RIDEMA
Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática

Aprendizagens relacionadas ao campo multiplicativo na resolução de problemas de quarta proporcional no sexto ano do Ensino Fundamental: o caso de Mariana

Learning related to the multiplicative field in solving proportional fourth problems in the 6th year of Elementary School: the case of Mariana

Sara Rodrigues Ferraz[1]
Secretaria de Educação de Minas Gerais

Ana Cristina Ferreira[2]
Universidade Federal de Ouro Preto

RESUMO

A compreensão das operações aritméticas elementares é, historicamente, um dos pilares da vida escolar. Na transição dos anos iniciais para os anos finais do Ensino Fundamental, geralmente, esse é um dos conhecimentos matemáticos que se espera que os alunos tenham construído. Contudo, avaliações nacionais evidenciam uma situação bem distinta na maioria das escolas públicas brasileiras. Neste artigo, com base na Teoria dos Campos Conceituais, um conjunto de tarefas sobre o campo multiplicativo foi elaborado e desenvolvido em uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto, Minas Gerais (MG). A pesquisa, de cunho qualitativo, foi desenvolvida ao longo de quatro meses, nos horários regulares das aulas de Matemática da turma e teve como foco a aprendizagem de noções associadas ao campo multiplicativo. Os dados foram produzidos por meio de gravações em áudio e vídeo de algumas atividades desenvolvidas, do diário de campo da pesquisadora, de registros produzidos pelos(as) estudantes ao longo do trabalho e de entrevistas realizadas com alguns(mas) deles(as). Os resultados evidenciam que a aluna usou diferentes procedimentos ao longo do processo e que, ainda que suas respostas não permitam precisar exatamente qual a estratégia adotada em cada momento, conhecimentos matemáticos acerca da quarta proporcional foram mobilizados. Também foram identificadas outras aprendizagens (saber se relacionar com colegas e professora, ouvir os colegas, construir e expressar argumentos etc.) no processo que tiveram papel importante nele. O trabalho desenvolvido mostra-se uma possibilidade para a aprendizagem de conceitos matemáticos envolvidos no campo multiplicativo, favorecendo a transição e adaptação de esquemas do pensamento aditivo para o multiplicativo.

Palavras-chave: Educação Matemática, Teoria dos Campos Conceituais, Campo Multiplicativo, Quarta proporcional, Ensino Fundamental.

ABSTRACT

Understanding elementary arithmetic operations has historically been one of the pillars of school life. In the transition from the initial years to the final years of elementary school, this is generally one of the mathematical skills that students are expected to have built up. However, national assessments show that this expectation has not been realized in most Brazilian public schools. In this paper, based on the Conceptual Fields Theory, a set of

[1] Mestra em Educação Matemática (UFOP). Professora efetiva na Secretaria de Educação de Minas Gerais, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil. Endereço para correspondência: ua Professor Salatiel Torres, 522, Nossa Senhora de Lourdes. Ouro Preto-MG, 35404477, Brasil. ORCID iD: https://orcid.org/0009-0004-8931-2859. Lattes: http://lattes.cnpq.br/8754037186459674. E-mail: sara.ferraz@educacao.mg.gov.br

[2] Doutora em Educação Matemática (UNICAMP). Professora Titular (UFOP), Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil. Endereço para correspondência: Deema/ICEB, R. Quatro, 786 - Bauxita, Ouro Preto - MG, 35402-136, Brasil. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0953-1468. Lattes: http://lattes.cnpq.br/7935271663190827. E-mail: anacf@ufop.edu.br

tasks on the multiplicative field was designed and developed in a 6th grade class at a public school in Ouro Preto (MG). This article analyzes the process experienced by a student when solving problems involving the proportional fourth. The research, which was qualitative in nature, was carried out over a period of four months, during regular math class times, and focused on the learning of notions associated with the multiplicative field. The data was produced through audio and video recordings of some of the activities carried out, the researcher's field diary, records produced by the student throughout the work and an interview with her. The results show that the student used different procedures throughout the process and that, although her answers do not allow us to specify exactly which strategy she adopted at each moment, mathematical knowledge about the fourth proportional was mobilized. Other learning was also identified (relating to classmates and the teacher, knowing how to listen to classmates and the teacher, constructing and expressing arguments, etc.) which played an important role in the process. The work carried out proved to be a possibility for learning mathematical concepts involved in the multiplicative field, favoring the transition and adaptation of schemes from additive to multiplicative thinking.
Keywords: Mathematics Education, Theory of Conceptual Fields, Multiplicative Field, Fourth Proportional, Elementary School.

INTRODUÇÃO

A motivação para esta pesquisa surgiu durante a graduação em Matemática. Como bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid), mantive[3] intenso contato com docentes e estudantes e, mesmo antes de iniciar a docência, percebi inúmeras dificuldades enfrentadas nas aulas de Matemática. Em particular, o fato de um número significativo de estudantes ingressar no sexto ano do Ensino Fundamental sem o domínio das operações básicas, principalmente a multiplicação e a divisão, chamou-me a atenção. Também observei que a situação não era muito diferente nos anos seguintes ao mencionado.

Concluída a Licenciatura, comecei a lecionar e verifiquei que, tanto em minhas classes quanto nas de colegas, era comum essa situação. Observei também que, usualmente, o trabalho com as operações elementares privilegiava as técnicas operatórias e a memorização dos algoritmos, por meio de exercícios repetitivos, em detrimento da compreensão. Isso não apenas não ajudava na superação das dificuldades, mas, ao contrário, parecia reforçá-las (PLACHA; MINOTTO, 2005). Tais inquietações me conduziram ao desenvolvimento de uma pesquisa de Mestrado (FERRAZ, 2016), na qual investiguei potencialidades e limitações de tarefas elaboradas a partir da Teoria dos Campos Conceituais para a aprendizagem de conceitos relacionados à multiplicação e divisão de números naturais. Cabe ressaltar que o termo *aprendizagem* é entendido aqui como uma adaptação de esquemas a novas situações, pois "o

[3] Como nesta seção apresento algumas experiências pessoais, utilizo a primeira pessoa do singular. Nas seções seguintes, o ponto de vista passa a ser a primeira pessoa do plural, considerando que a pesquisa se desenvolveu com o trabalho em conjunto com a orientadora.

