



## Contribuições das Autoanálises de Erros como ferramenta metodológica para identificação e prevenção de entraves em Cálculo Diferencial e Integral IV

Contributions of Self-Analysis of Errors as a methodological tool for identifying and preventing obstacles in Differential and Integral Calculus IV

**Celso Eduardo Brito**<sup>1</sup>

*Instituto Federal da Bahia campus Eunápolis*

**Samantha Carla Souza Silva**<sup>2</sup>

*Instituto Federal da Bahia campus Eunápolis*

### RESUMO

O principal objetivo deste estudo consiste em examinar os erros enfrentados durante a compreensão dos objetos matemáticos presentes na ementa do componente curricular Cálculo Diferencial e Integral IV, utilizando como alicerce a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e a Teoria Antropologia do Didático, nos cursos superiores de Bacharelado em Engenharia Civil oferecido pelo campus Eunápolis do Instituto Federal da Bahia. Para tanto, como percurso metodológico foram realizadas análises das avaliações e autoanálises referentes a duas turmas dos segundos semestres de 2022 e 2023, procurando investigar quais fatores foram protagonistas no surgimento dos erros identificados. Observou-se que erros associados aos registros de representações algébricas se destacam em ambas as turmas, remetendo a uma defasagem de conhecimento ligada a essa representação específica, advinda de lacunas associadas ao Ensino Básico. Ao estudar as autoanálises, percebe-se a influência que as práticas metodológicas podem infundir no processo de aprendizado do discente, contribuindo na superação de erros ou auxiliando na prevenção destes. Em contrapartida, ao discorrerem sobre seus erros, os discentes conseguem derrubar a resistência de senso comum que tinham outrora, de identificar suas lacunas de conhecimento e buscar melhorias no campo necessário para futuros êxitos. Além disso, os estudantes passam a utilizar as autoanálises como um meio para externar suas angústias e receios, propiciando ao docente um acesso direto ao contexto sociocultural e psicológico dos seus alunos.

**Palavras-chave:** Autoanálises de Erros; Cálculo Diferencial e Integral; Registros de Representação; Erros.

### ABSTRACT

The main goal of this study is to examine the errors that occur during the understanding of the mathematical objects present in the syllabus of the curricular component Differential and Integral Calculus IV, using as a foundation the Theory of Semiotic Representation Registers and the Anthropology Theory of Didactics, in higher education courses in Civil Engineering offered by the Eunápolis campus of the Federal Institute of Bahia. To this end, as a methodological approach, analyses of assessments and self-analyses were carried out regarding two classes from the second semesters of 2022 and 2023, seeking to investigate which factors were protagonists in the emergence of the identified errors. It should be noted that errors associated with the registers of algebraic representations stand

---

<sup>1</sup> Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências na Universidade Federal da Bahia (UFBA). Docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA), Eunápolis, Bahia, Brasil. Av. David Jonas Fadini, S/Nº, Rosa Neto - Eunápolis - Ba, CEP 45823-431. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-6535-4860>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/6238772305280304>. E-mail: [celsoedu@ifba.edu.br](mailto:celsoedu@ifba.edu.br).

<sup>2</sup> Graduanda em Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal da Bahia (IFBA), campus Eunápolis, Eunápolis, Bahia, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Cristóvão Colombo, 134, 1º Andar, Pequi, Eunápolis, Bahia, Brasil, CEP: 45828-156. ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0008-9033-7323>. Lattes: <https://lattes.cnpq.br/5492057374068022>. E-mail: [samanthacarlass@gmail.com](mailto:samanthacarlass@gmail.com).

out in both classes, referring to a gap in knowledge linked to this specific representation, arising from gaps related to Basic Education. When studying self-analysis, one can see the influence that methodological practices can have on the student's learning process, contributing to overcoming errors or helping to prevent them. On the other hand, by disagreeing about their mistakes, students are able to resolve the common sense resistance they previously had, identify their gaps in knowledge, and seek improvements in the field necessary for future success. Furthermore, students begin to use self-analysis as a mean to express their anxieties and feelings, providing teachers with direct access to the sociocultural and psychological context of their students.

