



A Geometria Analítica para o ensino superior: saberes profissionais em obras de autores brasileiros nas décadas de 1960 e 1970 utilizados na UFJF

Analytical Geometry for higher education: professional knowledge in books by Brazilian authors from the 1960s and 1970s used at UFJF

Daniel José de Paula¹

Universidade Federal de Juiz de Fora

Maria Cristina Araújo de Oliveira²

Universidade Federal de Juiz de Fora

RESUMO

Apresentam-se nessa escrita resultados de uma pesquisa de mestrado profissional que investigou o ensino de Geometria Analítica (GA) no ensino superior a partir de análise de livros didáticos de GA publicados nas décadas de 1960 e 1970 que circularam no contexto da UFJF. Foram analisadas cinco obras, a fim de observar como o ensino de GA é sistematizado em cada uma e apreender saberes *a* e *para ensinar*. Conforme as análises, identificamos como indícios de saberes *a* e *para ensinar* GA no ensino superior: o uso da linguagem da teoria de conjuntos, linguagem vetorial no plano e no espaço, tratamento algébrico, uso de conceitos da trigonometria e da geometria euclidiana plana e espacial, entre outros.

Palavras-chave: Geometria Analítica, História Cultural, Saberes profissionais, Livros didáticos, Ensino superior.

ABSTRACT

This writing presents the results of a professional master's research that investigated the teaching of Analytical Geometry (AG) in higher education through the analysis of AG textbooks published in the 1960s and 1970s that circulated in the context of UFJF. Five works were analyzed to observe how AG teaching is systematized in each one and to identify the knowledge required to teach and for teaching. According to the analyses, we identified the following as indications of knowledge required to teach and for teaching AG in higher education: the use of set theory language, vector language in the plane and space, algebraic treatment, the use of trigonometric concepts, and Euclidean plane and spatial geometry, among others.

Keywords: Analytical Geometry, Cultural History, Professional Knowledge, Textbooks, Higher Education.

¹ Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). Professor substituto no Colégio de Aplicação João XXIII/UFJF, Juiz de Fora, MG, Brasil. Endereço para correspondência: Travessa Clério Bortoli, 31, Jardim Glória, Juiz de Fora, MG, Brasil, CEP: 36015-130. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4881-9456>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4062754768523919>. E-mail: danieljose.paula@ufjf.br.

² Doutora em Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP). Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFJF, Juiz de Fora, MG, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Doutor Romualdo, 680, apto 801, São Mateus, Juiz de Fora, MG, Brasil. CEP: 36016-380. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3346-1578>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/7741687012644966> E-mail: cristina.oliveira@ufjf.br.

INTRODUÇÃO

O presente artigo tem como proposta apresentar os resultados de uma pesquisa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, desenvolvida na Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), que faz parte de um projeto maior denominado Escolarização da Geometria Analítica: uma perspectiva histórica. Esse projeto maior contém pesquisadores do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática, núcleo UFJF (GHEMAT-UFJF). Em relação à dissertação de mestrado mencionada, o objetivo estabelecido foi construir uma representação histórica sobre o ensino de Geometria Analítica em nível superior e discutir os saberes profissionais por meio de uma análise histórica de livros didáticos, problematizando a Geometria Analítica sistematizada nestes.

Na História da Matemática, o surgimento da Geometria Analítica (GA) no século XVII, com os trabalhos de Descartes e Fermat, foi um marco. Ele se deu pela legitimação dos procedimentos algébricos, que alcançaram um nível de igualdade com os métodos geométricos já consolidados. (ROQUE, 2012).

A GA é um conteúdo matemático desenvolvido primeiramente no âmbito acadêmico, e há indícios de que, no Brasil, em meados do século XIX, começou a ser inserida no ensino secundário. Essa foi uma tendência internacional e recorrente de incluir conteúdos matemáticos, inicialmente tratados somente no ensino superior, no secundário, de modo a aproximar os estudos do tema nesses dois níveis. No Brasil, um exemplo disso é a inclusão da Geometria Analítica (GA) no ensino secundário, conforme identificado por Beltrame (2000) no programa de 1895 do Colégio Pedro II:

Analisaremos a seguir o programa de 1895, que apresentará mudanças radicais em relação aos já estudados, pois lembremos que, como previsto na modificação feita à reforma Benjamin Constant pelo ministro em 1891, seria a partir desse ano que o Cálculo passaria a constar nos programas; em outras palavras, que boa parte da proposta de Benjamin seria realmente posta em execução.

A matemática continuou sendo vista nos 4 primeiros anos do curso; porém com a seguinte distribuição:

1º ano: Arithmetica.

2º ano: Arithmetica e Algebra.

3º ano: Geometria e Trigonometria.

4º ano: Geometria geral, Cálculo e Geometria descriptiva (Álgebra, Noções de Cálculo diferencial e integral, Geometria analítica e Geometria descriptiva). (BELTRAME, 2000, p. 67).

No século XX a GA também aparece, segundo Oruê (2020), nos programas de Matemática dos Cursos Complementares Pré-Médico e Pré-Politécnico, expedidos na data 17 de março de 1936. Além disso, Oruê (2020) identificou os conteúdos do ensino de Geometria Analítica dos Cursos Complementares em manuais que circularam no período da Reforma Francisco Campos, como aponta a seguir

o estudo da Geometria Analítica pelos manuais editados em tempos da Reforma Francisco Campos confirma que para os Cursos Complementares havia um rol de conteúdos de Geometria Analítica – como constatamos pelos programas – e que, de fato, o estudo da Geometria Analítica nos Cursos Complementares Pré-Médico e Pré-Politécnico comportava tanto o estudo da Geometria Analítica de duas dimensões quanto o estudo da Geometria Analítica de três dimensões, ou seja, todo o estudo da Geometria Analítica. (ORUÊ, 2020, p. 114).

Desse modo, o conteúdo de GA consta no ensino secundário brasileiro já no século XIX, vide Beltrame (2000) e, conforme Oruê (2020) permanece em tempos de Reforma Francisco Campos. Nas matrizes curriculares do ensino superior encontramos a GA em cursos de exatas, como as engenharias, química, matemática, física, dentre outros. Soares (2013) identificou uma apostila de GA datada de 1956 para o Curso de Engenharia da Universidade de Minas Gerais, UMG (atual Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG).