10.34019/2594-4673.

indivíduo se adapta às situações e é por meio de uma evolução da organização de sua atividade que ele se adapta" (VERGNAUD, 2013, p. 4). No presente artigo, apresento um recorte dessa pesquisa, no qual analiso o processo vivenciado por uma estudante do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto, Minas Gerais (MG), ao resolver tarefas relacionadas à quarta proporcional. A estrutura do artigo está organizada da seguinte forma: inicio situando brevemente o referencial teórico que embasa a pesquisa, em seguida, descrevo as opções metodológicas e passo, então, aos resultados e à análise, concluindo com algumas Considerações Finais.

A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria psicológica cognitivista que tem como principal objetivo compreender como crianças e adolescentes adquirem e desenvolvem conceitos matemáticos (GITIRANA et al., 2014; MAGINA, 2001). Para Vergnaud (2013, p. 4), "o indivíduo se adapta às situações e é por meio de uma evolução da organização de sua atividade que ele se adapta". Nessa perspectiva, a construção do conhecimento acontece pela experiência, já que é ao longo da sua vida que o indivíduo encontra a maior parte das situações às quais deve se adaptar.

Quando o indivíduo se depara com situações novas, busca em seu repertório de conhecimentos, desenvolvidos ao longo da experiência com conjunturas anteriores, mecanismos (estratégias) que lhe possibilitam adaptar-se à nova circunstância. De acordo com Vergnaud (2013), os novos conhecimentos são construídos com base em conhecimentos anteriores, às vezes se opondo a eles. Nessa perspectiva, o autor concebe a organização do conhecimento em Campos Conceituais. Para Vergnaud (1990), um campo conceitual é um conjunto informal e heterogêneo de situações e problemas cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de diferentes tipos, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros.

Interessa-nos especialmente o campo multiplicativo. No entanto, antes de explorarmos esse campo, é fundamental compreender alguns aspectos e termos-chave da Teoria dos Campos Conceituais.

CONCEITO E SITUAÇÃO

Para Vergnaud (1990), é a partir de situações e problemas a resolver que o conceito adquire sentido, de caráter teórico ou prático, para a criança. Segundo Moreira (2002), Vergnaud emprega o conceito de situação no sentido não de situação didática, mas sim de tarefa. Assim, toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas para as quais é importante conhecer naturezas e dificuldades (Moreira, 2002). Dessa maneira, Vergnaud (2013, p. 156) define *conceito* como uma tríade:

> S é um conjunto de situações que dão sentido a um conceito,
> I é um conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações,
> L é um conjunto das representações linguísticas e simbólicas (algébricas, gráficas...) que permitem representar os conceitos e suas relações, e, consequentemente, as situações e os esquemas que elas evocam.

Com essa definição, é possível perceber que as situações são responsáveis pelo sentido atribuído ao conceito, ou, em outras palavras, um conceito torna-se significativo a partir de uma variedade de situações a se resolver. Tomemos como exemplo os problemas a seguir:

1) Para fazer uma receita de bolo são necessários três ovos. Quantos ovos são necessários para fazer duas receitas de bolos iguais a essa?
2) São necessários três metros de tecido para fazer uma saia; são necessários duas vezes mais para fazer um conjunto. Quantos metros de tecido são necessários para fazer um conjunto?
3) Maria tem duas saias e três blusas de cores diferentes. De quantas maneiras ela pode se arrumar combinando as saias e blusas?

As três situações apresentadas podem ser resolvidas por meio de uma multiplicação, 2 x 3; porém, é importante destacar que a multiplicação assume significados distintos em cada uma das propostas. No problema 1, a multiplicação pode estar associada à ideia de proporcionalidade. Já no problema 2, ela remete à comparação multiplicativa. No problema 3, a operação está relacionada à ideia de combinatória. Assim, a compreensão de que diferentes significados vinculam-se a uma única operação acontece por meio de sucessivas experiências de análise e resolução de situações e problemas que os alunos precisam experimentar ao longo do tempo. Dessa forma, é no contato com um conjunto de situações nas quais determinado conceito está presente que o aluno vai construindo um sentido acerca de tal conceito.

doi 10.34019/2594-4673.

ESQUEMA

Diante de uma situação, os alunos podem apresentar condutas diferenciadas: alguns já dispõem de conhecimentos prévios que serão usados no desenvolvimento das tarefas; outros precisam buscar estratégias, organizar as ideias, desenvolver o pensamento em busca da solução de um problema. Essa organização do pensamento do aluno diante de uma situação nos leva ao conceito de esquema, um dos conceitos-chave na teoria dos campos conceituais. Para Vergnaud (2013), o conceito de *esquema* agrega quatro elementos:

- um objetivo, subobjetivos e antecipações;
- regras de ação e tomada de informação e de controle;
- invariantes operatórios; conceitos em ação e teoremas em ação;
- possibilidades de inferência em situação.

Esses componentes presentes nos esquemas contribuem para a compreensão da conduta do sujeito frente a uma situação. A conduta não é formada somente por ações, mas também por informações necessárias a continuidade da atividade e pelos controles que permitem ao sujeito ter segurança de ter feito o que pensava fazer e de que continua no caminho escolhido. Desse modo, as regras de ação e tomada de informação e controle constituem a parte geradora do esquema, aquela que é responsável pelo decorrer do tempo da conduta e da atividade (VERGNAUD, 2013). Já o *objetivo* representa a parte intencional do esquema e é essencial na organização da atividade:

> O objetivo se decompõe em subobjetivos, sequencialmente hierarquicamente agenciados; os quais dão lugar a numerosas antecipações. Mesmo quando o objetivo é somente parcialmente consciente e os efeitos esperados da ação não são, de forma alguma, previsíveis pelo sujeito, esse caráter intencional da conduta e da atividade não pode ser ignorado. Ele é, com efeito, a fonte de aspectos diferenciais importantes na conduta, na educação e no trabalho, em particular. (VERGNAUD, 2013, p. 153)

As inferências são indispensáveis para o funcionamento do esquema, pois são elas que permitem avaliar as regras de ação e antecipação a partir de informações e dos invariantes operatórios de que dispõe o sujeito em situação (MOREIRA, 2002). Os *invariantes operatórios* são os mais decisivos do ponto de vista cognitivo, porque são os conceitos em ação que permitem retirar do meio as informações pertinentes e selecionar os teoremas em ação necessários ao cálculo, ao mesmo tempo, dos objetivos e subobjetivos suscetíveis de serem formados, e de regras em ação, de tomada de informação e controle permitindo atingi-los

doi 10.34019/2594-4673.

