



Engenharia didática como metodologia de pesquisa e ensino com o uso de jogos envolvendo números fracionários

Didactical Engineering as a Research and Teaching Methodology Using Games Involving Fractional Numbers

Raimunda Oliveira¹

Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal

Érica Santana Silveira Nery²

Universidade Federal de Sergipe

Márcia Rodrigues Leal³

Universidade de Brasília

Regina da Silva Pina Neves⁴

Universidade de Brasília

RESUMO

Este artigo tem por objetivo analisar a Engenharia Didática, enquanto metodologia de pesquisa e de ensino no contexto dos Números Racionais no desenvolvimento de um recurso lúdico. Este estudo foi desenvolvido em quatro fases consecutivas, a saber: análise preliminar, a qual contempla um estudo epistemológico dos Números Racionais na forma fracionária; concepção e análise *a priori* da engenharia do jogo “Montando Obra de Arte”; experimentação, realizada inicialmente em escolas públicas com 45 estudantes dos 2º ao 4º anos e, com 20 estudantes dos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental do Distrito Federal; como quarta fase, análise e avaliação *a posteriori*, na qual realizamos a confrontação dos dados coletados com as análises *a priori* que foram realizadas (ARTIGUE, 1995). Constatamos que a ausência de proposição de situações de composição com números fracionários de proporções maiores que um inteiro limita a percepção desses números como quantidades,

¹ Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB). Professora da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF), Brasil. Endereço para correspondência: QNN 24 Conjunto N casa 49, Ceilândia, Distrito Federal, 72.220-250. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3052-5292>. Lattes: <https://lattes.cnpq.br/5282744223752083>. E-mail: raioliveiramat@gmail.com.

² Doutora em Educação pela Universidade de Brasília (UnB). Professora adjunta do Departamento de Matemática - Campus Prof. Alberto Carvalho (DMAI) da Universidade Federal de Sergipe (UFS), Itabaiana, Sergipe, Brasil. Endereço para correspondência: Avenida Vereador Olímpio Grande, s/n, Porto, Itabaiana, Sergipe, 49500-000. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0571-1560>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/3811023262038979>. E-mail: erica.nery@academico.ufs.br.

³ Doutora em Educação pela Universidade de Brasília (UnB). É membro dos grupos de pesquisa: Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM) e Pesquisa e Investigação em Educação Matemática (PI), associados ao Departamento de Matemática da UnB, Brasília, Brasil. Endereço para correspondência: SQN 316, Bloco J, Apto 606, Residencial Acapulco, Asa Norte, Brasília, Distrito Federal, Brasil, 70775-100. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4307-802X>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4078490199054257>. E-mail: marcialeal629@gmail.com.

⁴ Doutora em Psicologia pela Universidade de Brasília. Professora do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. Brasil. Endereço para correspondência: Quadra 107, lote 08, edifício park Boulevard, bloco A, apartamento 201, Águas Claras, Distrito Federal, 71.920.540. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7952-96654>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5874654544324539>. E-mail: reginapina@mat.unb.br.

enquanto obstáculo didático-epistemológico no estudo dos Números Racionais. Além disso, a Engenharia Didática no contexto da pesquisa apresentou potencialidades para o desenvolvimento de um processo cíclico de investigação, fazendo-se retroalimentações para pensar e repensar o jogo a partir do contexto da experimentação que estava sendo vivenciada e das análises que estavam sendo realizadas. No que se refere ao contexto do ensino, esta metodologia propiciou a construção de orientações didático-pedagógicas que podem ser acessadas por professores que ensinam Matemática e que poderão lhes orientar quanto às realizações didáticas com a utilização do jogo “Montando Obra de Arte”.

Palavras-chave: Engenharia Didática; Números fracionários; Jogos matemáticos; Ludicidade; Aprendizagem Matemática.

ABSTRACT

This article aims to analyze Didactical Engineering as a research and teaching methodology in the context of Rational Numbers through the development of a playful resource. This study was conducted in four consecutive phases, namely: preliminary analysis, which includes an epistemological study of Rational Numbers in fractional form; conception and a priori analysis of the engineering of the game "Assembling a Work of Art"; experimentation, initially conducted in public schools with 45 students from 2nd to 4th grades and 20 students from 6th and 7th grades of Elementary School in the Federal District; as the fourth phase, a posteriori analysis and evaluation, in which we confronted the collected data with the a priori analyses that were conducted (ARTIGUE, 1995). We found the absence of propositions of situations involving the counting of fractional numbers composing values greater than one whole as an epistemological obstacle in the study of Rational Numbers. Additionally, Didactical Engineering in the context of research showed potential for the development of a cyclical investigation process, allowing for feedback loops to think and rethink the game based on the context of the experimentation being experienced and the analyses being carried out. Regarding the teaching context, this methodology provided the construction of didactic-pedagogical guidelines that can be accessed by teachers who teach Mathematics and that can guide them in their didactic practices using the game "Assembling a Work of Art."

Keywords: Didactical Engineering; Fractional Numbers; Mathematical Games; Playfulness; Mathematical Learning.

INTRODUÇÃO

A Didática da Matemática teve a sua gênese em 1970 na França, em um contexto marcado pela reforma no ensino da Matemática, mais conhecido como Movimento da Matemática Moderna, que buscou estabelecer uma aproximação entre a matemática da Educação Básica e a matemática do Ensino Superior (Valente, 2021). Este movimento não obteve o sucesso que se esperava, entretanto, ocasionou um aumento significativo das pesquisas sobre o ensino de Matemática e incentivou a criação de teorias que se preocupavam com o aspecto didático nos processos de ensino e aprendizagem desta área do conhecimento, dentre estas teorias, encontra-se a Engenharia Didática com os estudos de Artigue (1998).