Conforme Soares (2013), que estudou a trajetória da GA como componente curricular no curso de matemática da UFJF nas décadas de 1960 e 1970, até a década de 1950 circulou no Brasil, inicialmente, exemplares de autores estrangeiros nas línguas originais ou traduzidos para o português. Na década de 1960 são publicados livros de autores brasileiros, sendo este um marco para o ensino de GA no nível superior. O que estabeleceu nosso recorte temporal para essa investigação, 1960 a 1970, por se tratar de um período em que aparentemente ocorrem mudanças relativas ao ensino de GA ou melhor, ao que se apresenta nos livros deste tema, tornando-se assim um ponto instigante que corrobora para a análise do processo histórico do ensino da Geometria Analítica.

Orientamo-nos pelas questões norteadoras: qual é a Geometria Analítica sistematizada em exemplares de autores brasileiros das décadas de 1960 e 1970 para o ensino no nível superior? Quais motivações e referências marcaram a produção dessas obras? Quais saberes são sistematizados para o ensino de Geometria Analítica nesse período?

DISCUSSÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

Como se trata de um trabalho que envolve análise histórica de livros didáticos, apoiamos em contribuições da História Cultural por meio de Chartier (1990); nos conceitos de saberes profissionais (*a ensinar e para ensinar*) de Hofstetter e Schneuwly (2017), que são frutos de pesquisas desenvolvidas pela Equipe de Pesquisa em História das Ciências da Educação (ERHISE) da Universidade de Genebra e estão sendo apropriados pelo GHEMAT-Brasil; o livro didático como fonte de pesquisa por meio de Choppin (2002, 2004) e, contamos com Valente (2018) no processo de investigação histórica acerca dos saberes profissionais.

A História Cultural, conforme delineada por Roger Chartier, enfoca a interseção entre práticas sociais e representações culturais. Chartier (1990) argumenta que a História Cultural deve investigar como os conhecimentos são produzidos, difundidos e apropriados pelos diferentes grupos sociais ao longo do tempo. Uma das principais contribuições do autor é a ênfase em conceitos de “práticas”, “representações” e “apropriações”. O primeiro remete uma atenção na “história das práticas”, que perpassam pelas práticas de leitura e escrita, e como essas práticas moldam e são moldadas pelas condições sociais, econômicas e políticas. Ele destaca que os textos não têm significados fixos, mas são interpretados de maneiras diversas conforme o contexto cultural e social dos leitores.

Assim, a História Cultural examina as múltiplas formas de interação entre os textos (sejam eles escritos, visuais ou orais) e os leitores. Tomando como base o conceito de “práticas” ou a “história das práticas” de Chartier, podemos atribuir questões em pesquisas em História da educação matemática como as que se articularam com nossa pesquisa: como acontece o processo de estabelecimento de qual Geometria Analítica (plana ou espacial) é abordada no ensino superior? É mais frequente um tratamento vetorial, algébrico ou geométrico?

Chartier (1990) também aborda o conceito de “representações”, que se refere às maneiras pelas quais os grupos sociais percebem e interpretam o mundo ao seu redor. Essas representações são mediadas por práticas culturais e são fundamentais para a construção da realidade social. Ele argumenta que as representações culturais são ferramentas de poder, usadas para legitimar ou desafiar as estruturas sociais existentes. É esse conceito de representações que nos auxilia nas interpretações produzidas na análise de uma fonte de pesquisa, por exemplo. Ou seja, caracterizar o que se vê além daquilo que está posto no

documento; considerando seus aspectos físicos, disposição, estrutura, inserindo-o num contexto mais amplo de sua produção.

É nessa perspectiva que buscamos analisar, por exemplo, livros didáticos nas pesquisas em História da educação matemática, a fim de compreender por que um livro didático de um determinado assunto foi publicado com certa frequência em um espaço curto ou longo de tempo, qual a importância da estrutura dele, porque tem prefácio ou não, quais os assuntos mais presentes quando se analisa um coletivo de exemplares de um mesmo período, dentre outros apontamentos que podem surgir durante um estudo.

Quanto ao conceito de “apropriação”, para Chartier (1990), este refere-se ao processo pelo qual diferentes grupos sociais interpretam e utilizam os bens culturais de formas específicas. Ele considera que isso ocorre na interseção entre práticas e representações: as práticas são moldadas pelas representações e, ao mesmo tempo, reinterpretam e transformam essas representações. O autor destaca a importância da recepção e do uso dos objetos culturais, mais do que apenas sua criação e disseminação. Dessa forma, por meio do conceito de “apropriação” é possível, por exemplo, procurar entender as diferentes maneiras que um livro é utilizado dependendo do contexto social e histórico.

Os conceitos de “práticas”, “representações” e “apropriações” de Chartier (1990) são considerados nas análises das obras, pois é por meio deles que podemos levantar conjecturas e levantar novas questões para construir uma representação histórica do ensino de Geometria Analítica em nível superior nas décadas de 1960 e 1970. Não é nossa intenção aprofundar esses conceitos, mas cada aspecto analisado tem como base a perspectiva que a História Cultural nos permite.

Outra delimitação teórica adotada nesta pesquisa se refere aos saberes profissionais abordados por Hofstetter e Schneuwly (2017), que são os saberes *a ensinar* e os saberes *para ensinar*. Os saberes *a ensinar* compreendem os objetos de ensino, referem-se aos saberes elaborados originalmente pelas disciplinas universitárias (Geometria Analítica, por exemplo), pelos diferentes campos científicos considerados importantes para a formação de professores.

Já os saberes *para ensinar* incluem os conhecimentos que o professor deverá dispor para o exercício da docência, ligam-se àqueles saberes próprios da profissão docente; e são constituídos de referências vindas do campo das ciências da educação. Para este trabalho

consideramos saberes profissionais docentes como saberes a ensinar e para ensinar Geometria Analítica.

