RIDEMA
Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática

O raciocínio proporcional: a 'pedra de topo' na formação de professores dos anos iniciais

Proportional reasoning: the top stone in teacher training in the early years

Silvia Rocha Falvo[1]
UNESP

Lourdes de la Rosa Onuchic[2]
UNESP

Célia Barros Nunes[3]
UNEB

RESUMO

Este artigo é fruto de uma pesquisa de Mestrado Acadêmico, de natureza qualitativa e descritiva, que buscou investigar o conhecimento que os professores têm do raciocínio proporcional e as potencialidades da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) na formação continuada de professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A questão que conduziu toda a pesquisa foi: "Como os professores se envolvem, em uma investigação sobre o raciocínio proporcional, fazendo uso da MEAAMaRP e o que isso revela sobre seus conhecimentos e capacidades?" Neste artigo, pretende-se analisar se os professores foram capazes de diferenciar o pensamento aditivo do pensamento multiplicativo em uma situação-problema que explorava os conceitos de razão, proporção e raciocínio proporcional através da Resolução de Problemas. Apesar das dificuldades em distinguir esses dois tipos de pensamento, os professores se engajaram ativamente no modelo metodológico de ensino-aprendizagem em sala de aula, demonstrando um forte desejo de utilizar problemas como ponto de partida e de desafiar seus alunos nesse trabalho. Além disso, os professores tiveram a oportunidade de dialogar com seus pares, o que possibilitou o compartilhamento de experiências e saberes, promovendo uma reflexão crítica sobre suas práticas pedagógicas.

Palavras-chave: Raciocínio proporcional; Pensamento Aditivo e Multiplicativo; Formação de professores; Anos iniciais; Resolução de Problemas.

[1] Mestra em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP/Rio Claro). Coordenadora Pedagógica do Colégio São Carlos, Rede de Educação Sacramentina; Psicopedagoga Clínica e Institucional: Clínicas Espaço Semear e Habilittare, São Carlos, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Bispo César Dacorso Filho, 300, bairro Vila Carmem, São Carlos, São Paulo, Brasil, CEP: 13575-331. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2426-1892. Lattes: http://lattes.cnpq.br/0238192782263740 . E-mail: silfalvo@gmail.com.

[2] Doutora em Matemática pelo Instituto de Ciências Matemática de São Carlos (USP). Professora Aposentada e voluntária da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP/Rio Claro), Rio Claro, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Machado de Assis, 302, Jardim Primavera, Santa Bárbara do Oeste, São Paulo, Brasil, CEP: 13451-000. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-7713-2157 Lattes: http://lattes.cnpq.br/8641323605322627. E-mail: lronuchic@gmail.com

[3] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP/Rio Claro). Professora Aposentada da Universidade do Estado da Bahia (UNEB/ DEDC X), Teixeira de Freitas, Bahia, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Carter, 190, bairro Jardim Caraípe, Teixeira de Freitas, Bahia, Brasil, CEP: 45990-720. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2151-6650 Lattes: http://lattes.cnpq.br/5885292919107897. E-mail: celiabns@gmail.com

ABSTRACT

This article is the result of a qualitative and descriptive Master's research project that sought to investigate teachers' knowledge of proportional reasoning and the potential of the Methodology for Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving (MEAAMaRP) in the continuing education of teachers who work in the early years of Elementary School. The question that guided the entire research was: "How do teachers engage in an investigation of proportional reasoning, using MEAAMaRP, and what does this reveal about their knowledge and capabilities?" This article aims to analyze whether teachers were able to differentiate additive thinking from multiplicative thinking in a problem situation that explored the concepts of ratio, proportion, and proportional reasoning through Problem Solving. Despite the difficulties in distinguishing between these two types of thinking, teachers actively engaged in the teaching-learning methodological model in the classroom, demonstrating a strong desire to use problems as a starting point and to challenge their students in this work. Furthermore, teachers had the opportunity to dialogue with their peers, which enabled the sharing of experiences and knowledge, promoting critical reflection on their pedagogical practices.

Keywords: Proportional Reasoning; Additive and Multiplicative Thinking; Teacher Training; Early Years; Problem Solving.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O raciocínio proporcional é considerado ‘a pedra de topo’ dos anos iniciais do Ensino Fundamental (LESH, POST, BEHR, 1988). Essa afirmação nos leva a refletir sobre a importância desse conhecimento, que se desenvolve ao longo do Ensino Fundamental e representa um dos níveis mais elevados de aprendizado nos primeiros anos escolares. Assim, como na construção de um edifício, onde cada pedra é cuidadosamente colocada sobre a outra, a formação de professores deve priorizar a valorização, o incentivo e a construção de conceitos, relações e saberes.

Para isso, é fundamental esclarecer o significado de termos como “construir” e “construção” no contexto do ensino de Matemática. Segundo o dicionário Michaelis, ‘construir’ significa:

> produzir ou criar um objeto de acordo com um projeto estrutural, servindo-se de variados materiais; dar estrutura a; estruturar, fabricar; [...] elaborar um trabalho de criação mental; conceber, criar, imaginar; organizar as ideias ou os pensamentos de modo a formar um todo coerente e articulado; arquitetar, dispor, estruturar um raciocínio ou produto da imaginação; criar passo a passo; organizar, planejar, preparar [...]. (Construir, 2022).