**Keywords:** Self-analysis of errors; Differential and Integral Calculus; Registers of Representation; Errors.

## INTRODUÇÃO

Em disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral IV, a presença de erros é um motivo de angústia para os estudantes e muitas vezes para o docente. Existe uma preocupação para os educadores de saber se estes erros comprometem significativamente o processo de ensino e aprendizagem, e o que pode ser feito nesse caso. Para entender o que leva ao erro, primeiramente é necessário considerar como decorre o processo de aprendizado. Desse modo, o presente estudo se apoia em duas teorias da Didática da Matemática: a Teoria Antropológica do Didático, cujo enfoque está nas relações sujeito-instituição-saber presente nos sistemas de ensino; e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que discute os objetos matemáticos no concernente as suas diversas representações.

O foco dessa pesquisa se concentrou nos erros presentes nas produções dos discentes, inclusive observados do ponto de vista deles, mediante suas autoanálises (manuscritos desenvolvidos mediante organização prévia estabelecida pelo docente). Esse estudo objetiva demonstrar como o uso das autoanálises de erros no papel de ferramenta metodológica pode auxiliar a identificar as principais dificuldades dos estudantes com a metodologia empregada pelo docente, bem como orientar este na adoção de novas práticas que enriqueçam os processos de ensino e do aprendizado. Para isso, realizamos uma pesquisa quantitativa, através do refinamento das informações fornecidas nas autoanálises das turmas 2022.2 e 2023.2 da disciplina Cálculo Diferencial e Integral IV, pertencentes ao curso de Engenharia Civil do IFBA, Campus Eunápolis.

## REFERENCIAL TEÓRICO

Discutiremos a seguir as duas teorias da Didática da Matemática nas quais o presente estudo se apoia, trazendo um breve resumo de suas principais noções e sua relevância para a discussão acerca do tema.

## Teoria Antropológica do Didático

Desenvolvida por Yves Chevallard em 1992, esta teoria considera o contexto sociocultural que permeia os indivíduos durante os processos de aprendizagem e ensino da matemática no intuito de estudar as práticas institucionais relativas aos objetos de saber. Para tanto, o autor estabelece quatro noções fundamentais: objeto, relação pessoal, sujeito e instituição.

A primeira noção, objeto, se baseia na percepção própria do autor de que *tudo* é um objeto, sendo ou não tangível, desde que *exista* para pelo menos um indivíduo ou Instituição. A relação pessoal se trata do conjunto de interações que um indivíduo possa estabelecer com um Objeto. Conforme o tempo passa, o indivíduo muda, pois, ao conhecer novos objetos e abandonar outros, seus sistemas de relações pessoais também variam. Um sujeito é, então, o conjunto das relações pessoais que estabeleceu com um objeto em determinado momento. Por fim, a instituição abrange um conjunto de regras e normas impostas nas formas de se fazer e pensar em relação a determinado objeto de saber. Percebe-se, então, como um mesmo objeto pode possuir mais de uma relação pessoal a depender da instituição com a qual se relaciona.

A praxeologia desta teoria se apoia nos conceitos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Do ponto de vista geral, o conceito de tarefa remete à realização de ações em busca de um determinado objetivo: tocar uma música, ir trabalhar, cozinhar, entre outras ações rotineiras, são exemplos. Do ponto de vista da Didática da Matemática, a tarefa constitui-se de um exercício, exemplo ou problema, sendo a mesma sem ambiguidades, contendo um verbo no infinitivo e pode obter sub tarefas. A técnica é uma forma, ou um conjunto destas que permita realizar o objetivo proposto pela tarefa.

No entanto, podem ocorrer situações em que não há, na instituição na qual a tarefa se encontra, uma técnica que permita alcançar o resultado esperado. Por este motivo, Henriques (2019, p. 58) destaca a importância da diferenciação entre exercício, exemplo e problema, uma vez que “em toda a tarefa, têm-se um objetivo a ser alcançado, porém, para o problema enquanto tarefa, o sujeito que deseja resolvê-lo, em geral, desconhece um encaminhamento imediato para atingir esse objetivo”. Quando isso ocorre, é possível que novas técnicas sejam produzidas a partir da adaptação de técnicas já conhecidas. Assim, constrói-se um novo saber fazer dentro

da instituição, que precisa ser verificado e organizado a fim de possuir funcionamento regular dentro desta.