(VERGNAUD, 2013). Para Vergnaud (1990, p. 6), os invariantes operatórios merecem uma explicação complementar, pois existem três tipos lógicos:

> a) Invariantes do tipo proposição: São susceptíveis de serem verdadeiros ou falsos; os teoremas em ação são invariantes desse tipo;
> b) Invariantes do tipo "função proposicional" não são susceptíveis de ser verdadeiro ou falsos, mas são partes indispensáveis para a construção de proposições;
> c) Invariantes do tipo "argumento": quem diz função proposicional e proposição diz argumento.

Essa distinção dos invariantes operatórios nos leva a discutir brevemente a ideia de conceito em ação e teorema em ação. Vergnaud (2013, p. 153) define um *conceito em ação* como um conceito considerado pertinente na ação em situação e teorema em ação como uma proposição tida como verdadeira na ação em situação. Gitirana *et al.* (2014, p. 22), com base nos estudos de Vergnaud, explicam que os *teoremas em ação* são definidos como relações matemáticas levadas em consideração pelos alunos quando estes escolhem uma sequência de operações, para resolver determinado problema. Assim, o teorema em ação é subjacente (implícito) ao comportamento dos alunos, aparecendo de modo intuitivo na ação deles. Nessa perspectiva, é nos esquemas que devemos procurar os conhecimentos-em-ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito seja operatória (VERGNAUD, 1990).

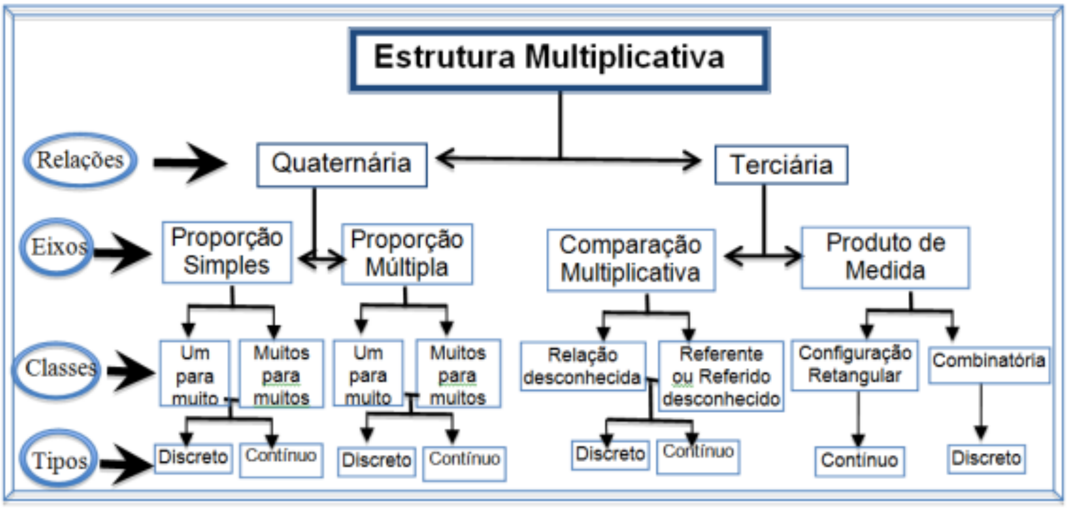
O CAMPO MULTIPLICATIVO

O campo multiplicativo das estruturas multiplicativas, também denominado campo multiplicativo, compreende um conjunto informal e heterogêneo de situações cuja análise e tratamento requerem uma ou várias multiplicações e divisões bem como um conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisá-las matematicamente (VERGNAUD, 1990). Dessa forma, o campo multiplicativo envolve conceitos como proporção simples e múltipla, função linear e não linear, razão, quociente, produto de dimensões, combinação, função, multiplicação e divisão, entre outros.

Magina, Merline e Santos (2012) desenvolveram um esquema com o objetivo de sintetizar as ideias centrais desse campo, fazendo uma releitura das diferentes classes de problemas propostas por Vergnaud sobre o campo multiplicativo. Apresentamos na Figura 1 o esquema proposto pelas autoras:

10.34019/2594-4673.

Figura 1 – Esquema do campo multiplicativo



Fonte: Magina, Merline e Santos (2012, p. 5).

Esse esquema é constituído por duas relações: quaternárias e ternárias. As quaternárias são divididas em dois eixos: proporção simples e proporção múltipla. Tais proporções, por sua vez, são constituídas por duas classes de situações ("uma para muitos" e "muitos para muitos"), sendo que cada classe ainda pode ser explorada levando em consideração dois tipos de quantidades (contínua e discreta). Também as relações ternárias são divididas em dois eixos: comparação multiplicativa e produto de medidas. Cada um deles possui classes distintas. O eixo *comparação multiplicativa* é constituído pelas classes *relação desconhecida* e *referido desconhecido*, podendo também trabalhar com quantidades discretas e contínuas. Já o eixo *produto de medidas* possui duas subclasses: configuração retangular e combinatória. Note que cada uma das classes desses eixos só trabalha com um tipo de quantidade: contínua para a configuração retangular e discreta para a combinatória. Destacaremos a noção de quarta proporcional, foco do presente artigo.

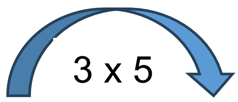
PROPORÇÃO SIMPLES: QUARTA PROPORCIONAL

Os problemas de proporção simples são aqueles nos quais se estabelece uma relação proporcional entre duas grandezas, envolvendo quatro quantidades. Essa classe de problemas envolve uma relação quaternária (relação entre quatro quantidades, duas quantidades são medidas de certo tipo e as duas outras medidas de outro tipo). Esse eixo de problemas pode se

10.34019/2594-4673.

subdividir em duas classes de situações: a correspondência um para muitos e a muitos para muitos. De acordo com o esquema proposto por Magina, Merline e Santos (2012), apresentado anteriormente, os problemas envolvendo quarta proporcional se encaixam dentro da classe muitos para muitos, podendo ser do tipo discreto ou contínuo. Para entender melhor a quarta proporcional, vamos considerar um exemplo usado por Gitirana et al. (2014, p. 66) para ilustrar essa classe de problemas: "Marta usa 15 ovos para fazer 3 bolos. De quantos ovos ela precisa para fazer 5 bolos?". Nele, não está explícita a relação um para muitos. No entanto, é possível descobrir quantos ovos seriam necessários para fazer 1 bolo. Usando o diagrama proposto por Vergnaud (1990), o problema poderia ser montado assim:

Tabela 1 – Correspondência muitos para muitos



Bolos	**Ovos**
3	15
5	?