A Engenharia Didática possui as suas raízes teóricas na teoria da epistemologia genética de Jean Piaget e investiga os fatores que podem influenciar nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática e, para isto, leva em consideração os diferentes componentes didáticos, como: o estudante, o professor, o saber e, mais do que isto, o sistema

educativo a partir dos programas, currículos, materiais pedagógicos, livros didáticos, conteúdo institucionalmente aceito, bem como as suas interrelações considerando-as enquanto complexas e multifacetadas (Artigue, 1995).

A Engenharia Didática, vista como metodologia de pesquisa, pode ser caracterizada como experimental, com quatro fundamentos básicos nas análises das realizações didáticas desenvolvidas em sala de aula, a saber: análise preliminar, análise *a priori*, experimentação e análise e avaliação *a posteriori* (Artigue, 1995). Tais processos permitem realizar experimentações e validações internas, pois propicia a confrontação dos dados que foram construídos ao longo das diferentes análises.

No contexto do ensino a Engenharia Didática compreende, segundo Douady (1993) uma sequência de aulas organizadas e concebidas em um determinado tempo, de forma coerente por um professor para um determinado público de estudantes, objetivando o desenvolvimento de um projeto de aprendizagem que é construído e retroalimentado pela relação didática estabelecida entre o aluno e o professor. Assim, a Engenharia Didática parte de um quadro teórico geral estruturado em torno de um sistema de informações que considera três dimensões: epistemológica (objetos de conhecimento), cognitiva (processos mentais hipotetizados juntos ao público) e didática (funcionamento do sistema de ensino) e perpassa por algumas indagações formuladas e realizar experimentações (Artigue, 1995).

A partir desse quadro teórico é que este artigo objetiva analisar a utilização da Engenharia Didática, enquanto metodologia de pesquisa e de ensino no contexto dos Números Racionais, a partir do desenvolvimento de um jogo. O jogo utilizado no contexto do ensino foi nomeado por “Montando Obra de Arte”, destinado ao ensino dos números racionais na representação fracionária junto a estudantes do Ensino Fundamental. A proposta deste jogo, principalmente o seu *layout*, inspirou-se no quadro: *Composição com vermelho, amarelo e azul* (1921) de Piet Mondrian, pintor holandês que apresenta relações proporcionais com as cores que dão nome à produção.

Os conceitos matemáticos presentes no jogo compreendem o significado de fração na relação parte-todo, a partir de suas peças que compõem quatro inteiros, demarcados em faixas assinaladas no tabuleiro que simula um quadro. A manipulação de suas peças proporciona o estabelecimento de noções iniciais de equivalências, relações de proporcionalidade e

contagem de frações de décimos e inteiros. Os registos realizados em algumas fases do jogo estimulam a relação de diferentes representações do número racional positivo.

A construção desse jogo foi uma das ações de um projeto de pesquisa realizado por uma equipe multidisciplinar composta por professores e pesquisadores com formação em Matemática, Pedagogia, Psicologia, Programação e Design, além de licenciandos(as) e pós-graduandos(as). Dentre os resultados, destacam-se a elaboração e disponibilização de seis jogos físicos e três jogos digitais voltados para o ensino e aprendizagem de Números Racionais, de orientações pedagógicas e de como jogar.

A definição do objeto de conhecimento matemático abordado no projeto fundamentou-se nas experiências docentes e de pesquisas, dos membros do projeto, os quais têm identificado dificuldades no processo de ensino e aprendizagem dos Números Racionais. Ademais, ao analisarmos os dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP (2022, 2023) responsável pelas avaliações de larga escala promovidas pelo Ministério da Educação - MEC, foi possível identificarmos que quase 70% dos estudantes avaliados ao final do Ensino Fundamental, têm desempenho abaixo do esperado em Matemática, apresentando maiores dificuldades em questões que envolvem operações com Números Racionais. Ressalta-se que o desempenho teve variação considerável nas edições analisadas.

Destarte, organizamos este texto em cinco seções além da presente introdução, na qual, contextualizamos o desenvolvimento do presente estudo e explicitamos o objetivo geral. Assim, na primeira seção, apresentamos aspectos sobre o uso de jogos no processo de avaliação da aprendizagem Matemática perante a conhecimentos prévios dos alunos; na segunda seção, exibimos um estudo epistemológico do conceito de Números Racionais, explicitando os principais obstáculos epistemológicos; na seção seguinte, tecemos sobre a Engenharia Didática enquanto metodologia de ensino e de pesquisa; na quarta seção, expomos as análises dos dados, tendo como fundamentação teórico-metodológica a Engenharia Didática e o jogo “Montando Obra de Arte”; por fim, expressamos as nossas considerações finais.

O uso de jogos nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática

Quando refletimos sobre o uso dos jogos no processo de aprendizagem, temos ciência que cada estudante possui uma maneira distinta de pensar e interpretar as diversas situações vivenciadas em seu cotidiano. Por outro lado, faz-se necessário que o professor possa compreender e respeitar essas individualidades, valorizar o conhecimento informal e as experiências que cada um possui, ressignificar o erro, tendo em vista que este pode se constituir em uma ferramenta de aprendizagem (Santos, 2014).

Para Muniz (2010), pensar no jogo como um recurso didático pedagógico, pode favorecer um esforço cognitivo em torno de um conceito matemático e isto, contribuir para a construção de um ambiente favorável ao desenvolvimento da aprendizagem fundamentada na ludicidade. Tais aspectos, podem propiciar que os estudantes coloquem em ação conhecimentos matemáticos e não matemáticos, por meio de elaborações mentais mais amplas, que evoquem o empoderamento intelectual e emocional (Muniz, 2010).