A tecnologia é uma ferramenta que permite explicar e justificar a técnica. A teoria é aquilo que justifica a tecnologia como ferramenta. Por exemplo, suponha-se que em determinada tarefa se pede para determinar os pontos críticos de uma função de várias variáveis  $z = f(x, y)$ . A técnica é o raciocínio que o estudante utilizará para chegar a este resultado: realizar as derivadas parciais, obtendo um sistema e solucionando este. Para tanto, ele utilizará o conceito de derivadas parciais, é esta a tecnologia. Tendo obtido estas, o aluno sabe pelo conhecimento que obteve ao aprender derivadas parciais que um ponto é crítico de  $f$  se as derivadas parciais são iguais a zero ou se  $f$  não é diferenciável naquele ponto, sendo esta a teoria.

Retornando à noção de objeto apresentada anteriormente, a qual possui destaque na teoria apresentada, é preciso considerar dois conceitos referentes à natureza de um objeto quando este se encontra inserido em uma praxeologia ligada às atividades matemáticas (Almeida, 2022). Um objeto pode ser de natureza não ostensiva ou ostensiva; no primeiro caso, trata-se de ideias, noções e conceitos que, para serem visualizados e compreendidos, evocam o segundo tipo, que possuem certa materialidade e são manipuláveis. Por exemplo, ao lidar com o conceito de função (objeto não ostensivo) em sala de aula, o professor recorrerá a um gráfico (objeto ostensivo) para demonstrar aos estudantes o comportamento desta.

Ao considerarmos o ensino e aprendizagem da matemática, percebemos que a relação entre objetos ostensivos e não ostensivos é constantemente utilizada. Conforme Almouloud (2010, p. 71), “um objeto matemático não existe sem suas diferentes representações e pontos de vista”. Isso vem da dificuldade de se enxergar um objeto matemático: ele não existe fisicamente, apenas no campo mental. Sua visualização dependerá, portanto, das representações desse objeto. É neste ponto que se faz importante a evocação da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, detalhada a seguir.

### **Teoria dos Registros de Representação Semiótica**

Desenvolvida por Raymond Duval em 1999, essa teoria estuda as diferentes representações de um objeto e suas manipulações. Três conceitos fundamentam a teoria: representação semiótica, signo e registros de representação.

A representação semiótica está ligada à exposição de uma ideia ou um objeto de saber com a mobilização de sinais (Henriques, 2019). Um signo é um sinal mobilizado por alguém que representa algo dentro de um sistema de representação semiótica; nada mais é que uma codificação inserida dentro de um sistema, que necessita ser decodificada para ocorrer compreensão. Os registros de representação se tratam de sistemas, compostos de signos, nos quais um objeto não ostensivo é representado e identificado, ou seja, externado por meio de objetos extensivos. Na prática de atividades matemáticas, os registros usualmente utilizados são: registro da língua materna, registro numérico, registro algébrico e registro gráfico. Por exemplo, um enunciado de uma tarefa que pede para se determinar uma integral qualquer é uma representação semiótica do objeto matemático integral, utilizando signos (letras, números, símbolos matemáticos) para expor este objeto, o qual é inicialmente apresentado no registro algébrico.

Quando se fala em processo de aprendizagem de objetos de saberes matemáticos, pela perspectiva desta teoria, é necessário atender três condições fundamentais ligadas ao comportamento cognitivo: formação, tratamento e conversão. A primeira é definida por Henriques (2019, p. 73):

A formação de uma representação semiótica é baseada na aplicação de regras de conformidade e na seleção de certas características do conteúdo envolvido. Por exemplo, a composição de um texto, construir uma figura geométrica, elaborar um esquema, escrever uma fórmula, descrever o domínio de uma função etc.