Como meio de valorizar nossas fontes de pesquisa, os livros didáticos, apoiamo-nos em Choppin (2002; 2004), que discute a complexidade presente em um exemplar, pois segundo ele cada um de nós tem um olhar parcial sobre o manual que depende da posição ocupada em um dado momento da vida no contexto educativo, ou seja, aluno, professor, pais de aluno, editor, responsável político, etc., e menciona que:

Direcionando seu olhar aos manuais, o historiador pode, assim, observar, a longo prazo, a aparição e as transformações de uma noção científica, as inflexões de um método pedagógico ou as representações de um comportamento social; pode igualmente, colocar sua atenção sobre as evoluções materiais (papel, formato, ilustração, paginação, tipografia, etc.) que caracterizam os livros destinados às classes. (CHOPPIN, 2002, p. 15).

O autor considera duas grandes categorias de pesquisas históricas que envolvem os livros: uma que aborda o livro didático apenas como um documento histórico igual a qualquer outro, analisam os conteúdos em busca de informações adversas a ele mesmo ou um interesse pelo conteúdo ensinado por meio do livro didático (história do ensino de Geometria Analítica, por exemplo); a outra categoria negligencia os conteúdos existentes nos exemplares, levando-os em conta como objetos físicos, isto é, como um produto fabricado, comercializado, distribuído e avaliado em um determinado contexto. E, complementa

No primeiro caso, a história que o pesquisador escreve não é, na verdade, a dos livros didáticos: é a história de um tema, de uma noção, de um personagem, de uma disciplina, ou de como a literatura escolar foi apresentada por meio de uma mídia particular; além disso, é frequente que os livros didáticos constituam apenas uma das fontes às quais o historiador recorre. Na segunda categoria, ao contrário, o historiador dirige sua atenção diretamente para os livros didáticos, recolocando-os no ambiente em que foram concebidos, produzidos, distribuídos, utilizados e “recebidos”, independentemente, arriscaríamos a dizer, dos conteúdos dos quais eles são portadores. Essa distinção é seguramente esquemática, uma vez que uma pesquisa geralmente participa — ainda que em proporções variáveis — das duas categorias. (CHOPPIN, 2004, p. 554).

À vista disso, a história escrita pelo historiador não é a dos livros e sim a história de um tema, de uma disciplina; o livro nesse caso é uma fonte de pesquisa.

A fim de guiar a busca, separação e análise dos exemplares pretendidos, apoiamo-nos em um processo de investigação histórica acerca de saberes, elaborado por Valente (2018) que consiste em três etapas: recompilação de experiências docentes, análise comparativa dos conhecimentos dos docentes, sistematização e uso dos conhecimentos como saberes. Ou seja, tal processo orienta na separação de fontes tomadas como experiências docentes, na análise dessas fontes para identificar os conhecimentos docentes e, enfim, sistematizar os conhecimentos como saberes.

A recompilação de experiências docentes, segundo Valente (2018), consiste numa seleção e separação de informações relatadas em fontes históricas que podem ser revistas, livros, programas e leis de ensino. “O conjunto obtido de tal procedimento de pesquisa representa uma coleção de conhecimentos dispersos num dado tempo histórico” (VALENTE, 2018, p. 380). Desse modo, esta etapa no presente trabalho levantou informações encontradas nos livros de Geometria Analítica analisados.

Para o levantamento de fontes ou recompilação de experiências docentes, conforme Valente (2018), foi preciso atentar-se aos tipos de documentos que condizem com os critérios estabelecidos para elucidar o que se pretendia nesta pesquisa. A primeira busca por livros textos de Geometria Analítica foi realizada considerando os seguintes aspectos: Geometria Analítica no título, podendo ter outros complementos; livros textos que contenham teoria e não somente exercícios; edições publicadas entre as décadas de 1960 e 1970; autores brasileiros; ensino superior como público-alvo.

Esta primeira averiguação ocorreu de forma remota em repositórios e acervos de universidades brasileiras como a Universidade de São Paulo (USP), a Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), a Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) e a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Identificamos alguns exemplares com o público-alvo desejado e outros com público-alvo indeterminado, segundo informações das fichas catalográficas dos acervos. As quantidades e disposição referentes aos repositórios consultados estão demonstradas na tabela 1.

Tabela 1 – Quantidade de livros por público-alvo e por plataforma

Público-alvo	USP	UFMG	UFJF	UFRJ	Total
Ensino superior	3	3	2	0	8
Sem destinação específica	33	7	25	5	70

Fonte: Paula (2023)

A partir desse levantamento, é possível afirmar que somente 8 exemplares eram destinados ao ensino superior, enquanto 70 são obras sem identificação clara do público-alvo, podendo ser voltadas tanto para o ensino secundário quanto para o ensino superior. Isto ocorre devido ao formato das fichas catalográficas de cada acervo, que são particulares.

Esta quantidade levantada não contém a separação referente à nacionalidade dos autores. Além disso, podemos perceber que somente dois livros com o público-alvo identificado para o ensino superior estão presentes na UFJF, conforme a busca. No entanto, ao consultar presencialmente as outras vinte e cinco obras sem destinação específica, foi possível encontrar e selecionar as obras que analisamos.

Desse modo, os exemplares selecionados foram: *Elementos de Geometria Analítica Plana*, de Edgard de Alencar Filho, publicado em 1964; *Geometria Analítica Plana*, de Hélio Siqueira Silveira, publicado em 1968; *Geometria Analítica Plana - Tratamento vetorial*, de Zózimo Menna Gonçalves e do mesmo autor a obra *Geometria Analítica no espaço - Tratamento vetorial*, ambos de 1978; *Cálculo Vetorial e Geometria Analítica*, de Maria Helena Novais, publicado em 1973.

A segunda etapa, análise comparativa dos conhecimentos docentes, compreende promover uma investigação das informações encontradas na etapa anterior, para caracterizar quais se convergem ou não para a hipótese de pesquisa estabelecida. Nessa perspectiva, tendo em mãos os livros de Geometria Analítica e dispondo de critérios de análise, foi feita uma composição de conhecimentos expostos nas obras a fim de identificar quais aspectos se mostram mais presentes no período estudado para caracterizar o ensino de GA em nível superior.