Fonte: Gitirana et al. (2014, p.66)

Os valores 3 e 5 não são grandezas múltiplas, sendo necessário encontrar o valor correspondente à unidade, também conhecido como taxa, por meio da divisão 15 ovos: 3 bolos resultando em 5 ovos para cada bolo e, em seguida, aplicar essa relação à quantidade de bolos (5 x 5), resultando em 25 ovos. Essa estratégia de solução é denominada por Vergnaud (apud SCHLIEMANN; CARRAHER, 1997) como estratégia funcional.

As autoras explicam ainda que a dificuldade do problema varia conforme os valores dados de uma mesma grandeza serem múltiplos ou não, como ocorre no problema a seguir, quando há uma situação com múltiplos: "Marta usa 15 ovos para fazer 3 bolos. De quantos ovos ela precisa para fazer 6 bolos?". Neste caso, a razão entre o número de bolos é um número inteiro, o que permite aos alunos utilizarem mais facilmente a propriedade linear da proporcionalidade, aplicando a razão entre as medidas da mesma grandeza (Tabela 2).

doi 10.34019/2594-4673.

Tabela 2 – Correspondência muitos para muitos

	Bolos	Ovos
	3	15
x 2	6	?

Fonte: (Gitirana et al., 2014, p.66)

Os valores correspondentes à quantidade de bolos (3 e 6) são múltiplos. Isso permite que o aluno perceba que a quantidade necessária para o dobro de 3 bolos é o dobro da quantidade de ovos necessários para 3 bolos, estabelecendo, assim, o teorema em ação f (6 bolos) = 2 x f (3 bolos) = 2 x 15 ovos = 30 bolos. Esse procedimento é denominado por Vergnaud (apud SCHLIEMANN; CARRAHER, 1997) como *estratégia escalar*.

Veja agora um exemplo mais complexo. Um anúncio diz: "A cada 15 pacotinhos de suco, ganhe 2 canecas!". Se Maria comprar 25 pacotinhos de suco, quantas canecas ela ganhará? Aqui a relação proporcional entre as grandezas (quantidade de pacotes de suco e a obtenção de canecas) está implícita. Será necessário dividir 2 por 15 para achá-la. No entanto, realizar essa divisão não faz sentido, pois o resultado seria uma dízima (0,133333...). Neste problema, não está explícita a relação "um para muitos" e não faz sentido descobri-la. Ele também apresenta a impossibilidade de reduzir a correspondência entre o número de pacotes de suco e o de canecas a uma relação de um para muitos, considerando o conjunto dos naturais.

Os exemplos apresentados mostram que existe uma diversidade de problemas que podem ser formulados envolvendo quantidades discretas ou contínuas, com níveis de complexidade diferentes. Optamos por apresentar esses exemplos para destacar as possíveis estratégias de solução propostas por Vergnaud (apud SCHLIEMANN; CARRAHER, 1997) nos problemas de proporcionalidade: estratégia escalar, estratégia funcional ou regra de três. Não destacamos aqui as soluções envolvendo regra de três para estarmos mais próximos dos procedimentos usualmente utilizados por estudantes de sexto ano do Ensino Fundamental.

METODOLOGIA

A presente pesquisa buscou compreender os sentidos atribuídos pela aluna às tarefas propostas e, principalmente, às noções relacionadas ao campo multiplicativo. Mais que comparar resultados (antes e depois das tarefas) ou comparar o desempenho dos estudantes, procuramos analisar o processo vivido por eles ao resolverem as tarefas propostas. No recorte

doi 10.34019/2594-4673.

apresentado neste artigo, analisamos, com uma abordagem qualitativa, o processo vivenciado por uma estudante do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto ao longo de cerca de 10 meses, enquanto resolvia tarefas que abordavam a quarta proporcional.

Além de pesquisadora, a primeira autora era também professora da turma na qual estudava essa aluna. Como Barbosa (2001), acreditamos que o investigador precisa estar ciente de que a carga de valores construída por sua historicidade traz consequências para a produção e análise de dados, de tal maneira que aquilo que se observa mantém relação com sua experiência anterior. Assim, não tivemos a ilusão da neutralidade, uma vez que procuramos compreender o fenômeno em seu processo natural – uma professora lidando com seus alunos em sala de aula, no contexto de uma escola pública – e tenho ciência do envolvimento pessoal e afetivo existente. Por outro lado, também percebemos vantagens nessa proximidade entre pesquisadora e participantes do estudo, e procuramos realizar a produção de dados pautadas no uso de técnicas e instrumentos distintos que permitissem a triangulação dos dados.

A coleta de informações ocorreu no período de 16 de março a 10 de dezembro de 2015. A escolha das técnicas e instrumentos – diário de campo, registro produzido pelos alunos, gravações de áudio e vídeo e entrevistas – ocorreu em consonância com a abordagem metodológica e a questão de pesquisa. No recorte feito para este artigo, analisamos o processo vivenciado por Mariana ao resolver problemas envolvendo a quarta proporcional, buscando destacar procedimentos e estratégias utilizados pela aluna ao longo do processo desenvolvido.

Em 2015, Mariana tinha 11 anos e cursava, pela primeira vez, o sexto ano. Ela era oriunda de outra escola pública, onde frequentara os anos iniciais do Ensino Fundamental. Quando a pesquisa foi desenvolvida (início do ano de 2015), ela ainda se adaptava à nova escola. A aluna não registrava nenhuma retenção em seu percurso escolar. Nesse sentido, sua escolha se deu pelo fato de sua trajetória se assemelhar à de uma parcela significativa dos(as) estudantes de sua turma, que também apresentava dificuldade na compreensão das situações propostas nas tarefas. O termo *tarefa* é entendido “como uma proposição feita pelo professor em sala de aula, cujo objetivo é concentrar a atenção dos alunos em uma determinada ideia matemática (STEIN et al., 2009)” (CYRINO; JESUS, 2014, p. 753). Tais tarefas foram, principalmente, situações-problema propostas aos estudantes para serem resolvidas individualmente ou em duplas e, em seguida, discutidas coletivamente.