E, ‘construção’ significa (1) conjunto de atividades necessárias para se construir algo; (2) trabalho de organização e criação de (algo); exemplo: ‘construção’ de uma sociedade mais justa (Construir, 2022).

Esses significados ressaltam a importância de ‘criar’, ‘juntar materiais’, ‘erguer’, ‘edificar’, ‘produzir’ e ‘organizar pensamentos de maneira coesa’.

Este artigo é parte de uma pesquisa de mestrado acadêmico cujo objetivo foi investigar o conhecimento que os professores possuem sobre raciocínio proporcional e as potencialidades da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) na formação continuada de educadores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A pesquisa buscou responder à seguinte pergunta: "Como os professores se envolvem em uma investigação sobre raciocínio proporcional, utilizando a MEAAMaRP, e o que isso revela sobre seus conhecimentos e habilidades?"

Assim, a estrutura deste artigo se baseia no curso de extensão, visando analisar se os professores conseguiram diferenciar o pensamento aditivo do pensamento multiplicativo em situações-problema que exploravam os conceitos de razão e proporção através da Resolução de Problemas.

Dessa forma, o artigo aborda ideias sobre pensamento aditivo, pensamento multiplicativo e raciocínio proporcional, além de discutir como a Resolução de Problemas, especialmente a MEAAMaRP, pode potencializar esses conceitos, com ênfase na estruturação do curso de formação continuada, seus resultados e considerações finais.

PROPORCIONALIDADE E RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

No contexto escolar, o raciocínio proporcional é considerado um dos aspectos mais relevantes na aprendizagem da Aritmética, servindo como base para conceitos matemáticos mais complexos que envolvem proporção e proporcionalidade. Lesh, Post e Behr (1988) afirmam que esse raciocínio pode ser visto como o "culminar da matemática elementar" ou como o "alicerce da matemática avançada". Embora os psicólogos considerem o raciocínio proporcional uma aptidão global do conhecimento, a Educação Matemática reconhece que se trata de um desenvolvimento conceitual localizado, pelo qual as crianças alcançam raciocínios de ordem superior. Assim, ele é descrito como "um dos mais elementares conhecimentos de alto nível e um dos conhecimentos elementares de nível mais elevado" (Lesh; Post; Behr, 1988, p. 7, tradução). Esse raciocínio é uma capacidade que leva a criança do nível operacional concreto para o operacional formal (Piaget; Beth, 1966 apud Lesh; Post; Behr, 1988).

Segundo Costa (2007), é fundamental que os alunos sejam capazes de reconhecer situações proporcionais e não proporcionais, resolvendo tarefas de raciocínio proporcional de

10.34019/2594-4673.

naturezas quantitativa e qualitativa. Eles devem compreender que podem ser utilizados diversos métodos na resolução de problemas proporcionais e que esses métodos se inter-relacionam, além de não se deixarem influenciar apenas pelo contexto numérico durante a resolução de problemas.

Anos antes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destacar a proporcionalidade como uma ideia fundamental na Matemática, Cramer, Post e Currier (1993, p. 159) enfatizaram que "o fato de que muitos aspectos de nosso mundo operam de acordo com regras proporcionais torna as habilidades de raciocínio proporcional extremamente úteis na interpretação de fenômenos reais". Eles acrescentaram que "ser capaz de realizar operações mecânicas com proporção não significa que os estudantes compreendam as ideias subjacentes ao número proporcional". De fato, muitos indivíduos não desenvolvem esse raciocínio, e "um grande segmento de nossa sociedade nunca o adquire completamente" (Cramer, Post, Currier, 1993, p. 159), incluindo alguns "professores que ensinam Matemática", sobretudo professores dos Anos Iniciais.

A noção de proporcionalidade é um dos conteúdos que tem lugar de destaque nos documentos curriculares. Nesses documentos, a proporcionalidade é ressaltada como um conteúdo matemático que deve ser trabalhado em sala de aula, de modo a estabelecer conexões com outros conceitos matemáticos: razão, semelhança de triângulos, propriedades de figuras e também em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, na Física, na Química, na Geografia, na Arte, etc. Nesse sentido, destacamos, nos parágrafos a seguir, as recomendações dos documentos curriculares sobre a proporcionalidade.

Esse termo aparece na BNCC (Brasil, 2018) no 4º ano do Ensino Fundamental, dentro da Unidade Temática *Números*, no objeto de conhecimento que abrange *Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida.* A habilidade EF04MA06 destaca a importância de resolver e elaborar problemas que envolvam os significados da multiplicação, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos (Brasil, 2018, p. 289).

No 5º ano do Ensino Fundamental, dentro da Unidade Temática *Álgebra*, a BNCC aborda *Grandezas diretamente proporcionais e Problemas envolvendo a partição de um todo* *em duas partes proporcionais*, na habilidade EF05MA12, que envolve resolver problemas sobre a variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, como associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar quantidades de ingredientes em receitas e ampliar ou reduzir escalas em mapas (Brasil, 2018, p. 293).