Reconhecemos que por meio dos jogos, os estudantes conseguem entender melhor alguns conceitos, descobrir regularidades e possibilidades numa situação-problema, que pode ser matemática ou não, bem como, podem estimular a concentração, além de promover oportunidades dentro dos ambientes escolares. Entendemos a partir de Antunes (2012) que:

[...] os jogos ou brinquedos didáticos são desenvolvidos com a intenção explícita de provocar uma aprendizagem significativa, estimular a construção de um novo conhecimento e, principalmente, despertar o desenvolvimento de uma habilidade operatória (Antunes, 2012, p.38).

Nesse entendimento, percebe-se que os jogos, quando utilizados com fins pedagógicos, podem contribuir tanto no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes, quanto no desenvolvimento de habilidades, isto desde o desenvolvimento infantil, tendo em vista que segundo Cavalcanti (2011, p. 27) por meio “do jogo, o professor utiliza-se de um artifício lúdico, e tem a possibilidade de uma real interação com seus alunos, o que permite conduzi-los a uma autonomia intelectual e moral”.

Assim, “o ambiente é a sala de aula, o instrumento é o jogo e a investigação surge da necessidade de compreensão dos aspectos envolvidos na utilização deste instrumento no processo ensino-aprendizagem da Matemática” (Grando, 2000, p. 17). Desse modo, o jogo vem compor um processo didático, no qual encontra-se o professor, o estudante, o saber

matemático e o jogo entram em cena como um recurso didático pedagógico que pode propiciar tanto a aprendizagem de novos conceitos como a avaliação de conhecimentos prévios dos alunos. Neste contexto, a utilização dos jogos na sala de aula pode constituir-se em:

[...] um momento de diversão e interação entre professor-aluno, desenvolvimento de capacidades lógicas e argumentativas, que muitas vezes, o professor não dá oportunidade dos alunos se expressarem, lembrando que esse momento de “descontração” não pode ser confundido com um passatempo, mas sim como uma aula diversificada que rompe com o modelo tradicional de ensino que consiste basicamente na exposição dos conteúdos através do professor (Santos, 2014, p. 25).

Destarte, defendemos o uso dos jogos com uma intenção didática, tendo em vista que, conforme apontado por Santos (2014) este vem romper com o modelo tradicional de ensino, passando a apresentar a matemática e os seus processos de ensino, aprendizagem e avaliação de maneira divertida e interativa. Assim, o trabalho com jogos no contexto da sala de aula quando bem planejado e orientado, pode auxiliar “o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao assim chamado raciocínio lógico” (Smole; Diniz; Milani, 2007, p. 9).

Na próxima seção, discorreremos sobre o estudo epistemológico do conceito de Números Racionais, tendo em vista que para construirmos o jogo “Montando Obra de Arte” fez-se necessário realizar um estudo minucioso sobre o Números Racionais, levantando-se neste processo, os obstáculos epistemológicos que podem surgir ao se trabalhar esses conhecimentos.

Um estudo epistemológico do conceito de Números Racionais

Pesquisas como Nunes e Bryant (1997), Magina e Malaspina (2013) e Oliveira (2016) apontam que o Número Racional, em especial os fracionários, presentes no currículo do Ensino Fundamental tem sido listado por professores como um dos mais complexos de serem ensinados. Neste contexto, pesquisas e projetos no campo da Educação Matemática devem servir de apoio ao trabalho docente para melhor compreensão das dificuldades geradas no processo educacional nas escolas.

Com esta perspectiva é que realizamos estudos atinentes aos processos de ensino e de aprendizagem dos números racionais fundamentados na noção de obstáculo epistemológico

propostas por Bachelard (2005) e sua categorização conforme Brousseau (1983): obstáculos relacionados ao desenvolvimento cognitivo; obstáculos de origem didática, que surgem das escolhas de estratégias de ensino; e obstáculos de origem epistemológica, que estão ligados à resistência ao próprio conhecimento.

O obstáculo epistemológico é concebido como período pré-científico das etapas históricas do pensamento científico, sendo que o desenvolvimento do conhecimento científico se dá em oposição a um pensamento existente, uma espécie de impedimento ou obstáculo ao novo saber pode vir a surgir no decorrer deste processo (Bachelard, 2005). Dito de outro modo,

[...] é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. É aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos (Bachelard, 2005, p. 17).

A superação dessas estagnações chamadas por Bachelard (2005) de obstáculos ocorrem a partir de ruptura epistemológica, reorganização para que ocorra um avanço e uma construção de conhecimentos. No estudo dos Números Racionais, conhecer, analisar e intervir a partir dos obstáculos epistemológicos é fundamental para as mudanças necessárias à qualificação dos processos de ensino e aprendizagem dos objetos de conhecimento que se relacionam a esse conteúdo.

Destacamos que na definição formal, os Números Racionais são representados como frações comuns, sendo símbolos bipartidos que expressam quocientes ou razões entre dois números inteiros “a” e “b”, “a/b”, sendo “a” e “b” inteiros e “a/b” $\neq 0$, no qual o “a” é o dividendo ou numerador e “b”, o divisor ou denominador. Compreende-se que a definição do conjunto Q é lida como um quociente entre um número “a” por um número “b”, tal que, “a” pertença ao conjunto dos números inteiros, e “b” pertença ao conjunto dos números inteiros sem o zero. Dessa forma, todo número inteiro pode ser escrito como uma divisão de outros dois números inteiros, como por exemplo: i) $2=2/1$; ii) $5=5/1$, iii) $7=7/1$.

