encyclopedia of mathematics education**. Springer, 2020. p. 686–693. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8>. Acesso em: 16 de maio de 2025.

SANTOS-TRIGO, M. Trends and developments of mathematical problem-solving research to update and support the use of digital technologies in post-confinement learning space. In: TOH, T. L.; SANTOS-TRIGO, M.; CHUA, P. H.; ABDULLAH, N. A.; ZHANG, D. (Eds.). **Problem posing and problem solving in mathematics education: international research and practice trends**. Springer, 2023. p. 7–32. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-981-99-7205-0>.

SANTOS-TRIGO, M. Problem solving in mathematics education: tracing its foundations and current research-practice trends. **ZDM Mathematics Education**, v. 56, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8>.

TURING, A. Computing machinery and intelligence. **Mind: A Quarterly Review of Psychology and Philosophy**, v. 59, n. 236, p. 433–460, 1950. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mind/lix.236.433>. Acesso em: 16 de maio de 2025.

WARDAT, Y.; TASHTOUSH, M. A.; ALALI, R.; JARRAH, A. M. ChatGPT: a revolutionary tool for teaching and learning mathematics. **EURASIA Journal of**

Mathematics, Science and Technology Education, v. 19, n. 7, art. em2286, 2023.
Disponível em: <https://doi.org/10.29333/ejmste/13272>.

YOON, H.; HWANG, J.; LEE, K.; ROH, K. H.; KWON, O. N. Students' use of generative artificial intelligence for proving mathematical statements. **ZDM Mathematics Education**, v. 56, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01629-0>.

HISTÓRICO

Submetido: 02 de julho de 2025.

Aprovado: 20 de agosto de 2025.

Publicado: 12 de setembro de 2025.