A importância da proporcionalidade é também destacada na proposta curricular do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), dos Estados Unidos, ao afirmar que a proporcionalidade merece todo o tempo e esforço para garantir seu desenvolvimento. Afinal, "esse conceito permeia situações do dia a dia e modela diversos fenômenos de outras áreas do conhecimento" (NCTM, 1989, p. 82).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) também reforçam a importância desse tema. No terceiro ciclo, no item *Conceitos e Procedimentos*, recomenda-se trabalhar com a resolução de situações-problema "que envolvam a ideia de proporcionalidade, incluindo os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não convencionais" (BRASIL, 1998, p. 72). No quarto ciclo, no mesmo item, sugere-se que o aluno seja capaz de identificar a natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano.

E sobre o Raciocínio Proporcional? Alguns aspectos relevantes

O raciocínio proporcional é fundamental no ensino de Matemática e, geralmente, os currículos oficiais recomendam seu desenvolvimento a partir dos anos finais do Ensino Fundamental. Nesse nível de ensino, o raciocínio proporcional envolve relações matemáticas multiplicativas, ao contrário das relações aditivas que são mais utilizadas pelas crianças que estão na fase inicial da vida escolar.

Nessa etapa inicial, os alunos encontram dificuldade para compreender a relação multiplicativa presente nas situações proporcionais, uma vez que é necessária certa maturidade matemática para compreender a diferença entre adicionar e multiplicar. Uma possível explicação para as dificuldades enfrentadas pelos alunos pode estar na ênfase dada às relações aditivas nos primeiros anos da escolaridade.

A seguir, apresenta-se uma breve revisão teórica com o objetivo de caracterizar o raciocínio proporcional e sua relação com a resolução de problemas, uma vez que ele é considerado a pedra fundamental do currículo da Educação Básica e base para o pensamento algébrico. Além disso, o raciocínio proporcional favorece o desenvolvimento da habilidade de compreensão das relações multiplicativas, enquanto a maioria dos conceitos da Aritmética é de natureza aditiva (Nunes; Costa, 2016).

Ao definir raciocínio proporcional, Lamon (2012) corrobora com Lesh, Post e Behr (1988), afirmando que:

> Raciocínio proporcional refere-se a detectar, expressar, analisar, explicar e fornecer evidências que apoiem afirmações sobre relações proporcionais. A palavra raciocínio sugere ainda que usemos o senso comum, o bom senso e uma abordagem ponderada para a resolução de problemas, em vez de extrair números das palavras do problema e aplicar regras e operações mecanicamente. Tipicamente, não associamos raciocínio com o uso de regras dirigidas ou procedimentos mecanizados, mas sim com um processo mental de fluxo livre que exige análise consciente das relações entre quantidades (Lamon, 2012, p. 4).

Esse raciocínio "envolve o sentido de covariância, múltiplas comparações e a capacidade de processar mentalmente diversos conjuntos de informação" (Lesh, Post, Behr, 1988, p. 1, tradução). Dessa forma, segundo Costa (2012, p. 69), o raciocínio proporcional "implica a compreensão de uma relação multiplicativa constante entre duas grandezas (invariância) e a noção de que estas duas grandezas variam em conjunto (covariância)".

Entre as principais características do raciocínio proporcional está a relação entre expressões racionais, tais como a taxa, a razão, o quociente e a fração. Esse raciocínio relaciona-se com inferência e predição, envolvendo tanto o pensamento qualitativo quanto o quantitativo (Lesh, Post, Behr, 1988). Também engloba a habilidade de encontrar componentes ausentes em um problema, que não precisam ser necessariamente numéricos. No entanto, nem todas as pessoas que resolvem um problema de proporção utilizam raciocínio proporcional. Por isso, o raciocínio proporcional não pode ser entendido como sinônimo de proporcionalidade, mas como um pré-requisito essencial para a compreensão de contextos e aplicações.

Por pertencer ao campo conceitual das estruturas multiplicativas, segundo Vergnaud (1993 apud Soares, 2016), para desenvolver o raciocínio proporcional, o estudante precisa fazer a transição do raciocínio aditivo para o multiplicativo, o que nem sempre é um processo simples. Nunes (2010 apud Soares, 2016) afirma que os raciocínios aditivo e multiplicativo têm origens distintas: o aditivo envolve juntar, separar e trabalhar a correspondência um a um, enquanto o multiplicativo envolve distribuir, dividir e trabalhar a correspondência um a muitos.

Cramer, Post e Currier (1993) afirmaram que o raciocínio proporcional é um ponto crítico no desenvolvimento mental. Piaget, citado por Van de Walle (2006), destaca que esse tipo de raciocínio marca a transição do estágio operacional concreto para o formal. Por esse motivo, a proporcionalidade é conhecida como a 'pedra de topo' (Lesh, Post, Behr, 1988) dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A compreensão do raciocínio proporcional deve ir além da simples percepção de que dois lados de uma equação são iguais. Para Lesh, Post e Behr (1988, p. 9, tradução), "o reconhecimento de uma similaridade estrutural" é um pré-requisito essencial para se raciocinar proporcionalmente. Esses autores destacam que a Matemática é, essencialmente, o estudo da estrutura e da invariância, e não apenas a busca de uma incógnita ou de um valor desconhecido (Lesh, Post, Behr, 1988, p. 12, tradução).

É comum que crianças em estágios iniciais utilizem a adição para resolver problemas estruturados como AB = xD, um comportamento descrito na literatura como raciocínio proporcional aditivo (Lesh, Post, Behr, 1988). Contudo, esse termo é considerado incorreto, já que, embora o raciocínio aditivo emerja naturalmente, o raciocínio proporcional é essencialmente multiplicativo (Norton, 2005). Muitos dos erros cometidos pelos alunos em problemas proporcionais resultam da aplicação de processos aditivos ou subtrativos em vez de multiplicativos.