Powell (2019) destaca a complexidade dessa definição formal para compreensão dos estudantes do Ensino Fundamental afastando-o da ideia de frações como números que representam quantidades, o que para o autor evidencia a necessidade de didatização de ações em torno dela para que de fato esse conjunto numérico seja sistematizado pelos estudantes.

Ademais, Bertoni (2009) aponta que o ensino dos números fracionários enfatiza quantidades menores que um inteiro, ocasionando um salto abrupto na transição entre os números naturais e racionais. Além disso, o pouco uso das frações no cotidiano é uma das razões pelas quais os estudantes sentem dificuldades em manipular essas quantidades e compreendê-las enquanto um número (Cavaliere, 2005).

Nesse cenário, essas pesquisas evidenciam que a contagem de frações é quase que ausente nas propostas pedagógicas e cotidianas, fazendo com que o aluno pense que a contagem seja apenas de números inteiros. Isso gera dificuldades em estabelecer frações como unidades de contagem, partes de um inteiro. Por exemplo, se estamos com frações de quartos, isto significa que a cada 4 formamos um novo inteiro. Isso implica em dupla possibilidade de contagem, partes fracionárias e inteiras, apresentado as noções iniciais de equivalência e relação entre fração mista e imprópria.

Podemos destacar dessas evidências o obstáculo didático-epistemológico: **ausência de proposição de situações de composição com números fracionários de proporções maiores que um inteiro, limita a percepção desses números como quantidades.** Esse obstáculo é reforçado pelas experiências de contagem construídas pelos estudantes no processo inicial de numerização, contagens com números naturais, em que quanto maior o número, maior a quantidade. Com números fracionários isso não é uma verdade absoluta. Quanto mais se divide, maior o algarismo no denominador, e, menor o fracionamento que ele representa, o que dificulta a compreensão da representação simbólica dos números fracionários e da relação numerador e denominador.

A partir desse contexto, foi levantado como ações para ruptura desse obstáculo: oferecer tarefas que propiciem a comparação entre frações, inicialmente com denominadores iguais e depois com mesmo numerador e denominadores diferentes, com apoio de representações pictóricas, de modo a possibilitar a ampliação da construção de sentido e significado da representação dos números fracionários. Assim, foi realizada a proposição de jogos cujas pontuações parciais sejam números fracionários, com pontuação cumulativa, favorecendo as contagens com números fracionários e, com isso, almeja-se contribuir com a superação do obstáculo.

No contexto do jogo “Montando Obra de Arte”, os estudantes necessitam contar décimos de um inteiro e, ao longo das rodadas, compõem esses inteiros de forma artística. Acreditamos que ao realizar contagens com fracionários e inteiros, os estudantes poderão perceber que para cada uma das faixas delimitadas no tabuleiro é necessários 10 pedaços para sua composição final, aspectos que vão ao encontro da superação do obstáculo epistemológico supracitado. Enfatizamos que para o desenvolvimento deste jogo, nos fundamentamos na Engenharia Didática, enquanto abordagem metodológica de pesquisa e ensino, a qual encontra-se descrita na próxima seção deste artigo.

Engenharia Didática

Com o objetivo de analisar a Engenharia Didática, enquanto metodologia de pesquisa e de ensino no contexto dos Números Racionais, a partir do desenvolvimento de um jogo. Compreendendo-a enquanto uma metodologia de pesquisa que foi desenvolvida no âmbito da Didática da Matemática, cujo fundamento ancora-se nas realizações didáticas desenvolvidas em sala de aula, as quais perpassam pela construção, experimentação, observação e análise de seções de ensino (Almouloud, 2007).

A Engenharia Didática caracteriza-se como sendo um esquema experimental com fundamentos nas realizações didáticas desenvolvidas em sala de aula, ou seja, ampara-se: nas concepções tanto do professor quanto do estudante, sendo o estudante o primeiro protagonista dos complexos processos de aprendizagem matemática e o professor o organizador do ambiente, fornecedor de recursos pedagógicos, promotor das mediações e intervenções pedagógicas, assim como o responsável pela institucionalização dos conhecimentos mobilizados e localmente validados; *na realização*, isto é, execução do processo didático; *na observação*, do professor/pesquisador sobre o objeto de estudo e *na análise da Sequência Didática* (Artigue, 1995).

A Engenharia Didática, enquanto metodologia de pesquisa, envolve quatro fases consecutivas, a saber: análise preliminar, a qual contempla um estudo epistemológico dos objetos de conhecimentos a serem mobilizados, no contexto deste estudo compreendeu o estudo dos Números Racionais na forma fracionária; concepção e análise *a priori* da engenharia do jogo; experimentação e; como quarta fase, análise e avaliação *a posteriori*, na

qual realizamos uma confrontação dos dados coletados com as análises a priori que foram realizadas (Artigue, 1995).

A primeira fase da Engenharia Didática envolveu o levantamento e a inferência, com base em um quadro teórico geral. Esta fase permeou três dimensões, a saber: epistemológica, cognitiva e didática. A dimensão *epistemológica* está associada ao conteúdo de Números Racionais positivos e envolveu o levantamento dos obstáculos epistemológicos ligados ao conceito; *cognitiva*, atrelada aos processos mentais hipotetizados junto aos estudantes do Ensino Fundamental, nesta fase, realizamos um levantamento das percepções dos estudantes, suas dificuldades e os obstáculos epistemológicos que ocorrem com frequência no estudo dos números racionais; a última categoria, encontra-se associada a uma dimensão *didática*, concernente ao funcionamento do sistema de ensino (Artigue, 1995), neste último aspecto, centraremos o nosso olhar para a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018).