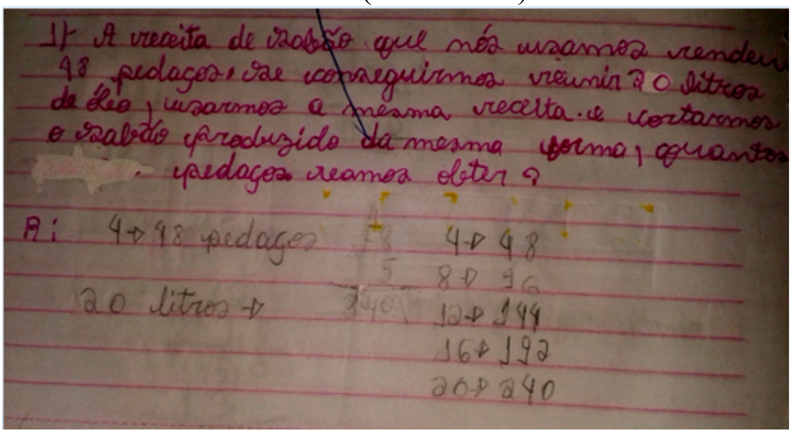
ANÁLISE: PROCEDIMENTOS E ESTRATÉGIAS RECORRENTES NA RESOLUÇÃO DE TAREFAS ENVOLVENDO A QUARTA PROPORCIONAL

Nas primeiras semanas de aula, realizei uma sondagem cuja finalidade foi identificar os conhecimentos que os(as) estudantes traziam consigo acerca das operações fundamentais, sobretudo no campo multiplicativo (ver Ferraz, 2016) para orientar a construção das tarefas iniciais. O instrumento combinava questões diretas (cálculos) e situações-problema.

Mariana demonstrou desempenho satisfatório nas questões diretas que envolviam técnicas operatórias. Contudo, embora soubesse resolver operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, encontrou dificuldade nas situações-problema, demonstrando não compreender como e quando usar determinada operação quando se tratava de propostas distintas.

Passamos a descrever e a analisar as resoluções apresentadas por ela nas tarefas propostas, cronologicamente. A primeira situação envolvendo a noção de quarta proporcional surgiu quando produzimos sabão caseiro com óleo de cozinha reutilizado e exploramos diversas questões matemáticas (Figura 2):

Figura 2 – Resolução feita por Mariana em seu caderno: atividades produção de sabão caseiro (31/03/2015)



Fonte: Dados da pesquisa (FERRAZ, 2016).

Mariana usa a informação de que são necessários 4 litros de óleo para fazer uma receita e estabelece uma relação de comparação entre grandezas de natureza diferente (no caso, litros de óleo e pedaços de sabão), o que lhe permite encontrar o resultado desejado. Por meio de cálculos sucessivos, vai acrescentando 48 pedaços de sabão a cada 4 litros de óleo a mais até chegar nos 20 litros proposto no enunciado.

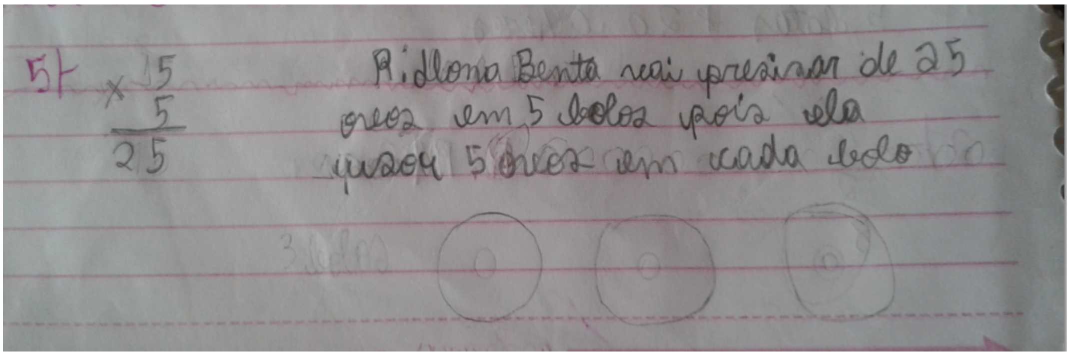
Juiz de Fora, v. 9, n. 1, p. 1-21, Jan. – Dez., e-ISSN: 2594-4673, 2025
10.34019/2594-4673.

O interessante é que essa estratégia envolve o raciocínio aditivo; porém, pelas marcas de borracha, é possível perceber que, em algum momento, a aluna registrou a operação 48 vezes 5, mas preferiu apagá-la e manter a outra forma de resolução. Esse procedimento conduziu a aluna à solução do problema; porém, essa estratégia parece não ter sido usada em outros momentos. Nossa hipótese é que a escolha da estratégia parece depender dos conhecimentos prévios que a estudante tem em relação aos números e às operações. Gonçalves (2010) apresenta situações semelhantes em seu estudo. Assim, é importante destacar que esse procedimento foi mobilizado a partir da experiência "produção de sabão caseiro". Como isso aconteceu nas primeiras semanas de aula, talvez a aluna se sentisse mais segura utilizando estratégias aditivas.

Na verdade, nessa subclasse de problemas, Mariana apresentou certa dificuldade. Na segunda situação proposta, ela pediu ajuda e foi proposto o uso de um desenho que a auxiliasse a entender a situação proposta. Ela tentou compreender a situação com o auxílio de um desenho, mas, novamente, não foi bem-sucedida e solicitou ajuda mais uma vez. Nesse momento, a professora pediu a um colega que a auxiliasse. Sugeriu ao aluno que não fornecesse a resposta direta à colega e que tentasse fazer da mesma forma como tinha sido feito em aula. O aluno se aproximou de Mariana dizendo que tal problema não era difícil e perguntou se ela conseguia responder quantos ovos seriam necessários para fazer um bolo. Após pensar alguns instantes, a aluna respondeu: "Cinco". O colega questionou-a perguntando: se são cinco ovos para cada bolo, então quantos ovos são necessários para fazer cinco bolos? Nesse momento, a aluna fez o registro[4] da Figura 3:

[4] A situação proposta era: *Dona Benta usa 15 ovos para fazer 3 bolos. Quantos ovos ela precisa para fazer 5 bolos?*

Figura 3 – Resolução feita por Mariana em seu caderno: atividades em sala (09/04/2015)



Fonte: Dados da pesquisa (FERRAZ, 2016).

A estratégia sugerida pelo colega a Mariana envolve identificar quantos ovos são gastos para fazer um bolo, para, posteriormente, por meio da relação “um para muitos”, calcular quantos ovos são necessários para fazer cinco bolos. Esse procedimento é identificado na literatura como estratégia funcional ou “busca do valor unitário” (VERGNAUD, apud SCHLIEMANN; CARRAHER, 1997). No caso em questão, Mariana encontra a quantidade de ovos necessários para fazer um bolo por meio do cálculo mental e, em seguida, a quantidade de ovos necessários para fazer cinco bolos é obtida multiplicando 5 por 5, resultando em 25 ovos. Essa estratégia parece não ter sido totalmente apropriada pela estudante, uma vez que, ao ser solicitada em outro momento a resolver uma questão envolvendo a quarta proporcional, ela apresentou dificuldade na compreensão da situação proposta, como sugere a transcrição da conversa a seguir:

Comprei 3 pacotes de figurinhas com um total de 27 figurinhas.
Quantas figurinhas vêm em 4 pacotes?