Van de Walle (2009) avalia que o raciocínio proporcional é um raciocínio formal, necessário para a abstração e fundamental para estabelecer conexões com outros ramos da Matemática. Cramer, Post e Currier (1993) reforçam que "pensar proporcionalmente" envolve a capacidade de resolver diversos tipos de problemas e requer: (a) conhecer as características das situações proporcionais; (b) compreender exemplos em contextos reais e matemáticos; (c) perceber a existência de múltiplos métodos para resolver atividades proporcionais; (d) saber resolver problemas de natureza quantitativa e qualitativa; (e) não ser influenciado pelo contexto numérico das atividades.

O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL E A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Pesquisas sobre o raciocínio proporcional (Tinoco, 1996; Costa, 2012; Silvestre, Ponte, 2013; Nunes, Costa, 2016) têm mostrado que há professores, sobretudo dos Anos Iniciais que apresentam dificuldades em ensinar o conteúdo proporcionalidade e a maneira que este deve ser ensinado nos ensinos fundamental e médio. Ainda, segundo os autores, geralmente, o conhecimento é limitado e, consequentemente, ensinam-no de forma mecânica e desconectada de outros conteúdos matemáticos.

Com o objetivo de superar essas dificuldades na abordagem de conceitos matemáticos, especialmente aqueles ligados à proporcionalidade e ao raciocínio proporcional, Allevato e Onuchic (2021) propõem a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) como uma estratégia eficaz para promover não apenas o ensino, mas também a aprendizagem significativa em sala de aula.

Nesta metodologia, o papel do professor se transforma: ele deixa de ser o centro da atividade matemática e assume a função de mediador do processo de construção do conhecimento. Ao incentivar a troca de ideias, demonstrar confiança e respeitar o ritmo de aprendizagem dos estudantes, o professor possibilita que os alunos avancem para novos saberes a partir de seus conhecimentos prévios.

Para que essa metodologia seja eficaz, é fundamental adotá-la com base em uma abordagem que valorize a autonomia e a criatividade do aluno. De acordo com Rodrigues e Nunes (2022, p. 258), essa perspectiva permite que o estudante "interfira no conteúdo apresentado, explore conceitos de modo informal para construir os formais, faça conexões, raciocine e comunique-se matematicamente". As autoras destacam que, ao aprender nesse contexto, os alunos desenvolvem a capacidade de compreender o significado dos conteúdos, aprimorando seu raciocínio lógico, suas habilidades de comunicação e, consequentemente, alcançando um nível mais avançado de compreensão matemática.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, criada por Onuchic em 1998 e atualizada por Allevato e Onuchic (2021), orienta o trabalho em sala de aula por meio de dez etapas estruturadas que visam

10.34019/2594-4673.

monitorar e acompanhar o desempenho dos alunos durante as atividades. São elas: (1) Elaboração e proposição do problema pelo professor; (2) Leitura individual do problema pelos alunos; (3) Leitura coletiva em pequenos grupos; (4) Resolução do problema pelos alunos em grupo; (5) Atuação do professor como observador, mediador e incentivador; (6) Registro das resoluções na lousa com mediação do professor após o tempo de resolução; (7) Plenária para discussão das soluções; (8) Busca do consenso entre os grupos; (9) Formalização do conteúdo aprendido; (10) Proposição, exploração e resolução de novos problemas, aprofundando os conceitos trabalhados.

Essas etapas estruturadas permitem uma aprendizagem mais ativa e reflexiva, estimulando os alunos a desenvolverem habilidades analíticas e a compreenderem os conceitos matemáticos de maneira mais profunda e significativa.

METODOLOGIA DA PESQUISA

O Contexto da pesquisa: lócus e sujeitos

A metodologia de pesquisa adotada neste trabalho é de natureza qualitativa, pois seu processo de condução busca compreender e interpretar o objeto de estudo a partir da interação entre o investigador e os sujeitos investigados. Nesse sentido, "os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas" (Bogdan; Biklen, 1994, p. 50).

A abordagem escolhida foi o estudo de caso, cujo propósito é conhecer o contexto e a realidade de um grupo específico de professores. O caso analisado refere-se aos professores da Rede Municipal de Itirapina, um grupo considerado atípico por suas características específicas. O grupo é composto por 60 professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, distribuídos em quatro escolas da Rede Municipal: duas de período integral, uma com três turnos (manhã, tarde e noite, incluindo a Educação de Jovens e Adultos – EJA – do ciclo 1) e uma com dois turnos (manhã e tarde). Entre esses profissionais, encontram-se professores polivalentes, professores assistentes e professores de Educação Especial. O critério inicial para a seleção dos participantes foi a disposição para participar do curso e, posteriormente, aplicar atividades de resolução de problemas com seus estudantes.

10.34019/2594-4673.

Com o objetivo de analisar se os professores participantes da pesquisa conseguiram diferenciar o pensamento aditivo do pensamento multiplicativo, foi proposta uma situação-problema que explorava esses conceitos, com a intenção de desenvolver, conjuntamente, o raciocínio proporcional. Para a coleta de dados, foi implementado e aplicado um curso de formação continuada aos professores da Rede Municipal de Itirapina, conduzido pela primeira autora deste artigo, conforme a descrição a seguir.