Com relação à terceira e última etapa, sistematização e uso dos conhecimentos como saberes, refere-se a uma

assepsia de elementos subjetivos e conjunturais dos consensos pedagógicos, de modo que os conhecimentos possam ser vistos com caráter passível de generalização e de uso, isto é, como saber. De outra parte, a análise inclui, de modo conjunto, a verificação em instâncias normativas e/ou didático-pedagógicas da ocorrência de uso dos elementos sistematizados pelo pesquisador” (VALENTE, 2018, p. 381).

Isto é, de posse dos livros a serem analisados, procuramos nessa etapa sistematizar os conhecimentos de Geometria Analítica expressos pelos autores como saberes (a ensinar e para ensinar) levando em conta o objetivo da pesquisa que inclui compreender as ideias propostas para o ensino, as circunstâncias e as finalidades com as quais tais exemplares foram desenvolvidos, semelhanças e diferenças entre as obras, além da possibilidade de apreender saberes profissionais para o ensino de Geometria Analítica.

Por se tratar de uma pesquisa realizada no programa de pós-graduação da UFJF e havendo a possibilidade de contato com exemplares físicos em acervos da instituição, optamos por fechar a busca nesse lócus. Foi realizado um levantamento de livros de GA para o ensino superior nas décadas citada, de autoria de professores brasileiros e selecionado estes exemplares físicos presentes nos acervos das Bibliotecas da UFJF:

- Título: Elementos de Geometria Analítica Plana. Autor: Edgard de Alencar Filho. Edição: 2^a edição. Ano: 1964. Editora: Livraria Nobel S. A.
- Título: Geometria Analítica Plana. Autor: Hélio Siqueira Silveira. Ano: 1968. Publicação: UFJF.
- Título: Cálculo Vetorial e Geometria Analítica. Autora: Maria Helena Novais. Ano: 1973. Editora: Editora Edgard Blucher Ltda.
- Título: Geometria Analítica Plana - Tratamento vetorial. Autor: Zózimo Menna Gonçalves. Ano: 1978. Editora: Livros Técnicos e Científicos Editora S/A.
- Título: Geometria Analítica no espaço - Tratamento vetorial. Autor: Zózimo Menna Gonçalves. Ano: 1978. Editora: Livros Técnicos e Científicos Editora S/A.

ANÁLISES E DISCUSSÃO RESULTADOS

Para a análise das fontes, os livros de Geometria Analítica, consideramos cinco critérios elaborados a partir de uma primeira lida geral das obras, captando informações de estrutura, os

conteúdos presentes e maneiras que os autores definiram os conceitos. Assim, elencamos os critérios de análise:

1. Analisar o prefácio – a fim de identificar a proposta da obra ou demais contribuições do(a) autor(a). Tomando como referência a História Cultural, de Chartier, o prefácio se torna etapa contribuinte para entender contexto histórico e cultural do livro;
2. Observar o tratamento dado a GA (vetorial, algébrico, geométrico ou ambos) e se há uma GA mais plana ou espacial;
3. Analisar o conceito de vetor nas obras – como os autores definem este conceito central na geometria analítica;
4. Verificar as propostas metodológicas para desenvolvimento do conteúdo – aspectos relacionados à como o ensino da GA é posta nos exemplares, ou seja, identificar a apresentação do conteúdo, exemplos e outros indicativos que podem auxiliar o ensino em termos de organização didática e possível presença de saberes para ensinar geometria analítica;
5. Examinar as propostas de exercícios ou problemas – identificar os tipos de exercícios/problemas e suas finalidades, considerando o que se entendia por “exercícios” ou “problemas” em cada obra e no contexto da época.

Apenas a obra de Edgar de Alencar Filho (1964) não possui prefácio, o que dificultou inclusive entender sua principal proposta ou finalidade com a obra. Os demais livros contêm prefácio e cada um contribui de uma forma para compreender objetivos e finalidades dos livros. Primeiramente, no livro de Silveira (1968), o prefácio foi escrito pelo professor e autor de livros de matemática, Roberto Peixoto, mencionando que o professor Hélio Silveira tinha experiência em ensinar Geometria Analítica e que um de seus desejos era tratar a GA plana com vetores. Desse modo, identifica-se uma das propostas da obra de Silveira (1968): trabalhar vetorialmente a Geometria Analítica em duas dimensões.

O livro de Maria Helena de Novais também possui prefácio, aparentemente escrito pela própria autora. Nele constam informações de que a obra contemplava o programa de ensino da disciplina “Geometria Analítica” ensinada no ciclo geral de vários cursos da UFPE, como matemática, estatística, engenharia, física, química e geologia. A autora explica que, por ser uma disciplina comum a vários cursos, optou por não incluir conceitos mais sofisticados do

cálculo infinitesimal e integral. Isso nos leva a entender que a escrita foi pensada para esse público mais geral.

Os dois livros de Zózimo Menna Gonçalves possuem prefácio escrito pelo próprio autor. Ele era professor na Universidade Federal Fluminense (UFF) e explica, no primeiro exemplar – Geometria Analítica Plana - Tratamento Vetorial – que com a última reforma universitária, a disciplina “Cálculo Vetorial – Geometria Analítica” do Instituto de Matemática da UFF foi desdobrada em duas disciplinas: uma com o nome Cálculo Vetorial e a segunda chamada Geometria Analítica. Com essa divisão, o autor informa que o exemplar de sua autoria “Curso de Geometria Analítica com Tratamento Vetorial” foi subdividido em três livros: Geometria Analítica Plana/Tratamento Vetorial, Geometria Analítica no Espaço/Tratamento Vetorial e Curvas Planas e Reversas, que, segundo Gonçalves (1978), as duas primeiras obras, as quais analisamos neste trabalho, contemplam todo o programa da disciplina Geometria Analítica ministrada na UFF em quinze semanas com quatro créditos semanais. Desse modo, conforme o autor nos mostra, tanto a GA plana quanto a GA espacial eram trabalhadas no ensino superior no contexto da UFF no período de publicação dos exemplares: final da década de 1970.