Mariana: Pode ler de novo?

Pesquisadora: Pode, pode fazer com calma.

Mariana lê o problema novamente e diz: tá falando que comprei 3 pacotes de figurinha com um total de 27, aí tá perguntando quantas figurinhas que vem em 4 pacotes, aí essas 27 figurinhas vêm nos 3 pacotes juntos?

Pesquisadora: Vamos voltar no problema e ver.

Mariana: Eu acho que é, porque aqui tá falando no total.

Pesquisadora: Ok

Mariana: E quantas figurinhas vêm em cada pacote e ela começa falando devagar se nos se 3 vem 27, 4 pacotes... [Pausa pensando. Retoma novamente a fala com uma pergunta] Vinte e sete é em cada pacote ou nos 3?

Pesquisadora: Vamos ler de novo.

Mariana [lê o problema novamente até o momento que fala no total de 27 figurinhas]: Então é ao todo [faz uma pausa], tem que fazer 27 x 4?

Pesquisadora: Por que 27 x 4?

Mariana: Ah, porque 4 é maior que 3; então, se você tem 27 em 3, aí seria mais 1 quatro mais figurinhas no total.

Pesquisadora: Tá...faz o registro.

[Mariana registra]

Pesquisadora: e aí, o que você acha?

Mariana: Eu acho que deu muito, 3 pacotes vêm só com 27 figurinhas. Ao todo aí 4 pacotes não ia dar 108.

Pesquisadora: Então, como será que a gente pode resolver esse problema?

[Mariana fica pensativa]

Pesquisadora: Se você precisar, pode fazer um desenho para te ajudar a entender

Mariana: 27 dividido por 4?

Pesquisadora: Por que 27 dividido por 4?

Mariana: Para ver o tanto que vem em cada pacote. Aí, depois... somar esse tanto vezes 4.

[A entrevista é interrompida porque dois alunos entram na sala para buscar a televisão para outra professora e me pedem ajuda... Enquanto isso, Mariana registra o que pensou e tenta resolver e, quando eu volto, ela me fala]

Mariana: Eu acho que ainda está errado.

Pesquisadora: Por que que você acha que está errada?

Mariana: Porque já é muito e ainda multiplicar por quatro não vai dar.

Pesquisadora: Desenhe as 27 figurinhas.

[Mariana Começa a fazer o registro e vai contando uma a uma: 1, 2 ... 27]

Pesquisadora: Essas 27 figurinhas representam quantos pacotes?

Mariana: 3.

Pesquisadora: Então, o que a gente pode fazer agora?

Mariana: Eu tenho que dividir elas para 3 pacotes.

Pesquisadora: Então, tenta fazer para gente ver o que vai acontecer?

doi 10.34019/2594-4673.

Mariana: [começa a registrar, para e fala] eu vou fazer 27 dividido por 3, [usa os dedos para calcular] deu 9, então eu tenho ...[pausa] ... são 9 figurinhas em cada pacote.

Pesquisadora: Certo, mas o que o problema está perguntando?

Mariana: Quantas figurinhas que vêm 4 pacotes?

Pesquisadora: E então, como que faz?

Mariana: 27 dividido por 4?

Pesquisadora: Olha só, o que quer dizer esse 9 que você encontrou?

Mariana: Que tem que ter 9 em cada um dos 3 pacotes.

Pesquisadora: E a pergunta é o quê?

Mariana: Quantas figurinhas vêm em 4 pacotes?

Pesquisadora: Então?

Mariana: Eu tenho que fazer... [pausa]... 9 dividido por 4?

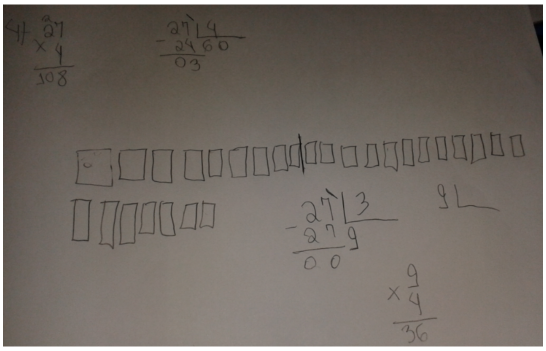
Pesquisadora: Vamos tentar então?

Mariana: [tenta fazer a operação] eu acho que não, porque vai dar menos que um [fica pensativa].

Pesquisadora: Se você sabe que cada pacote de figurinha vem com 9, como que eu faço para saber quantas vêm em 4 pacotes?

Mariana: 9 x 4 e responde dá 36; em 4 pacotes, vêm 36 figurinhas.

Figura 4 – Resolução feita por Mariana



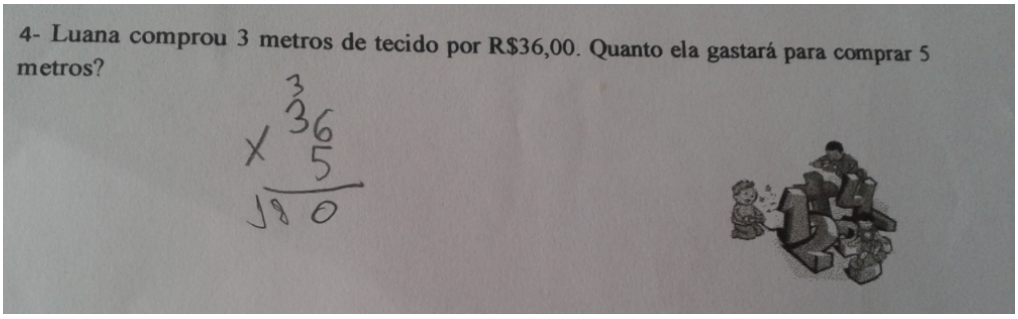
Fonte: Dados da pesquisa (FERRAZ, 2016).

É possível observar que a dificuldade inicial da aluna está na interpretação do problema, uma vez que ela questiona se as 27 figurinhas vêm nos três pacotes ou em cada um. Uma vez compreendida a situação, a dificuldade passa a ser operatória, e a aluna realiza inúmeras tentativas. A primeira, 27 vezes 4, sugere que Mariana tenta aplicar o esquema utilizado nos problemas de “um para muitos” para resolver a situação proposta. Ela parece ter consciência de que o resultado encontrado nessa tentativa não faz sentido em termos do que era proposto, procurando, assim, outra estratégia. Tal percepção leva a crer que a aluna possui algum mecanismo de controle, que a permitiu validar sua resposta, dizendo que o resultado encontrado por ela “deu muito”.