O Curso propriamente dito

O curso intitulado "O Raciocínio Proporcional e a Resolução de Problemas" teve como objetivo levantar os conhecimentos prévios sobre números racionais e suas diferentes abordagens, por meio da resolução de problemas, com professores dos anos iniciais (1º ao 5º ano). A formação foi realizada de forma online, na plataforma Google Meet, com duração total de 32 horas. Foram formadas duas turmas: a Turma A, composta por professores do 1º e 2º anos (25 participantes), e a Turma B, composta por professores do 3º, 4º e 5º anos (35 participantes). O curso contemplou as Unidades Temáticas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC): Números, Álgebra, Geometria, Medidas e Estatística, e foi dividido em 8 encontros de 2 horas cada, totalizando 16 horas síncronas. Esses encontros ocorreram durante o Horário de Trabalho Pedagógico Coletivo (HTPC), nas quintas-feiras, das 19h às 21h. Além disso, o curso incluiu 16 horas assíncronas, compostas por discussões, leituras, estudos e resolução de problemas. Também foram abordados a elaboração e proposição de problemas (Vale et al., 2015).

A formação continuada proposta seguiu um modelo de planejamento que envolvia, nos encontros com os professores, os seguintes momentos, detalhados a seguir:

- **Momento Deleite**: A leitura deleite é uma estratégia que visa proporcionar prazer ao professor-leitor, tanto pelo contato com textos literários quanto pela oportunidade de o professor se tornar um referencial ao praticar leitura em voz alta para seus alunos. Esse momento não se restringe a textos, mas também inclui imagens, reportagens, vídeos, entre outros.
- **Motivação**: Este momento, muitas vezes confundido com "mobilização", trazia um enfoque específico. Ele abordava a motivação da professora-pesquisadora (primeira

doi 10.34019/2594-4673.

autora deste trabalho) para o encontro e a abordagem do dia, com o objetivo de envolver os professores-alunos e transformar a motivação individual em motivação coletiva.

- **Problema do Dia**: Considerado o "problema-gerador", é o ponto de partida para o processo de construção de um novo conhecimento, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.
- **Para o Próximo Encontro**: Refere-se à 10ª etapa da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), e é o momento de aprofundamento da aprendizagem. Essa fase propõe atividades de elaboração de novos problemas, abrangendo sua proposição, exploração e resolução. Essas atividades caracterizaram os encontros assíncronos, com 2 horas semanais, totalizando 16 horas.
- **Autoavaliação**: Cada encontro incluía uma etapa de autoavaliação, destinada à reflexão do professor sobre sua própria prática. Os participantes recebiam um conjunto de perguntas para responder durante os encontros assíncronos, promovendo a autoavaliação contínua.

A dinâmica do Curso

Todos os encontros foram organizados junto aos professores e alunos participantes do curso, seguindo as dez etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), pois essa metodologia exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes em relação ao trabalho em sala de aula (Onuchic, Allevato, 2011).

As quatro primeiras etapas estão relacionadas à leitura e à compreensão do problema. Inicialmente, o problema gerador era apresentado aos professores e alunos, que eram convidados a lê-lo individualmente. Em seguida, a leitura era feita em conjunto. Caso nenhum professor apresentasse dúvidas, passava-se para a fase de exploração do problema. Nessa etapa, questionava-se a compreensão do enunciado, elaborando perguntas que despertavam a curiosidade de todos, sempre buscando ativar os conhecimentos prévios dos participantes.

A quinta e sexta etapas correspondem à resolução do problema. Os professores e alunos eram divididos em grupos menores. Para isso, diversas salas no Google Meet foram criadas, nas quais os grupos se dirigiam para resolver o problema. A divisão dos grupos foi feita utilizando diferentes estratégias: por ano (professores e alunos de 1º, 2º, 3º, 4º e 5º anos); por afinidade; por determinação da professora-pesquisadora; em ordem alfabética; ou considerando a diversidade de habilidades, como professores polivalentes, assistentes e profissionais de Educação Especial.

Considerando que poucos participantes se sentiam à vontade para usar o Jamboard, a professora-pesquisadora os incentivou a resolver o problema, tirar fotos e enviá-las para o grupo de WhatsApp. Essa foi uma tecnologia mais acessível e fácil de usar para eles. Enquanto estavam nos grupos menores, a formadora os observava, incentivava, esclarecia dúvidas e interagia com eles nas salas do Google Meet. Durante a resolução do problema, os professores e alunos dialogavam entre si, buscando comprovar suas conjecturas e soluções.

Após resolverem o problema, os professores e alunos enviavam suas soluções para o grupo de WhatsApp. Com as resoluções em mãos, retornavam à sala principal do Google Meet para a plenária e a busca pelo consenso (7ª e 8ª etapas). Nessa fase, os participantes apresentavam suas soluções ao problema.

Na nona etapa, a professora-pesquisadora formalizava os conceitos trabalhados. Esse momento surgia a partir das discussões geradas pelas soluções apresentadas pelos professores e alunos.