O tratamento consiste em transformar uma representação em outra do mesmo registro. Já a conversão trata da transformação de uma representação de um objeto em outra, de um registro diferente. É muito importante destacar que não se pode converter um registro para outro, e sim converter as representações de um objeto em um dado registro nas representações deste mesmo objeto pertencentes a outro registro. Ainda, Duval salienta que não basta que o indivíduo disponha de diversos registros de representação de um objeto para ter, de fato, a compreensão do objeto: é preciso que ele identifique o objeto em quaisquer registros de representação que este, porventura, seja apresentado.

Falar de registros é colocar em jogo o problema da aprendizagem e dar ao professor um meio que poderá ajudá-lo a tornar acessível à compreensão da matemática. A

noção de registro permite salientar a importância da mudança de registro e considerar a necessidade de uma coordenação de registros. Uma mudança de registro tem vantagens do ponto de vista do tratamento, podendo facilitar a compreensão ou descoberta. (Almouloud,2010, p. 72)

Portanto, a coordenação é a capacidade de identificar as diversas representações de um mesmo objeto do saber em seus vários registros. Duval considera que a coordenação de pelo menos dois registros é uma condição necessária para a compreensão conceitual dos objetos matemáticos.

Discutiremos uma última noção, necessária tanto aos docentes quanto aos discentes no ambiente de aprendizado. A noção de quadro baseia-se nas diferentes abordagens e domínios matemáticos, não relacionada a sistemas semióticos, o que não exclui sua consideração para Duval. Nesse sentido, olhar um objeto em diferentes quadros é ter diferentes pontos de vista: maneiras diferentes de olhá-lo, fazê-lo funcionar e, eventualmente, de defini-lo (Almouloud, 2010). Um mesmo quadro pode, então, possuir diferentes registros. Porém, a mudança de quadros e de registros não correspondem: a mudança de quadros não constitui dificuldades para o aluno por ser pensada/sugerida pelo professor. Já a mudança de registro exige do aluno a compreensão dos conceitos e propriedades matemáticas que permitam realizar tal conversão, onde podem ocorrer dificuldades. Na mudança de quadros, o conhecimento prévio e a compreensão da matemática são necessários, de modo que os professores são capazes de perceber a mudança, enquanto o estudante não (Almouloud, 2010).

Dessa forma, a compreensão das representações do objeto estudado e das abordagens nas quais este funciona é necessária ao estudante no processo de aprendizado. O professor pode auxiliar na compreensão dos objetos matemáticos estudados utilizando uma abordagem metodológica constituída de tarefas que incentivem a prática de coordenação entre os Registros de representação e utilização de diferentes pontos de vista em suas resoluções.

## **METODOLOGIA**

O presente estudo é um recorte de uma pesquisa maior, intitulada *Erros e Obstáculos relativos à Saberes Matemáticos: Uma Análise à Luz de Teorias em Didática da Matemática*, iniciada em 2019 e aprovada no Comitê de Ética em Pesquisa — CEP/IFBA. Consiste em uma pesquisa quantitativa realizada através do levantamento de erros de duas turmas (nos semestres

letivos 2022.2 e 2023.2) da disciplina Cálculo Diferencial e Integral IV, pertencentes ao curso de Engenharia Civil do Instituto Federal da Bahia, campus Eunápolis. Esse levantamento foi realizado a partir da análise minuciosa das avaliações e autoanálises de erros dos discentes; por isso, discutiremos inicialmente a natureza das autoanálises de erros, para melhor compreensão.

O docente utiliza uma abordagem metodológica que dispõe do exposto no referencial teórico para criar um modelo de análise de erros demonstrada na Figura 1, intitulada pelo mesmo como Autoanálise de Erros por serem confeccionadas pelos discentes. No início de cada semestre, os estudantes também recebiam uma apostila com orientações para a confecção.

**Figura 1:** Modelo das Autoanálises de Erros.

**AUTOANÁLISE DE ERROS**  
**ESTUDANTE:** *Nome do discente*

Segue abaixo a descrição analítica dos erros, em seus respectivos registros, encontrados na avaliação em dupla/grupo (Parcial# / Final#):

**Introdução**

**Quadro 1 – Quantidade de Erros/Registros de Representação**

QUANTIDADE DE ERROS			
Prévios	Atuais	Atenção	Outros
Língua Materna	Registro Algébrico	Registro Gráfico	Registro Numérico

*Fonte:* Sobrenome do discente, ano.