A segunda fase da Engenharia Didática envolveu a concepção e *análise a priori*, que implicou no levantamento de hipóteses sobre o processo de conceitualização dos Números Racionais. Assim, foram levantadas hipóteses atinentes ao aspecto lúdico e a aprendizagem com a mediação do jogo, além disso, buscamos levantar como as escolhas didático-pedagógicas da equipe permitiram orientar os comportamentos e significados que eram atribuídos pelos estudantes frente ao objeto de estudo no contexto experienciado (ARTIGUE, 1995). Esta análise está fundamentada no levantamento de suposições, as quais chamamos de hipóteses didáticas e pedagógicas sobre os processos que definem as aprendizagens matemáticas favorecidas.

A terceira fase foi a experimentação, na qual desenvolveu-se uma Engenharia Didática, na perspectiva do ensino, a qual foi realizada em duas etapas: na primeira etapa com cerca de 45 estudantes dos 2º aos 4º anos e segunda etapa, com cerca de 20 estudantes dos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental do Distrito Federal. Nesta fase, foi realizado um contato estreito entre os pesquisadores, os professores e os estudantes. Na qual experimentação pressupõe: a apresentação dos objetos e condições de realização da pesquisa junto a população de estudantes; o estabelecimento do contrato didático, entendendo este como sendo os comportamentos específicos do professor/pesquisador esperados pelos estudantes e os comportamentos dos estudantes esperados pelo professor/pesquisador (Brousseau, 2008) e , por

último, a aplicação dos instrumentos de coleta e registro dos dados que foram realizadas a partir de observações participantes feitas durante a experimentação, bem como de gravações em áudio e vídeo.

A quarta e última fase envolveu a análise e avaliação *a posteriori* na qual realizamos o tratamento dos dados que foram coletados durante a experimentação, o que implicou na coleta de importantes informações para a correção, o redimensionamento, o refinamento, a ampliação e as adequações do jogo “Montando Obra de Arte”. Ademais, neste momento, foi realizada uma confrontação das análises *a posteriori*, com as concepções e análises *a priori*, tendo por objetivo validar ou refutar as hipóteses que foram levantadas inicialmente pelos pesquisadores (Artigue, 1995). Na próxima seção, explicitamos as análises conforme descrito nesta seção de apresentação metodológica.

Uma análise da Engenharia Didática do jogo “Montando Obra de Arte”

Ao realizarmos uma análise preliminar sobre os Números Racionais e identificarmos um obstáculo epistemológico atrelado à ausência de proposição de situações de composição com números fracionários de proporções maiores que um inteiro, que limita a percepção desses números como quantidades, foi que construímos o jogo: “Montando Obra de Arte”, cujo objetivo é compreender a relação parte-todo dos números racionais positivos em sua representação fracionária, estabelecendo relações de equivalências e relações proporcionais entre décimos. Destacamos que o jogo pode contribuir para a superação do obstáculo epistemológico identificado, isto ao propiciar trabalhar com a noção de maior que um inteiro fazendo a composição das peças e somando as frações que forem sendo sorteadas ao longo das rodadas, isto nos níveis 2 e 3. Este jogo, pode propiciar ainda, o desenvolvimento das habilidades listadas na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018):

- “(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes” (BRASIL, 2018, p. 297).
- “(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais ($1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/10$ e $1/100$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso” (BRASIL, 2018, p. 291).

- “(EF05MA04) Identificar frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 295).
- “(EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica” (BRASIL, 2018, p. 295).
- “(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 301).
- “(EF15AR01) Identificar e apreciar formas distintas das artes visuais tradicionais e contemporâneas, cultivando a percepção, o imaginário, a capacidade de simbolizar e o repertório imagético” (BRASIL, 2018, p. 201).
- “(EF15AR02) Explorar e reconhecer elementos constitutivos das artes visuais (ponto, linha, forma, cor, espaço, movimento, etc)” (BRASIL, 2018, p. 201).
- “(EF15AR06) Dialogar sobre a sua criação e as dos colegas, para alcançar sentidos plurais” (BRASIL, 2018, p. 201).
- “(EF69AR02) Pesquisar e analisar diferentes estilos visuais, contextualizando-os no tempo e no espaço” (BRASIL, 2018, p. 207).

Diante de tais habilidades, ao realizarmos o levantamento das hipóteses sobre o processo de conceitualização dos Números Racionais, identificamos o contexto das artes, e mais especificamente a montagem de diferentes composições artísticas com a utilização de representações geométricas, por cada jogador, como constituindo-se em uma ação de estímulo à criatividade, em um contexto de jogo, bem como, um incentivo à ludicidade. Nesse sentido, foi pensando em peças do jogo coloridas com inspiração na obra *Composition with Red, Blue and Yellow*, de 1930, do pintor holandês, Piet Mondrian, de 1930. Na obra original do pintor pode-se analisar questões de proporcionalidade em relação às construções geométricas.

As peças do jogo, seguindo essa lógica da obra original considera relação entre as peças que apresentam um fracionamento em décimos de modo que o jogador perceba a peça preta como uma parte do inteiro dividido em dez partes. As peças coloridas foram escalonadas por cores conforme os valores indicados na Figura 1.