DISCUSSÃO E ANÁLISE DE DADOS

Para a discussão e análise dos resultados, este artigo foca, entre os momentos da dinâmica do curso realizado pelos professores, exclusivamente no momento denominado 'Problema do Dia', com o objetivo de seguir a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP). O problema escolhido foi o “da Carol e da Bia”, que visava explorar o pensamento aditivo e multiplicativo, bem como os conceitos de razão e proporção, com o intuito de realizar um estudo mais aprofundado dos conceitos de raciocínio proporcional e proporcionalidade em etapas subsequentes.

doi 10.34019/2594-4673.

Quadro 01 – O Problema da Carol e da Bia

Carol e Bia foram correr numa pista. As duas correm à mesma velocidade. Carol saiu primeiro. Quando completou sua sexta (6^a) volta, Bia completou a segunda (2^a) volta. Quando Bia completar a décima volta (10^a) volta, quantas voltas Carol terá dado?

Fonte: Falvo (2023)

Inicialmente, com o objetivo de conhecer melhor os professores-alunos, foi aplicada uma avaliação diagnóstica composta por 6 problemas e 2 perguntas subjetivas. O problema intitulado "da Carol e da Bia" estava entre os itens avaliados. A análise revelou que, dos 60 professores que estavam iniciando o curso, apenas 46 resolveram o problema. Desses 46, 19 acertaram e 27 erraram.

Após a conclusão do curso, foi realizada uma avaliação prognóstica, na qual os mesmos professores foram convidados a resolver novamente o mesmo problema, a fim de verificar se suas respostas haviam mudado. Desta vez, somente 37 professores resolveram o problema. Entre essas resoluções, 15 estavam corretas e 22 estavam erradas.

Como pode ser observado, estatisticamente, os resultados não apresentaram grandes diferenças, mantendo-se em torno de 41% de acertos e 59% de erros, respectivamente. Esses resultados são preocupantes, pois indicam que os professores não compreenderam completamente o problema, além de não apresentarem uma melhora significativa após o término do curso. Tal resultado, nos leva a refletir: como está a formação do professor? É uma formação rasa, inadequada? O que falta? Metodologias para se trabalhar em sala de aula? Sendo os professores atores fundamentais nos processos de ensino-aprendizagem da Matemática, faz-se necessária uma formação que lhes proporcione conhecer o conteúdo e metodologias diferenciadas e os façam perceber a importância do conhecimento “de” e “sobre” Matemática.

Acreditamos que os cursos de formação de professores de Matemática, devem também, entre outras coisas, aprofundar conhecimentos sobre as competências e os saberes dos professores no sentido de que poderão estar mais receptivos para a aprendizagem e para mudanças em suas concepções (Costa, 2012).

As resoluções do problema "da Carol e da Bia" entregues por esses professores foram apresentadas da seguinte forma:

- **Resolução A – correta**

  Ex: Como elas correm na mesma velocidade, mas Carol saiu antes e está 4 voltas na frente de Bia, quando Bia completar 10 voltas, Carol completará 14 voltas.

  Exemplo: Carol → 6ª volta

  Bia→2ªvolta

  6 – 2 = 4 voltas

  Assim, quando Bia completar a 10ª volta, Carol terá completado, 10 + 4 = 14 voltas ou estará na 14ª volta.

- **Resolução B – incorreta**

  Exemplo: Para cada 2 voltas dadas por Bia, 6 voltas são dadas por Carol. Para cada 10 voltas dadas por Bia, 30 voltas são dadas por Carol.

  Ou seja,

  De 2 em 2 até 10, são 5 vezes

  E de 6 em 6 até 30, também são 5 vezes.

  Assim:

  Carol → Bia

  6 - 2

  x - 10

  2x = 60

  x = 30 voltas

A resolução errônea, por parte dos professores (em uma média de 59%), evidencia que a aplicação do conceito de proporcionalidade por parte do professor nas escolas se restringe quase que exclusivamente a utilização de regra de três simples, baseando-se apenas nas propriedades de razões equivalentes. Percebe-se uma falta de compreensão sobre a diferença entre razões e proporções, que envolvem comparações multiplicativas e não aditivas. Uma possível indicação da causa das dificuldades apresentadas pelos alunos para compreender a relação multiplicativa das situações proporcionais pode estar na ênfase dada às relações aditivas nos primeiros anos da escolaridade (Lamon, 2005). Reforçam Nunes e Costa (2016) que nessa fase é muito difícil para os alunos, compreenderem essa relação multiplicativa das situações proporcionais, uma vez que é necessária certa maturidade matemática para compreender a diferença entre adicionar e multiplicar.

Isso reforça a importância de desenvolver o raciocínio proporcional nos alunos desde os anos iniciais, um papel fundamental do professor. Cabe a ele fomentar essa habilidade, propondo problemas geradores que envolvam os conceitos de razão e proporção, além de mostrar os contextos nos quais essas ideias se aplicam (Van De Walle, 2009). Assim, os alunos serão capazes de compreender o significado do raciocínio proporcional.

A partir dessas resoluções, pudemos observar que:

a) Alguns professores não conseguiram perceber que o problema não envolvia proporção e, portanto, não se tratava de uma regra de três simples;

b) Alguns professores não perceberam que o problema não exigia um pensamento multiplicativo;

c) Alguns professores generalizaram e assumiram que, sempre que três informações são fornecidas e uma quarta é necessária, o problema envolve valor omisso, como exemplificado na resolução B;

d) Quando adquirimos um conhecimento novo, mais sofisticado ou complexo, tendemos a utilizá-lo, deixando de lado o conhecimento anterior, mais simples. Um exemplo comum disso é quando a criança aprende a multiplicação; a partir desse momento, raramente recorre à adição para resolver problemas. O mesmo ocorre com alunos do 7º ano, por exemplo, que, ao aprenderem sistemas de equações com duas incógnitas, deixam de utilizar equações simples;

e) Problemas desse tipo não confundem apenas os alunos, mas também os próprios professores.