Como segundo critério de análise, ficou estabelecido identificar qual o tratamento dado à Geometria Analítica em cada obra. Notamos que Alencar Filho (1964) e Silveira (1968) abordam a GA plana, enquanto Novais (1973) apresenta um estudo tanto de GA plana quanto espacial. Por outro lado, Gonçalves (1978) trata em uma obra da GA plana e na segunda da GA espacial. Entretanto, no exemplar de Novais (1973), os conceitos trabalhados para a GA espacial são abordados em apenas um capítulo ao tratar de superfícies de revolução e quádricas, por exemplo. Por outro lado, Gonçalves (1978) produziu um livro para a GA espacial compreendendo desde coordenadas no espaço, vetores e retas no espaço até superfícies e curvas em três dimensões.

Nessa perspectiva, podemos dizer que a GA plana está presente em quatro das cinco obras analisadas, enquanto apenas uma possui somente a GA espacial. Quanto ao tratamento dado em cada manual, não é possível constatar qual linguagem (algébrica, geométrica ou vetorial) domina este ensino no período analisado. Tomando como base nosso referencial teórico, a História cultural, consideramos como elemento pertencente ao objetivo de construir

uma representação histórica para o ensino de GA nas décadas de 1960 e 1970 a utilização de uma GA mais plana do que espacial.

No exemplar de Alencar Filho (1964), a linguagem algébrica é predominante. A palavra “vetor” e a expressão “medidas algébricas dos vetores” aparecem apenas no primeiro capítulo, porém são mencionadas no meio de uma explicação sem definir anteriormente o que é um vetor. Além disso, o autor também utiliza “projeções” sem definir o que é uma projeção. Desse modo, baseando-se no livro de Alencar Filho, o professor deveria saber vetores e projeções para ensinar a GA conforme apresentada no exemplar.

No decorrer do exemplar de Alencar Filho (1964), ao abordar outros sistemas de coordenadas como o polar, o bilinear, polo-diretriz e o biangular, o autor apresenta explicações teóricas com ilustrações em alguns momentos, apoiando-se em temas que não são definidos no livro, indicando que tanto o professor quanto o aluno precisariam ter conhecimento desses conceitos para seu uso. Por exemplo, no sistema polar, é necessário ter conhecimento prévio de trigonometria, enquanto nos sistemas bilinear e polo-diretriz são necessários conhecimentos da geometria euclidiana plana (condição de existência de um triângulo e construção geométrica).

Diante disso, considerando o exemplar de Alencar Filho (1964), que se apoia na linguagem algébrica e leva em conta conceitos de trigonometria e da geometria plana euclidiana, identificamos que para ensinar a Geometria Analítica proposta, o professor deve saber álgebra, trigonometria e geometria plana. Já o livro de Silveira (1968) possui uma linguagem vetorial e geométrica, ou seja, o autor trabalha com a noção vetorial durante toda a obra além de, utilizar representações gráficas como auxílio.

Com relação ao livro de Novais (1973), primeiramente, foi possível observar que há presença de uma linguagem da Teoria dos Conjuntos como, por exemplo, ela define as coordenadas como uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos pontos do plano e o conjunto de pares ordenados dos números reais, como podemos ver na figura 1.

Figura 1: Menção a teoria de conjuntos identificada tópico Coordenadas no plano no livro Cálculo vetorial e geometria analítica, de Novais (1973)

1.2 COORDENADAS NO PLANO

Podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos pontos do plano e o conjunto dos pares ordenados de números reais.

Na verdade, sejam r_1 e r_2 duas retas concorrentes do plano e seja O o seu ponto de encontro.

a. Primeiro estabeleçamos uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos pontos do plano e o conjunto dos pares ordenados de pontos, o primeiro da reta r_1 e o segundo da reta r_2 .

A cada ponto P do plano façamos corresponder um ponto $P_1 \in r_1$ e um ponto $P_2 \in r_2$, construídos da seguinte maneira: o ponto P_1 é obtido pela intersecção de r_1 com a paralela a r_2 conduzida por P e o ponto P_2 é obtido pela intersecção de r_2 com a paralela a r_1 conduzida por P , como se vê na Fig. 1.3.

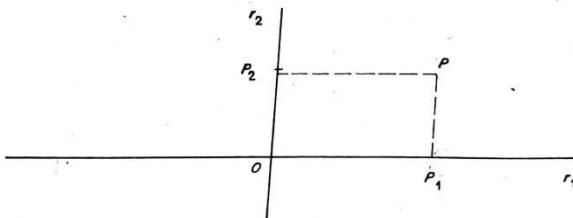


Figura 1.3

Fonte: Novais (1973, p. 2).

A linguagem da Teoria dos Conjuntos é recorrente do Movimento da Matemática Moderna (MMM), que no Brasil ocorre a partir da década de 1960, sobretudo nos níveis primário e secundário. Tomando o livro de Novais, o professor deveria saber sobre a linguagem da Teoria dos Conjuntos que permeia o exemplar para ensinar GA (Paula, 2024).

Quanto aos livros de Gonçalves (1978), o autor indica nos títulos a expressão “tratamento vetorial”. Contudo, no primeiro exemplar, onde trata da GA plana, há mais capítulos com abordagem apenas algébrica, como os capítulos que estudam as curvas circunferência, parábola, elipse e hipérbole, além dos capítulos que tratam de curvas algébricas especiais e transcendentais. No entanto, ele expõe o conteúdo com um uso frequente de representações gráficas durante as explicações, ou seja, há um tratamento geométrico desses saberes. Isso ocorre em praticamente metade do exemplar, ou seja, indo contra ao próprio título do livro que contém a expressão “tratamento vetorial” (Geometria Analítica Plana – Tratamento Vetorial) e ao que se informa no prefácio: proposta do exemplar ser todo vetorial, reforçando o título.