Em seguida, buscando outra forma de solucionar o problema, a aluna efetua a divisão 27 por 4 e comete um erro ao dividir, encontrando como resultado 60, e explica que o resultado também não era esse, ou seja, não fazia sentido. Mais adiante, com o auxílio de um desenho, ela consegue caminhar rumo à solução da situação proposta. Contudo, comete alguns equívocos e só por meio de questionamentos é que a solução é encontrada. A conversa acabou sendo conduzida de acordo com as respostas dadas pela aluna terminando no mesmo procedimento de resgate da “busca do valor unitário”.

Um teorema em ação falso (“se 3 pacotes vêm com 27 figurinhas; então, 4 pacotes terá 27 vezes 4 figurinhas”) utilizado por Mariana, assim como por vários alunos na turma em questão, pode ser identificado quando ela propõe calcular 27 vezes 4. Esse esquema sugere que o uso da relação “um para muitos”, esquecendo-se que 27 está relacionado a 3 pacotes. Esse procedimento se repete em outros registros de Mariana como ilustrado na Figura 5:

Figura 5 – Resolução de Mariana na atividade vídeo explicativo (06/07/2015)



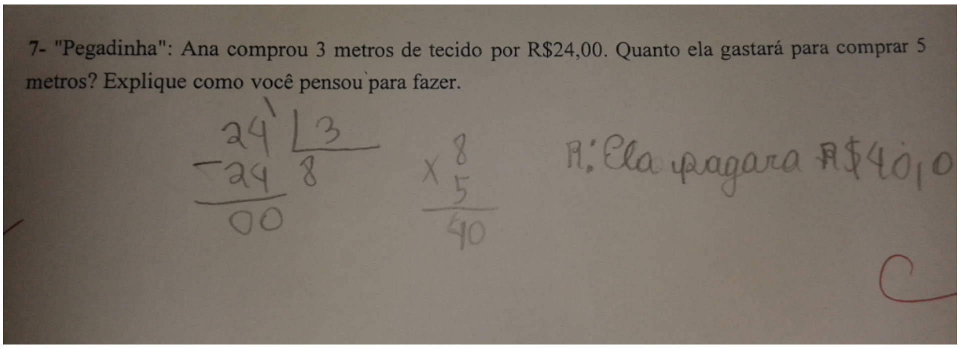
Fonte: Dados da pesquisa (FERRAZ, 2016).

Como essa atividade envolvia a explicação do que tinha sido feito, Mariana explica da seguinte forma a estratégia usada por elas (a atividade foi em dupla): “Aí a gente fez 36 vezes 5, que ficou igual a 180, é... A gente não tem certeza dessa, porque a gente fez e ficou com um pouco de dúvida, mas a gente fez, e o nosso raciocínio foi esse, eu tinha pensado em outra maneira só que a gente fez essa”. É possível observar que, assim como na primeira tentativa

10.34019/2594-4673.

feita no problema anterior, ela usa o teorema em ação: “Se 3 metros custam 36 reais, então 5 metros custarão 36 vezes 5”. Essa estratégia dá indícios de que a aluna utiliza o mesmo procedimento usado quando envolve a relação “um para muitos”, sem levar em consideração que são 3 metros de tecido, que custam 36 reais. Além disso, a explicação dada pela estudante sinaliza que ela ainda encontra dificuldades para resolver os problemas de quarta proporcional. Mais adiante, na avaliação bimestral, chamou-nos a atenção o fato de a aluna ter desenvolvido o problema de forma correta e aparentemente sem dificuldades[5], veja o registro da Figura 6:

Figura 6 – Trecho da avaliação bimestral realizada por Mariana em julho de 2015



Fonte: Dados da pesquisa (FERRAZ, 2016).

Nesse procedimento, Mariana efetua uma divisão para encontrar o valor correspondente à unidade e, com ele, por meio de uma multiplicação, obtém o valor correspondente à quantidade desejada. Nesse caso, a aluna chega ao valor pago por um metro de tecido, para, posteriormente, por meio da relação “um para muitos”, achar o valor pago por c metros de tecido.

Cinco meses após o término da pesquisa de campo, propus à Mariana, em uma entrevista, outra questão envolvendo a noção de quarta proporcional:

> *Sara preparou uma atividade para uma classe de 10 alunos. Para realizá-la, reservou 15 folhas de papel sulfite. Para fazer a mesma atividade em uma classe de 30 alunos, quantas folhas de papel sulfite seriam necessárias?*
>
> **Mariana:** Ô, Sara, ó, eu pensei assim de primeira... Eu pensei assim: se, para uma classe de 10 alunos, você reservou 15 que é ... 5 a mais que 10, né, 15..., então eu acho que 35 para uma classe de 30?

[5] Entendemos que não houve grandes dificuldades pelo fato de a aluna não ter demandado muito tempo na resolução nem haver marcas de borrachas que indicassem que havia apagado e tentado algumas vezes.

Pesquisadora: Ok, registra isso que você pensou para gente ver.

Mariana: Tá. [Registra] Pronto!

Pesquisadora: Olha só, se, para cada 10 alunos, eu reservei 15 folhas, você acha que se eu tiver 30 alunos serão necessárias 35 folhas?

Mariana: Não... São 10 alunos e reservou 15 folhas [pensa por alguns instantes], são 15 folhas para todos os 10 né?

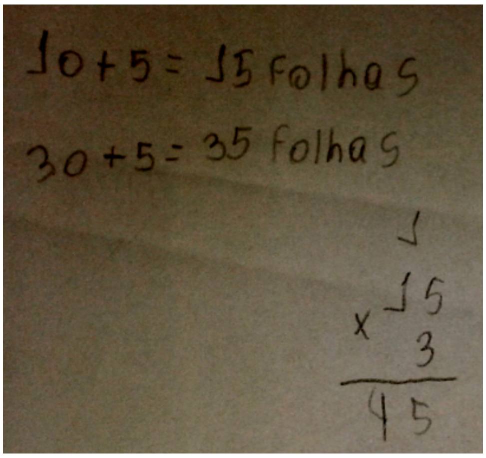
Pesquisadora: Para cada 10 alunos, são 15 folhas.

Mariana: Entendi, eu tenho 15 se é 30, então é 15 vezes 3... **[**A aluna registra a operação de multiplicação na folha] Deu 45!

Pesquisadora: Você acha que esse resultado agora faz sentido?