Figura 1 - Peças do jogo: “Montando Obra de Arte”

PEÇAS

MONTANDO
OBRA DE ARTE

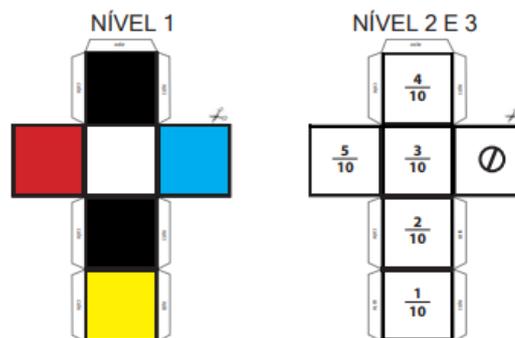
PÁGINA DE REFERÊNCIA PARA IDENTIFICAÇÃO DE CORES (IMPRESSÃO NÃO UTILIZADA NO JOGO)

$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{10}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{10}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{10}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{10}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{10}$

Fonte: Arquivo do projeto

O tabuleiro do jogo foi concebido para ser um quadro em branco, no qual o estudante montaria cinco faixas, representando um inteiro cada. Dessa forma, o jogo possibilitaria a contagem de quantidades fracionadas e composição de inteiros. Para essa composição, o elemento que torna essa montagem uma competição é o lançamento dos dados (Figura 2), de forma alternada pelos jogadores. Vence o jogo quem primeiro montar um quadro totalmente preenchido.

Figura 2 - Dados do jogo: “Montando Obra de Arte”



Fonte: Arquivo do projeto

O nível 1 é indicado inicialmente para os estudantes do 2º e 3º anos do Ensino Fundamental. O foco está em perceber a contagem de peças fracionadas para compor inteiros, sem exigir desses jogadores o registro com números racionais na representação fracionária ou

decimal. Nessa fase, também era objetivo, que os jogadores conseguissem fazer relações de equivalência com frações de mesmo denominador, por meio de sobreposição, fazendo assim, associações com as cores, por exemplo: duas peças pretas equivalem a uma peça branca.

Já o nível 2 e 3 são indicados para estudantes a partir do 4º ano do Ensino Fundamental, sendo que o registro com número fracionário, abordado no Nível 2 e com número decimal presente no nível 3, ampliaria as questões matemáticas no jogo, inclusive de identificação de diferentes representações para quantidades fracionárias: a geométrica, representada no tabuleiro, nas peças e na simbólica matemática, apresentada no dado e exigida no registro do jogo. Para ambos os níveis, faz-se necessário registrar em um Quadro conforme representação da Figura 3.

Figura 3 - Modelo de registro do jogo Nível 2: “Montando Obra de Arte”

Quadro de Registro

Linha	Quantidades	Total
1	$1/10+5/10+1/10+3/10$	1 Inteiro
2		1 Inteiro
3		1 Inteiro
4		1 Inteiro
5		1 Inteiro

Fonte: Arquivo do projeto

Na avaliação inicial do jogo pelos especialistas, foi feito um controle rígido dos parâmetros de medidas tomadas pelo *design* gráfico, para que de fato houvesse conversão nas situações de equivalência a serem propostos e o material do jogo: peças e tabuleiros a serem manipulados pelo jogador. Nesse momento, foi importante entender que a construção material do jogo não poderia gerar dúvidas quanto às relações fracionárias presentes no contexto do jogo.

Ademais, nessa fase, foi considerado importante que as orientações pedagógicas para o uso do jogo no contexto do ensino, exibisse de maneira clara as intervenções didáticas-pedagógicas que poderiam ser realizadas em sala de aula, as quais, segundo Almouloud (2007) envolvem a construção, operação, observação e análise das seções de ensino. Sendo que nestas seções de ensino torna-se necessário algumas ações de mediação e problematização.

Dessa forma, as orientações pedagógicas construídas em paralelo ao jogo apontam que o professor deve estimular, mediar e mesmo instigar as possibilidades de trocas entre diferentes peças do jogo, a cada momento, como forma de superação de desafios que aparecerão, por certo e desejavelmente, ao longo das jogadas. Já com relação aos níveis 2 e 3, enfatiza-se que ao observar os registros, o professor pode encontrar incoerências e incongruência, podendo fazer que o jogador reflita sobre as jogadas e o registro, sua coerência ou não, devendo, por vezes, retomar alguma jogada.

Ao analisarmos a jogabilidade, no momento da análise *a posteriori*, identificamos que os estudantes apresentaram os seguintes desvios no que se refere a compreensão dos objetos matemáticos a serem estudados:

1) A imagem das peças, apresentadas ao lado das regras para induzir relações proporcionais, levou os estudantes, não alfabetizados, a modificar o objetivo final do jogo: montar obra de arte completa, para montagem de uma pirâmide em ordem crescente das peças. Esse desvio da regra, apontou necessidade de revisão no texto das regras do jogo.

Figura 4 - Ilustração das peças do jogo: “Montando Obra de Arte” - Regras jogador

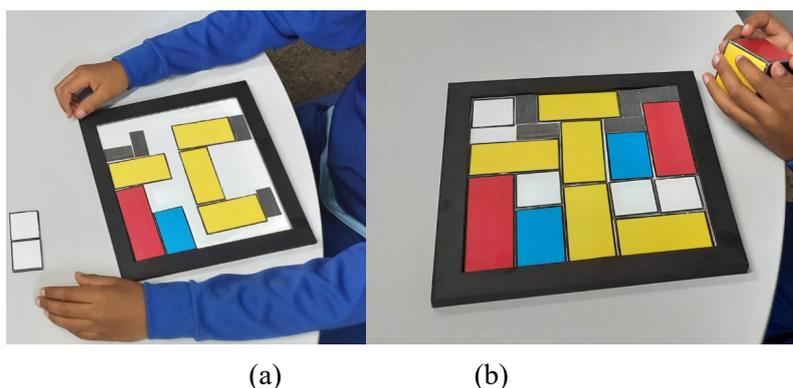


Fonte: Arquivo do projeto

2) Os estudantes não realizam as trocas das peças equivalentes de forma espontânea: uma das ações centrais do jogo era a possibilidade dos estudantes fazerem trocas de peças por peças equivalentes. No nível 1, intuitivamente, comparando o tamanho das peças por sobreposição e nos níveis 2 e 3, a partir da adição de frações com o mesmo denominador, com registro dessas operações por linha. Essa limitação apontou necessidade de revisão do texto das regras do jogo.