**Autoanálise %**

**Fonte:** Dados da Pesquisa, 2024.

Através da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, o docente desenvolveu um sistema de signos, disposto na Figura 2, que categoriza os erros em quatro classificações: erros de atenção, erros de conhecimentos prévios, erros de conhecimentos atuais e outros erros. Os discentes deveriam, após a publicação do gabarito, reavaliar suas resoluções nas avaliações e classificar os erros obtidos conforme os símbolos.

**Figura 2:**Classificação dos Erros.

CATEGORIA DO ERRO	SIMBOLOGIA
<i>Erros de Conhecimentos Prévios</i>	☹️
<i>Erros de Conhecimentos Atuais</i>	😞
<i>Erros de Atenção</i>	⚠️
<i>Outros Erros</i>	🕒

Fonte: Dados da Pesquisa, 2024.

Para conseguirem identificar, recebam orientações detalhadas acerca dessas classificações, dispostas para visualização no Quadro 1.

**Quadro 1:**Detalhes das Categorias de Erros.

Categoria do Erro	Detalhamento
Conhecimentos Prévios	Erros relacionados a conceitos necessários para o desenvolvimento da questão que foram vistos desde a educação básica até o crédito anterior à aplicação dessa atividade.
Conhecimentos Atuais	Erros relacionados a não apropriação do conteúdo matemático, necessário para resolução dos problemas matemáticos da atividade.
Atenção	Esquecimento de sinais, contas simples, manipulações algébricas erradas por falta de atenção; Erros de manipulações de calculadoras ou outros instrumentos tecnológicos; Erros relacionados à leitura parcial ou equivocada de enunciados de questões; escritas incorretas de simbologia matemática por falta de atenção e não por não conhecimento.
Outros Erros	Falta de tempo para resolução de questões; Erros por dispersões contínuas, geradas pelo psico-cognitivo do indivíduo, entre outros fatores que dispersam; Erros por organização da resolução; Erros por esboços gráficos aparentemente corretos, mas faltando dados visuais que o invalidam parcialmente; Erros em grafia ou concordância na escrita das soluções; outros erros que não se classificam nas categorias acima.

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2024.

Esses erros deveriam ser, obrigatoriamente, associados a algum dos registros de representação mencionados anteriormente: registro da língua materna, registro algébrico,



registro numérico e registro gráfico. O Quadro 2 explicita as orientações para essa associação ocorrer.

**Quadro 2:** Erros associados aos Registros de Representação.

Registro de Representação	Erros
Língua Materna	Erros, cujas representações são relativas às escritas feitas de forma incorreta, gramaticalmente na linguagem corrente e na linguagem matemática simbólica, ou a não interpretação de enunciados de exercícios e problemas diversos.
Registro Algébrico	Erros, cujas representações são relativas à linguagem algébrica exclusivamente, como por exemplo: erros em fatorações de polinômios, equações, limites, derivações, integrações, não identificação e escrita de equações de diversos entes geométricos, e tudo relacionado ao uso de variáveis em geral.
Registro Gráfico	Erros, cujas representações são relativas à interpretação de gráficos, falhas em esboços em geral, como não marcações de elementos de plano cartesiano e elementos gráficos das curvas, não identificação de entes geométricos indicados pelas suas equações, não visualização da situação geométrica de um problema matemático etc.
Registro Numérico	Erros, cujas representações são relativas às situações exclusivas do campo aritmético, como erros de contas, jogo de sinais, m.m.c., cálculo de potências, ângulos, operações com números reais etc.

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2024.

Nessa abordagem, o sujeito se constitui de cada aluno de ambas as turmas, individualmente; já a instituição é a disciplina Cálculo Diferencial e Integral IV. Para falar sobre os objetos matemáticos estudados, teremos algumas observações a fazer. A turma 2022.2, composta de 10 estudantes, foi a primeira turma de Cálculo Diferencial e Integral IV pós-pandemia; nessa turma, havia estudantes que haviam iniciado a graduação com aulas remotas via *Google Meet* com assistência na plataforma *Moodle*, devido à pandemia. Por esse motivo, houve alterações na ementa da disciplina logo no primeiro crédito para abarcar conteúdos que não puderam ser vistos no momento de aulas remotas. O Quadro 3 dispõe dos objetos matemáticos estudados por essa turma.