Verificamos ainda que alguns professores nem sequer tentaram resolver o problema, alegando que não sabiam como fazer, por não dominarem o conteúdo da "matemática mais difícil" do 4º e 5º ano. Chegaram a afirmar: “inclusive, não assumimos os alunos dos anos maiores dos anos iniciais por esse motivo”. Deixavam claro que se sentiam seguros apenas para “ensinar” a matemática dos anos iniciais (principalmente o 1º e 2º ano). Nas falas dos professores, também foi possível observar que aqueles que assumiam a matemática do 5º ano eram mais respeitados, como se fossem considerados os mais "inteligentes" do grupo, e a eles era solicitado que assumissem as "tarefas" mais difíceis.

Essas falas nos remetem a uma questão culturalmente persistente em nosso país: a ideia de que o conhecimento matemático é algo exclusivo, reservado a poucos, e que apenas alguns privilegiados são capazes de compreender a matemática. Como ressaltam Nunes, Reis e Bichara (2014, p. 43), "vencer essa problemática se torna ainda mais difícil quando possíveis professores dos Anos Iniciais afirmam não terem conhecimentos matemáticos suficientes para ensinarem a disciplina".

Essas observações nos levam à conclusão de que, ser capaz de realizar operações mecânicas com proporções não significa que os estudantes compreendam as ideias subjacentes ao conceito de número proporcional (Cramer, Post, Currier, 1993). Além disso, ensinar proporção apenas por meio do método cruzado não contribui em nada para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Apesar de ser amplamente utilizado tanto por professores quanto por alunos, esse método é mal compreendido e, muitas vezes, serve mais para evitar o desenvolvimento do raciocínio proporcional do que para favorecê-lo (Falvo; Jucá, 2022).

Dessa forma, sugerimos que, nas formações para professores, o formador explore problemas que abordem essa temática, com o objetivo de diferenciá-los no que se refere ao pensamento aditivo e multiplicativo. Também é fundamental que se trabalhe a compreensão de que não há raciocínio proporcional sem pensamento multiplicativo e que problemas como este, especificamente, não tratam efetivamente do raciocínio proporcional.

Esse é mais um fator indicativo de que desenvolver a capacidade de raciocinar proporcionalmente é importante para os alunos, desde os anos iniciais. Assim, ao explorar o raciocínio proporcional, contribui-se para que os alunos estabeleçam relações entre a matemática e situações do cotidiano fora da escola, ao calcular as compras, ao identificar investimentos mais lucrativos, ao explorar desenhos e mapas, ao executar medições, ao converter moedas ou ajustar uma simples receita de bolo ao número de convidados de uma festa.

No entanto, apesar de terem sido oferecidas 32 horas de curso, esse tempo não foi suficiente para que conceitos tão profundos fossem adequadamente explorados, formalizados e apreendidos pelos professores.

Ao buscar trabalhar em sala de aula com a dinâmica da MEAAMaRP, sugerimos trazer para os alunos problemas (problemas geradores) que conceituem razão, proporção e proporcionalidade de forma, se possível, experimental, intuitiva e informal, para, posteriormente, formalizar o conteúdo com os alunos.

Reconhecendo a relevância deste estudo de caso, ficou claro também que as investigações de caráter interpretativo exigem criatividade e flexibilidade (Vale, Pimentel, Barbosa, 2015). Portanto, a coleta de dados procurou ser bastante diversificada, pois havia muitas variáveis a serem analisadas e questões a serem levantadas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando a importância do raciocínio proporcional para a Matemática e para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas que vão além da mera aplicação mecânica de fórmulas, ele foi utilizado como um dos pilares fundamentais para a construção desta pesquisa, funcionando de maneira análoga ao cimento, à areia e à cal em uma obra de construção civil. Enquanto se buscava construir o raciocínio proporcional como o resultado concreto deste trabalho, ele também foi utilizado como um dos insumos essenciais para sua edificação (Falvo, 2023).

Dessa forma, o foco deste estudo foi a formação continuada de professores atuantes nos anos iniciais do Ensino Fundamental com a finalidade de modificar suas práticas pedagógicas, levando-os a reconhecer as potencialidades da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP), promovendo uma transformação no ambiente em que desempenham suas atividades profissionais. Nesse sentido, Onuchic (1999) esclarece que

> "[...] nenhuma intervenção no processo de aprendizagem pode fazer mais diferença que um professor bem formado", acrescentando que "[...] investir na qualidade de ensino é o que mais importa.", pois ninguém "tem tanta influência sobre os alunos quanto os próprios professores" (Onuchic, 1999, p. 211).

Por isso, é fundamental trabalhar de maneira contínua com os professores, pois são eles os responsáveis pela construção do raciocínio e pela edificação do conhecimento dos alunos. Existem boas razões para se empenhar nesse esforço: "[...] é gostoso! Professores que experimentam ensinar dessa maneira nunca voltam a ensinar do modo 'ensinar dizendo". (Falvo, 2023, p. 71).

Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática
Juiz de Fora, v. 9, n. 1, p. 1-20, Jan. – Dez., e-ISSN: 2594-4673, 2025
doi 10.34019/2594-4673.

Acreditamos que as experiências estruturadas neste estudo podem contribuir significativamente para que os professores reavaliem suas posturas em relação à Resolução de Problemas no contexto do ensino-aprendizagem, além de entenderem a importância de adotá-la como um eixo central nas atividades matemáticas em sala de aula de modo que os alunos se envolvam com atividades investigativas, diversificadas e significativas e que promovam o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Um caminho a ser seguido e, por esta pesquisa sugerido, é a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP). Tornou-se veículo para ensinar a partir da resolução de problemas; que podem ser problemas quaisquer, de qualquer área e de qualquer disciplina. Essa metodologia pede uma formação longa, colaborativa e reflexiva para os professores e isso deve ocorrer nos cursos de formação inicial e/ou continuada de professores.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. de la R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Org.). **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco, 2021, p. 40-62.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEB, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998. 148p.

CONSTRUIR. In: **MICHAELIS Moderno Dicionário da Língua Portuguesa**. São Paulo: Melhoramentos. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/busca?id=oLwX>. Acesso em: 01 out. 2022.

COSTA, M.S. **Ensino-aprendizagem-avaliação de proporcionalidade através da resolução de problemas:** uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de Matemática. 2012. 292 p.: Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, 2012.

COSTA, S. C. H. C. **O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do ensino básico**. 2007. Dissertação (Mestrado) - Universidade de Lisboa. Faculdade de Ciências. Departamento de Educação. Especialidade de Didáctica da Matemática, 2007.

CRAMER, K.; POST, T.; CURRIER, S. Learning and Teaching ratio and proportion: research implications. In: OWENS, D.T. (Ed.) **Research ideas for the classroom**: middle grades mathematics. New York: Macmillan, 1993. p. 159-178.

FALVO, S. R.; JUCÁ, R. S. O raciocínio proporcional através da resolução de problemas: uma experiência de formação com professores que atuam nos Anos Iniciais. **Revista com a palavra, o professor.** Vitória da Conquista (BA), v. 7, n.1 8, p. 135-152, maio/ago. 2022. Disponível em: http://revista.geem.mat.br/index.php/CPP/issue/view/39 Acesso em: 22 out. 2024.

FALVO. S. R.; **A 'Pedra de Topo' e a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas**: Instrumentos de Formação Continuada para Professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Rio Claro, 2023. 140 p. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2023.

KIEREN, T. E. The rational number construct – its elements and mechanisms. In: KIEREN, T. E., (ed.) **Recent Research on Number Learning**. Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125- 150.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding** (2nd ed). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

LAMON, S. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3thed. New York: Routledge, 2012.

LESH, R., POST, T., BEHR, M. Proportional reasoning. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Eds.) **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93-118.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATHEMATICS (NCTM). **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, VA: Author, 1989.

NORTON, S. J. The construction of proportional reasoning. In: CHICK, H. L.; VINCENT, J. L. (Eds.). **Proceedings of 29th. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Melbourne: PME, 2005. v. 4. p. 17-24.

NUNES, C. B.; COSTA, M. S. O Raciocínio Proporcional e a Resolução de Problemas na Formação Inicial de (futuros) Professores de Matemática. **REMATEC**, Belém, v. 11, n. 21, 2016. Disponível em: https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/281. Acesso em: 26 de fev. 2025.

NUNES, C. B.; REIS, M. J. E.; BICHARA, J. P.; Ensino da matemática no currículo do curso de pedagogia: implicações na formação profissional. **RPEM**, Campo Mourão, Pr, v.3, n.5, jul.-dez. 2014. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/issue/view/304. Acesso em: 10 set. 2024.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Revista **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

RODRIGUES, S. A. M; NUNES, C. B. Resolução e Elaboração/Formulação de Problemas: uma experiência didática no 6º ano do Ensino Fundamental II. **Revista com a palavra, o professor.** Vitória da Conquista (BA), v.7, n. 18, p. 255-278, maio/ago. 2022. Disponível em: http://revista.geem.mat.br/index.php/CPP/issue/view/39 Acesso em: 18 out. 2024.

SILVESTRE, A.; PONTE, J. P. Raciocínio proporcional: uma perspectiva atual. Educação e Matemática: **Revista da Associação de Professores de Matemática**, n. 123, maio/jun 2013.

SOARES, M.A.S. **Proporcionalidade um Conceito Formador e Unificador da Matemática**: uma análise de materiais que expressam fases do currículo da educação básica. 2016. 250 p. Tese (Doutorado em Educação nas Ciências). Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, RS. 2016.

TINOCO, L. A. A. (Coord.) **Razões e Proporções.** Instituto de Matemática / UFRJ –Projeto Fundão –SPEC/PADCT/CAPES -Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A. Ensinar Matemática com resolução de problemas. **Quadrante**, Vol. XXIV, no. 2, p. 39-60, out. 2015.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERGNAUD, G. Pourquoi la théorie des champs conceptuels? **Infancia y Aprendizaje**, v. 36, n. 2, p. 131-161, 2013.

HISTÓRICO

Submetido: 27 de novembro de 2024.
Aprovado: 30 de março de 2025.
Publicado: 08 de abril de 2025.