3) Posicionar as peças no mesmo sentido, em linhas: essa dificuldade desvincula a composição de inteiros a partir dos pedaços de décimos, o que desvia do objetivo de aprendizagem proposto para o jogo e, por conseguinte, do obstáculo epistemológico a ser superado. Nas Figuras 5 (a e b) podemos perceber que os estudantes diante do quadro colocam as peças na posição que acreditavam ser mais expressiva para sua composição artística. Esse desvio, apontou necessidade de revisão do tabuleiro do jogo.

Figura 5 - Tabuleiro jogo



Fonte: Arquivo do projeto

Com relação aos desvios listados, de uma forma geral, os pesquisadores observaram na experimentação do jogo com os estudantes do 2º ano (7 anos de idade) e alguns do 3º ano (8 anos de idade), evidências de erros quanto à atividade matemática estimulada nas problematizações do jogo, que não paralisaram o jogo, mas influenciaram em possíveis descobertas em relação ao conceito matemático em estudo. Este fato, vai ao encontro do que aponta Muniz (2010) sobre o jogo e a atividade matemática subjugada às regras da atividade lúdica quando relata que:

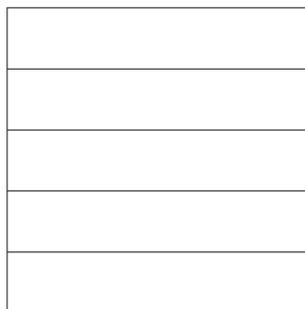
O jogo é realizado independente da qualidade da atividade matemática aí presente: apesar dos erros matemáticos, o jogo continua seu percurso e todos eles se divertem em especial porque se torna uma atividade improdutiva. Este fenômeno indica que a realização da atividade lúdica é independente do controle do desenvolvimento da atividade matemática (Muniz, 2010, p. 104).

Os desvios gerados pelo texto das regras e do tabuleiro foram analisados a partir do que aponta Grandó (2004) em relação aos desafios cognitivos que devem estar presentes na estrutura do jogo para despertar a ação matemática e o envolvimento do jogador. Esta autora destaca que:

Quando nos referimos a utilização de jogos nas aulas de matemática como suporte metodológico, consideramos que tenha utilidade em todos os níveis de ensino. O importante é que os objetivos com o jogo estejam claros, a metodologia a ser utilizada seja adequada ao nível em que está trabalhando e, principalmente, que represente uma atividade desafiadora ao aluno para o desencadeamento do processo (Grando, 2004, p. 26).

Com essa análise foi apontado alterações nas regras do jogo com a retirada da imagem que induziu a mudanças das regras, a inclusão de dois novos comandos: o primeiro que garantisse as trocas de peças, ao longo das jogadas para construir uma obra com mais cores por linha e o segundo, em relação a posição das peças que deveriam estar sempre na mesma posição das faixas de inteiros, que foram introduzidas no tabuleiro (Figura 7).

Figura 7 - Tabuleiro jogo alterado



Fonte: Arquivo do projeto

Todos esses aspectos foram pensados por concordarmos com Muniz (2010), que as regras do jogo devem estar sempre atreladas de forma indissociáveis às regras matemáticas. Ademais, corroboramos também com Grando (2004), ao destacar que a metodologia deve ser adequada ao nível de ensino, sendo que realizamos um estudo curricular sobre os objetos matemáticos dispostos no jogo e a indicação que inicialmente incluiria o 2º ano do Ensino Fundamental, passou a ser para o 3º até o 7º ano do Ensino Fundamental.

Ao chegar nessas análises *a posteriori* verificou-se a validade da Engenharia Didática enquanto metodologia de pesquisa e a necessidade de seus percursos cíclicos reiniciar o processo após as modificações realizadas no jogo. Tornando necessário reavaliação em novas experimentações e análises, que foram realizadas em diferentes contextos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo por objetivo analisar a Engenharia Didática, enquanto metodologia de pesquisa e de ensino no contexto dos Números Racionais, a partir do desenvolvimento de um jogo. Constatamos a partir da sua utilização, enquanto metodologia de pesquisa, a ausência de proposição de situações de composição com números fracionários de proporções maiores que um inteiro que limita a percepção desses números como quantidades. A partir disso, foi possível construir o jogo “Montando Obra de Arte” visando contribuir com a superação deste obstáculo didático-epistemológico. Ademais, esta metodologia apresentou potencialidades para a realização de um processo cíclico de análises, fazendo-se retroalimentações para pensar e repensar o jogo a partir do contexto da experimentação que estava sendo vivenciado.