Mariana: Acho, é porque antes eu não tinha entendido.

Figura 7 – Entrevista realizada em dezembro de 2015



Fonte: Dados da pesquisa (FERRAZ, 2016).

A estratégia usada por Mariana nessa última situação reforça alguns aspectos discutidos anteriormente. Primeiro, existe uma dificuldade na interpretação da situação, que pode ser observada por meio desta fala da aluna: “São 15 folhas para todos os 10, né?”. E a segunda é que, quando Mariana avalia se o resultado encontrado faz sentido ou não em termos do que era proposto, a aluna denota mobilizar uma estrutura de controle. Inicialmente, ela apresenta uma estratégia aditiva. Quando convidada a refletir sobre o resultado encontrado, caminha para um procedimento adequado de solução que representa um teorema em ação distinto dos apresentados anteriormente, usando a propriedade linear da proporcionalidade e aplicando a razão entre medidas de mesma grandeza (se são 3 vezes mais alunos, triplo, serão 3 vezes mais folhas). Tal procedimento é identificado na literatura como procedimento escalar e, em geral, sugere a demonstração da compreensão de relações multiplicativas, primeiramente observadas para os valores da quantidade de alunos e, posteriormente, aplicada na quantidade de folhas.

A análise do processo vivido por Mariana revela que, em alguns momentos durante a realização de problemas relacionados à quarta proporcional, as estruturas de controle[6] mobilizadas por ela exerceram um papel fundamental. Como a aluna utilizou procedimentos diferentes durante o percurso, não temos elementos que nos permitam confirmar qual estratégia representa melhor o caminho percorrido por ela. Porém, parece-nos claro que existe um processo em andamento mobilizado em alguma medida pelas tarefas propostas, e que seria importante retomar esse tipo de situação em outros momentos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Segundo a Teoria dos Campos Conceituais, a aprendizagem se dá por um processo gradativo, interativo e reflexivo. Assim, é necessário tempo, reflexão, construções e reconstruções. Segundo Vergnaud (1990, p. 7), "as estruturas aditivas e multiplicativas da aritmética elementar se constroem, por exemplo, num período mais longo que os programas não conhecem". A aprendizagem do campo multiplicativo demanda tempo, planejamento adequado e conhecimentos por parte do professor.

O presente artigo procurou evidenciar o processo percorrido por Mariana, uma estudante com faixa etária e desempenho muito próximos ao da maioria de seus colegas. A aluna, juntamente com sua turma, foi estimulada a refletir sobre situações-problema variadas, bem como a explicar suas resoluções. Após alguns meses de trabalho nessa direção, ela começou a dar mostras de que compreendia a noção de quarta proporcional. Como ela, vários colegas também manifestaram uma maior compreensão da noção. Tudo isso sugere fortemente que a diversidade de situações propostas ao aluno, ao longo do tempo, favorece a constituição de um repertório de conhecimentos relacionados à noção em questão. Nesse sentido, o papel da professora-pesquisadora, enquanto mediadora das discussões estabelecidas, foi fundamental.

---

[6] A estrutura de controle tem a função de julgar a validade e adequação da ação realizada pelo sujeito que resolve um problema (Fornaza, 2016).

A análise evidencia que, no caso de Mariana, a retomada do enunciado das tarefas envolvendo a quarta proporcional e a reflexão a respeito dos caminhos adotados por ela para resolvê-las foram essenciais para a compreensão das situações propostas, bem como para a construção de esquemas. Embora a aluna tenha utilizado diferentes procedimentos de solução ao longo do percurso, com momentos de altos e baixos, consideramos que o trabalho desenvolvido proporcionou a ela uma valiosa oportunidade de reflexão e construção de conhecimentos sobre problemas vinculados ao campo estudado.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática**: Concepções e Experiências de Futuros Professores. 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, 2001.

CYRINO, M. C. de C. T.; JESUS, C. C. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 20, p. 751-764, 2014. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/FmP58nhXWgg8ZNQ3Q4gBCht/?format=pdf>. Acesso em: 16 jan. 2025.

FERRAZ, S. R. **Investigando a aprendizagem de noções associadas ao Campo Multiplicativo**: um estudo com alunos do 6° ano do Ensino Fundamental em uma escola pública de Ouro Preto (MG). 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2016.

FORNAZA, R. **Robótica Educacional aplicada ao ensino de física**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2016.

GITIRANA, V.; MENDONÇA, T. M.; MAGINA, S.; SPINILLO, A. **Repensando a multiplicação e divisão**: contribuições da teoria dos campos conceituais. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2014.

GONÇALVES, M. J. S. V. **Raciocínio Proporcional**: estratégias mobilizadas por alunos a partir de uma rodagem envolvendo a oralidade. 2010. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

MAGINA, S. **Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais para a formação de conceitos matemáticos**. [S. l.: s. n.], 2001.

MAGINA, S; MERLINE, V.; SANTOS, A. A Estrutura Multiplicativa sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais: Uma visão do Ponto de Vista da Aprendizagem. In:

SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2012, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: UFC, 2012. p. 1-12. Disponível em: <https://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/mesas/3/3.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2025.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. **Revista Investigação em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 7, p. 7-29, 2002.

PLACHA, C. K.; MINOTTO, R. Aprendizagem Matemática: solução de um problema de multiplicação do tipo produto de medidas. In: EDUCERE, 5., 2005, Curitiba. **Anais...** Curitiba: PUC-PR, 2005. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/com/TCCI013.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2025.

SCHLIEMANN, A. L. D., CARRAHER, D. Razões e proporções na vida diária e na escola. In: SCHLIEMANN, A. et al. (Org.) **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: UFPE. p.13-39, 1997.

VERGNAUD, G. La teoría de los campos conceptuales. CNRS y Université René Descartes. Tradução de Juan D. Godino. **Reserches en Didáctique des Mathématiques**, [S. l.], v. 10, p. 133-170, 1990. Disponível em: <https://www.ecosad.org/laboratorio-virtual/images/biblioteca-virtual/bibliografiagc/teoria-de-campos-conceptuales-vergnaud-1990.pdf>. Acesso em: 16 jan. 2025.

______. Pourquoi la théorie des champs conceptuels? **Journal for the Study of Education and Development**, [S. l.], v. 36, n. 2, p. 131-161, 2013. Disponível em: <https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.1174/021037013806196283>. Acesso em: 16 jan. 2025.

HISTÓRICO

Submetido: 19 de agosto de 2024.
Aprovado: 29 de janeiro de 2025.
Publicado: 30 de janeiro de 2025.