O segundo exemplar de Gonçalves referente a uma GA espacial é todo trabalhado com a noção vetorial. Como estes exemplares tratam de uma reestruturação de uma “nova” disciplina “Geometria Analítica” desmembrada da “antiga” “Cálculo Vetorial e Geometria Analítica”, é pressuposto pelo autor, baseado na estrutura do curso de Matemática da UFF, que o professor deveria saber cálculo vetorial para saber ensinar a GA proposta pelos livros.

Gonçalves disponibiliza, tanto na primeira obra quanto na segunda, apêndices para auxiliar o estudo sistematizado por essas. O exemplar que trata da GA plana conta com dois apêndices, sendo o primeiro com fórmulas e conhecimentos mais usados da Álgebra e da Trigonometria, enquanto o segundo contém resumos do cálculo vetorial no plano. Já no exemplar que trata da GA espacial, o apêndice apresenta as principais fórmulas e conhecimentos relativos a vetores no espaço tridimensional.

Consideramos como terceiro critério de análise apurar como cada autor apresenta ou define vetor, pois é um conceito central na Geometria Analítica. Como mencionamos, no livro de Filho (1964) não contém a definição de vetor, mas ele cita este conceito em alguns momentos considerando que o leitor já conheça. Novais (1973) define a partir de classes de equipolência de segmentos orientados chamando-o de vetor livre e Silveira (1968) considera o vetor como um ente matemático representativo de uma grandeza (vetorial) e ainda atribui o vetor como uma imagem geométrica de um segmento orientado.

Enquanto isso, nas obras de Gonçalves (1978) não consta definição para vetor. O autor já considera que o leitor tem conhecimento deste conceito ao utilizar seus livros, porém fornece ao final de cada exemplar alguns resumos em apêndices com conteúdos iniciais do cálculo vetorial em forma de fórmulas e propriedades de vetores, mas não contém qualquer definição, ou seja, mesmo nos resumos ele optou por não apresentar uma definição para vetor.

Outro critério de análise é identificar propostas metodológicas em tais obras. Nos exemplares de Alencar Filho (1964) e Novais (1973) a estrutura compreende apresentação do conteúdo, exemplos em alguns momentos e exercícios/problemas para fixação. Sugere em determinadas partes que o docente deva saber certos conceitos preliminares, sendo essas as indicações metodológicas para que o professor possa se guiar.

Por outro lado, o exemplar de Silveira (1968) apesar de seguir essa estrutura de apresentação do conteúdo, exemplos e exercícios, estabelece maneiras de escrita que podem

indicar procedimentos metodológicos para o ensino da GA, como, por exemplo, estabelecer uma organização didática numerada ao explicar o conteúdo como podemos ver na figura 2.

Figura 2: Explicação do tópico Produto de um vetor por um escalar no livro Geometria analítica plana, de Silveira (1968)

4. *PRODUTO DE UM VETOR POR UM ESCALAR —*

I) *Definição* — Chama-se *produto* de um vetor \vec{a} por um número real k ou vice-versa, um vetor \vec{b} , de mesma direção que \vec{a} , cuja razão para o vetor \vec{a} é igual ao escalar k . Escreve-se:

$$\vec{b} = k \vec{a} \text{ ou } \vec{b} = \vec{a} k \quad (1)$$

Decorre da definição, que o vetor \vec{b} é obtido de \vec{a} por meio da homotetia de razão k .

II) *Propriedades* —

a) a fórmula ou igualdade vetorial (1), quando k varia de $-\infty$ — $\vec{a} + \infty$, representa todos os vetores \vec{b} , paralelos ao vetor \vec{a} . Se k é positivo, \vec{b} e \vec{a} terão o mesmo sentido e, se k é negativo, \vec{b} terá sentido contrário ao de \vec{a} , e reciprocamente.

Em particular, se $k = 0$, o vetor \vec{b} será o vetor nulo; se $k = 1/n$, a operação definida expressa o quociente de um vetor por um escalar n :

$$\vec{b} = \frac{\vec{a}}{n}$$

b) é evidente que a operação definida, além de *comutativa*, goza também da propriedade *associativa*:

$$(mn)\vec{a} = m(n\vec{a})$$

Fonte: Silveira (1968, p. 26).

No estudo de curvas e equações, o autor elabora um quadro cujo título é “Correspondência mútua” exposto na Figura 3, onde ressalta a “unidade lógica” entre a Geometria e a Álgebra, que, segundo ele, é o que “caracteriza a Geometria Analítica” (Silveira, 1968, p.94-95). Neste quadro, é mencionado, por exemplo, que “ponto” na geometria plana corresponde a “Dois números: abscissa e ordenada” na álgebra.

Figura 3: Quadro Correspondência mútua no livro Geometria Analítica Plana, de Silveira (1968)

CORRESPONDÊNCIA MÚTUA	
NA GEOMETRIA PLANA	NA ÁLGEBRA
Um ponto.	Dois números: abscissa e ordenada.
Deslocamento de um ponto.	Variação de dois números: abscissa e ordenada.
Ponto médio de um segmento de reta.	Cálculo das coordenadas pela média aritmética das coordenadas homônimas dos extremos do segmento.
Medida da distância entre dois pontos.	Cálculo da raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas homônimas dos pontos.
Deslocamento de um ponto sobre um curva.	Variação de dois números x e y (abscissa e ordenada), de modo a verificar certa equação.
Exame de 1 curva e suas propriedades.	Estudo de sua equação.

Fonte: Silveira (1968, p. 95).

Desse modo, consideramos este quadro “Correspondência Mútua” como um encaminhamento metodológico presente no exemplar de Silveira para uso do professor no ensino da GA proposta. Além disso, Silveira (1968) adotou uma organização da escrita de forma numerada por todo o exemplar e difere das obras de Alencar Filho (1964) e Novais (1973) estruturadas com textos (parágrafos) às vezes curtos, às vezes longos.

Já nas duas obras de Gonçalves (1978), o autor mantém um encaminhamento metodológico com estrutura de apresentação do conteúdo por meio de ilustrações (representação gráfica) junto da explicação, pouco se usa exemplos e em quase todos os capítulos, disponibiliza exercícios.