Assim, o jogo “Montando Obra de Arte” pode ser utilizado por estudantes desde o 3º até o 7º ano do Ensino Fundamental, tanto em contexto de ensino formal quanto em outros espaços, tendo em vista a possibilidade de acessar este recurso lúdico na plataforma e imprimir o arquivo do jogo e recortá-lo. Ademais, a Engenharia Didática realizada validou que este recurso lúdico pode contribuir na compreensão da relação parte-todo dos números racionais positivos em sua representação fracionária, a partir do contexto de construção de uma obra de arte, bem como, pode contribuir para o estabelecimento de relações de equivalências e proporcionalidade entre décimos.

Outrossim, a metodologia da Engenharia Didática propiciou a construção de orientações didático-pedagógicas que podem ser acessadas por professores que ensinam Matemática e que poderão lhes orientar quanto às realizações didáticas com a utilização do jogo “Montando Obra de Arte”. Para mais, o desenvolvimento deste estudo, permitiu analisar de maneira pormenorizada as necessidades e as ações, no contexto da sala de aula, tanto do professor quanto do estudante perante o estudo dos Números Racionais com a utilização do recurso lúdico construído e disponibilizado em uma plataforma digital.

Um dos desafios enfrentados pelo grupo de pesquisadores, nesse processo, foi o levantamento dos obstáculos epistemológicos e a sua compreensão a partir das categorias propostas por Brousseau (1983). Foi notório nas fases de *concepção* e análise *a priori* e ao final dos ciclos na análise *a posteriori* que quanto mais precisas forem nossas concepções dos obstáculos melhores serão as produções pedagógicas para a superação e qualificação do

ensino de matemática, em especial no contexto dos números racionais na representação fracionária.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, Celso. **Jogos para a estimulação das múltiplas inteligências**. 19ª ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2012.

ALMOULOU, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. 3.ed. São Paulo: Editora UFPR, 2007.

ARTIGUE, Michèle. **Ingénierie didactique**. In: Brun, J. *Didactiques des Mathématiques*. Paris: Délachaux et Niestle, 1995. p. 243-263.

ARTIGUE, Michèle. *Ingénierie Didactique*. **Recherches em Didactique dès Mathématiques**, Grenoble, 1998. v. 9, n. 3, p. 281-308.

BACHELARD, Gaston. **A Formação do Espírito Científico**: contribuição para uma psicanálise do Conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 2005.

BERTONI, Nilza Eigenheer. **Módulo VI: Educação e linguagem matemática IV - frações e números fracionários**. Brasília: 2009. Disponível em: <http://www.sbemrasil.org.br/files/fracoes.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. MEC/INEP. **Relatório de resultados do Saeb 2019** - volume 1: 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e séries finais do Ensino Médio. Brasília, DF: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2021. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2021/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2021_volume_1.pdf. Acesso em: 22 jul. de 2024.

BRASIL. MEC/INEP. **Relatório de resultados do SAEB 2021** - volume 1: Contexto educacional e Resultados em Língua Portuguesa e Matemática para o 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e séries finais do Ensino Médio. Brasília, DF: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2023. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2019/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2019_volume_1.pdf. Acesso em: 22 jul. 2024.

BROUSSEAU, Guy. **Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques**. RDM, v.4, n.2, Grenoble, 1983. p. 165-198. Disponível em: https://hal.science/file/index/docid/550256/filename/Brousseau_1976_obstacles_et_problemes.pdf. Acesso em: 10 jul. 2024.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CAVALCANTI, Eduardo Luiz Dias. **O Lúdico e a Avaliação da Aprendizagem: Possibilidades para o ensino e aprendizagem de química**. Tese (Doutorado em Química do Cerrado e do Pantanal) - Universidade Federal de Goiás UFG, Goiânia, Goiás, 2011.

CAVALIERI, Leandro. **O ensino das frações**. Universidade Paranaense - UniPar, Umuarama - PR, 2005.

DOUADY, Règine. L'Ingénierie Didactique. **Cahier de DIDIREM**, Paris, v. 2., n. 19, jan. 1993.

GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 239 fls. Tese (Doutorado em Educação), Universidade Estadual de Campinas. Campinas, São Paulo: 2000.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

MAGINA, Sandra; MALASPINA, Maria da Conceição de Oliveira. A fração nos anos iniciais: uma perspectiva para seu ensino. In: SMOLE, Katia Stocco; MUNIZ, Cristiano Alberto (Orgs.). **A Matemática em sala de aula**: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental. Porto Alegre: Penso, 2013. P. 89-114.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Brincar e jogar**: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Autêntica: Belo Horizonte, 2010.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática**. Tradução: Sandra Costa. Porto Alegre: Artes médicas, 1997.

OLIVEIRA, Raimunda de. **Desenvolvimento de conceitos matemáticos**: relações entre o aprender e o ensinar na prática docente. 176 fls. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Brasília, Brasília, 2016.

POWELL, Arthur Belford. **Como uma fração recebe seu nome?** Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática, Cascavel, v. 3, n. 3, p. 700-713, 2019.

SANTOS, Maria José Batista de Souza. **O ensino e aprendizagem das frações utilizando materiais concretos**. 47fls. Monografia (Curso de Licenciatura plena em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Paraíba, 2014.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ Maria Ignez; MILANI Estela. **Jogos de Matemática de 6º ao 9º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2007, p.9-12.

VALENTE, Wagner Rodrigues. História da educação matemática: sua importância na formação de professores. **TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, [S. l.], v. 4, n. 3, p. 151–161, 2021. Disponível em: <https://ojs.ufgd.edu.br/tangram/article/view/13912>. Acesso em: 16 ago. 2024.

HISTÓRICO

Submetido: 30 de julho de 2024.

Aprovado: 06 de novembro de 2024.

Publicado: 13 de dezembro de 2024.