Ainda articulado com o quarto critério de análise (indicações metodológicas e possibilidade de apreender saberes para e a ensinar GA), observamos que na obra de Filho (1964) há indícios de saberes a ensinar que deveriam compor o repertório do professor quando o autor menciona “vetor”, “projeção”, “medidas algébricas dos vetores”, sem definir antes. Assim, o professor ao utilizar esta obra no ensino de GA precisa ter conhecimento destes conceitos. Outros conteúdos que não estão presentes no livro de Alencar Filho (1964), mas são

necessárias para o ensino de parte do conteúdo de GA são: trigonometria e manipulação algébrica.

No livro de Novais (1973), de modo análogo, identificamos como indícios de *saberes a ensinar*: linguagem da teoria de conjuntos. Nos livros de Gonçalves (1978), a linguagem vetorial, operar vetorialmente, as propriedades de vetores. Já no livro de Silveira (1968) também consideramos como saberes a ensinar pressupostos a linguagem vetorial e como saberes *para ensinar* a organização didática do conteúdo.

Na investigação dos exercícios ou problemas, devemos considerar o que cada obra trata como “exercícios” ou “problemas”, também levando em conta o contexto da época. A obra de Alencar Filho (1964) adota listas com “Problemas para resolver” como título, além de duas listas que aparecem em dois capítulos do exemplar, chamadas de “Problemas Diversos”. Entendemos que o autor “classifica” como “problemas para resolver” aqueles mais técnicos, pois são de resolução mais direta com tratamento todo algébrico. Como, por exemplo, identificar equações de retas de curvas no plano a partir de pontos. Por outro lado, as listas denominadas “Problemas diversos” são aqueles com maior grau de dificuldade e que suas soluções são demonstrações matemáticas, ou seja, que exigem um maior rigor matemático.

Nas demais obras os autores utilizam a expressão “Exercícios”, contendo vários tipos: de aplicação direta de fórmulas; de construção; de fixação da terminologia; de prova e demonstração e de verificação. Entretanto, cabe observar que nos exemplares de Silveira (1968) e Gonçalves (1978) o termo “Problemas” aparece em momentos de discussão dos conteúdos. Por exemplo, no livro Geometria Analítica no Espaço – Tratamento vetorial de Gonçalves, 1978, o termo “problemas” aparece em dois momentos: no capítulo 5, de título “Problemas sobre planos e retas” em que são discutidas as formas de encontrar equações de planos e retas a partir de condições dadas. Ou seja, Gonçalves (1978) considera “Problemas” como um termo indicativo de explicar conteúdo. De forma análoga, Silveira (1968) toma o uso da expressão “problemas” para explicar conteúdos como os capítulos de títulos “Problemas Métricos – Distância e Ângulos” e “Problemas sobre a circunferência do círculo”.

Atribuímos como finalidades de exercícios e problemas identificados: estímulo para os alunos assimilarem os conceitos, definições e terminologias, como também, desenvolverem o espírito de rigor nas demonstrações (principalmente na obra de Alencar Filho nas listas

“Problemas para resolver”), e por fim, exercícios de verificações de equações e aplicações de fórmulas.

Estas análises permitiram levantar algumas questões para compor a investigação: a presença do tratamento algébrico em diversos momentos poderia se justificar pela dificuldade de representação no espaço? Pois a álgebra permite utilizar procedimentos de forma mais padronizada e, talvez por isso, parecesse ao professor/autor um campo mais seguro.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

Esta pesquisa assumiu como objetivo investigar como se configura a Geometria Analítica (GA) em livros para o ensino superior nas décadas de 1960 e 1970, a partir de obras específicas desse assunto produzidas por autores brasileiros com circulação no contexto da UFJF. A História Cultural, como referencial teórico, auxiliou no processo de análise das fontes para compreender e produzir uma representação sobre esse ensino.

Retomando uma de nossas questões norteadoras: qual a Geometria Analítica sistematizada em exemplares de autores brasileiros das décadas de 1960 e 1970 para o ensino em nível superior?

Constatamos que, nas obras analisadas, levando em conta livros presentes nas bibliotecas da UFJF, cada uma apresenta uma proposta de ensino de GA própria. O livro de Alencar Filho (1964) propõe uma GA plana caracterizada pelo tratamento algébrico com poucas representações gráficas; Silveira (1968) também trabalha a GA plana, mas diferente de Filho, aborda vetorialmente e incentiva a visualização geométrica dos conceitos.

Novais (1973) discute a GA plana com tratamento vetorial e alguns tópicos da GA espacial, como superfícies de revolução e quádricas. A autora mobiliza a linguagem da Teoria de Conjuntos para o ensino de GA ao definir conceitos utilizando termos como “correspondência biunívoca entre conjuntos”. No entanto, ela não se apoia tanto em representações gráficas. E, Gonçalves (1978), nas suas duas obras, estimula uma GA com tratamento vetorial e com bastante uso de representações gráficas para a visão geométrica.

Sendo assim, nas décadas de 1960 e 1970, tomando como base as obras analisadas, a GA no ensino superior contemplava tanto a perspectiva plana, quanto a espacial.

Em relação a nossa segunda questão norteadora: quais motivações e referências marcaram a produção dessas obras?

Entendemos aqui motivações e referências tanto do contexto da época (autores de outros exemplares, outros professores) quanto da própria prática docente de cada autor. Nas obras analisadas, as principais referências ou motivações que notamos são em relação ao contexto em que foram produzidas. Com exceção do livro de Edgard de Alencar Filho, os demais foram produzidos a partir de necessidades que surgiram para cada autor.

A autora Maria Helena Novais registrou no prefácio que o exemplar contemplava o programa da disciplina Geometria Analítica na UFPE; embora não tenhamos a confirmação que ela foi professora de GA nessa universidade, fica colocada a hipótese dada a especificidade de a proposta atender ao programa da disciplina.

O autor Zózimo Menna Gonçalves atribuiu a produção de seus livros analisados neste trabalho ao conteúdo programático das “novas” disciplinas que surgiram no Instituto de Matemática da UFF, onde ele atuava como professor. Informação descrita pelo próprio autor no prefácio de um dos exemplares. Assim, sua principal motivação para desenvolver estas obras parece decorrer da necessidade de atender uma demanda: suporte a uma disciplina universitária recém-criada ou reformulada.

O autor Hélio Siqueira Silveira foi comprovadamente professor de Geometria Analítica na UFJF, conforme Soares (2013), que inferiu que Silveira foi referência no ensino da disciplina, produzindo notas de aulas utilizadas inclusive como indicações bibliográficas na ementa da disciplina durante longo período na instituição. Suas notas de aula se tornaram apostilas e, como consequência, uma das apostilas se tornou o livro que analisamos aqui.

Dessa maneira, atribuímos como uma referência para Silveira (1968) a sua prática docente e experiência com o ensino de GA constatada também pelo autor do prefácio de seu livro, o professor e autor de livros Roberto Peixoto.

Nossa terceira e última questão norteadora: quais saberes são sistematizados para o ensino de GA neste período?

Identificamos como indícios de saberes a ensinar geometria analítica nas décadas de 1960 e 1970: o uso da linguagem da teoria de conjuntos, o tratamento vetorial no plano e no espaço, o tratamento algébrico, o uso de conceitos da trigonometria e da geometria euclidiana

plana e espacial. E, como saberes para ensinar, a organização didática predominante composta por apresentação da teoria, exemplos e exercícios. Conforme nosso referencial teórico-metodológico, sistematizamos esses conceitos como saberes a e para ensinar Geometria Analítica no superior nas obras analisadas.

Entendemos que as questões norteadoras corroboram com a representação histórica do ensino de Geometria Analítica nas décadas de 1960 e 1970, pois compreendemos como cada obra foi elaborada, levando em conta o contexto histórico da época, quais finalidades pretendidas, além de refletir sobre a formação e atuação dos autores, nos permite concluir que o ensino de GA no recorte temporal detalhado, apresenta maior ênfase na GA plana, utilizando tanto a linguagem algébrica quanto vetorial, e com pouco destaque para um tratamento mais geométrico (construções geométricas) em algumas obras.

Algumas questões podem surgir quando consideramos os conceitos da História Cultural. Por exemplo, observamos como cada obra trata a definição de vetor. Será que, nas obras em que o vetor não é definido ou pouco mencionado, o autor optou por não dar ênfase, considerando que o aluno já conhecia o assunto do ensino secundário? Para responder a esta questão, seria relevante analisar obras do ensino secundário do mesmo recorte temporal, a fim de colaborar inclusive com o projeto maior, que visa construir uma representação história do ensino de GA tanto em nível escolar quanto acadêmico.

A análise desses livros didáticos lança luz sobre as diversas abordagens adotadas por autores brasileiros na apresentação da Geometria Analítica para o ensino superior nas décadas de 1960 e 1970. Cada obra reflete as escolhas pedagógicas e metodológicas do autor, influenciadas por suas experiências de ensino e pelo contexto educacional da época. Esta pesquisa fornece contribuições sobre o desenvolvimento do ensino de Geometria Analítica no Brasil durante esse período, destacando a importância de fatores culturais, históricos e pedagógicos na formação do conhecimento matemático. Estudos futuros podem explorar o impacto desses livros didáticos no ensino e na aprendizagem da Geometria Analítica e sua relevância no contexto da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, E. **Elementos de Geometria Analítica Plana**. 2. ed. São Paulo: Livraria Nobel S. A, 1964.

BELTRAME, J. **Os programas de ensino de Matemática do Colégio Pedro II: 1837 – 1932**. 267f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2000.

CHARTIER, R. **A história cultural: entre práticas e representações**. Tradução de Maria Manuela Galhardo. 2. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1990.

CHOPPIN, A. O historiador e o livro escolar. **História da Educação**, Pelotas, v. 6, n. 11, p. 79- 109, 2002.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, p. 549-566, 2004.

GONÇALVES, Z. M. **Geometria Analítica Plana - Tratamento Vetorial**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, 1978.

GONÇALVES, Z. M. **Geometria Analítica no espaço - Tratamento Vetorial**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, 1978.

HOFSTETTER, R.; SCHNEUWLY, B. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. In: HOFSTETTER, R; VALENTE, W. (Org.). **Saberes em (trans) formação: tema central da formação de professores**. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

NOVAIS, M. H. **Cálculo Vetorial e Geometria Analítica**. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1973.

ORUÊ, G. R. V. **A trajetória escolar da Geometria Analítica no ensino secundário brasileiro: constituição e funcionamento em tempos da Reforma Francisco Campos, 1931-1942**. 186f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá. Maringá, PR, 2020.

PAULA, D. J. Geometria Analítica no ensino superior nas décadas de 1960 e 1970: análise de manuais de autores brasileiros. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 27., 2023, Vitória. **Anais...** Vitória, 2023. Disponível em: <<https://www.sbembrasil.org.br/ocs/index.php/EBRAPEM/EBRAPEM027/schedConf/presentations>>. Acesso em: 16 abr. 2025.

PAULA, D. J. **A Geometria Analítica em livros didáticos de autores brasileiros: circulação no contexto da UFJF nas décadas de 1960 e 1970**. 119f. Dissertação (Mestrado

Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, 2024.

ROQUE, T. **História da Matemática**: desfazendo mitos e lendas. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SILVEIRA, H. S. **Geometria Analítica Plana**. Juiz de Fora: Sociedade Propagadora Esdeva. (Publicação Universidade Federal de Juiz de Fora), 1968.

SOARES, S. R. **Um estudo histórico do ensino de geometria analítica no curso de matemática da UFJF nas décadas de 1960 e 1970**. 120f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, 2013.

VALENTE, W. R. Processos de investigação histórica da constituição do saber profissional do professor que ensina matemática. **Acta Scientiae**, v. 20, n.3, p. 377-385, 2018.

HISTÓRICO

Submetido: 30 de março de 2025.

Aprovado: 17 de junho de 2025.

Publicado: 01 de julho de 2025.