**Quadro 3:** Objetos Matemáticos para a Turma 2022.2.

<b>Primeiro Crédito</b>	Funções de Várias Variáveis: Máximos e Mínimos; Campos Escalares e Vetoriais; Derivadas Direcionais; Gradiente, Divergente e Rotacional; Campos Conservativos.
<b>Segundo Crédito</b>	Integrais Duplas: Definição e Interpretação Geométrica; Propriedades e Cálculo de Integrais; Mudanças de Variáveis; Aplicações Físicas. Integrais Triplas: Definição e Propriedades; Cálculo de Integrais; Mudança de Variáveis.
<b>Terceiro Crédito</b>	Integrais Curvilíneas: Integrais de Linha de Campos Escalares; Integrais de Linha de Campos Vetoriais; Integrais independentes do caminho de Integração; Teorema de Green; Integrais de Superfícies: Representação paramétrica de superfícies, Plano Tangente, Reta Normal e Superfícies Suaves, Áreas de Superfícies, Integrais de Campos Vetoriais; Teorema de Stokes e Teorema da Divergência.

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2024.

Já a ementa da disciplina da turma 2023.2 sofreu uma redução, devido à necessidade de se completar o semestre dentro do ano de 2023, havendo apenas o primeiro e segundo crédito. O Quadro 4 dispõe dos objetos matemáticos estudados por essa turma.

**Quadro 4:** Objetos Matemáticos para a Turma 2022.2.

<b>Primeiro Crédito</b>	Campos Escalares e Vetoriais; Derivadas Direcionais; Gradiente, Divergente e Rotacional; Campos Conservativos; Integrais Duplas: Definição e Interpretação Geométrica; Propriedades e Cálculo de Integrais; Mudanças de Variáveis; Aplicações Físicas.
<b>Segundo Crédito</b>	Integrais Triplas: Definição e Propriedades; Cálculo de Integrais; Mudança de Variáveis. Integrais Curvilíneas: Integrais de Linha de Campos Escalares; Integrais independentes do caminho de Integração.

Fonte: Elaborado pelos Autores, 2024.

Ademais, os discentes possuíam acesso a fóruns online na plataforma *Moodle*, onde conseguiam discutir suas dificuldades em conjunto e ajudar uns aos outros, ao passo que também eram auxiliados pelo docente e monitor. Eram utilizadas também oficinas tecnológicas pelo docente, com intuito de aproximar os discentes dos objetos matemáticos estudados através da visualização destes no *software GeoGebra*. Através destas duas ferramentas utilizadas na metodologia do docente, os discentes conseguiam evoluir a sua relação pessoal com os objetos matemáticos estudados, como disposto em diversos relatos presentes nos fóruns e autoanálises.

Esse primeiro crédito está sendo bem interessante, pois não tinha muitas noções de vetores, e aprender campos vetoriais e escalares com o *GeoGebra* é incrível. Com visualizações interativas e experimentação prática, fica mais fácil entender esses conceitos, e explorar aplicações reais e até simular fenômenos. Ainda tenho algumas dificuldades básicas com o uso da ferramenta, mas acredito que logo poderei estar dominando esse software que tem muito a nos oferecer (Estudante A, 2023).

Em todas as parciais e avaliações finais, os discentes poderiam contar com o *software GeoGebra* para visualizar os objetos não ostensivos abordados e realizar manipulações para verificação das resoluções através dos comandos ensinados em sala de aula e oficinas tecnológicas. Dessa forma, esperava-se que ao criar uma relação pessoal com o *software*, utilizando-o como um meio ostensivo para externar e visualizar objetos não ostensivos, o estudante passasse a desenvolver suas próprias técnicas de resolução das tarefas, sempre apoiadas na teoria, que facilitassem seu processo de aprendizado e, ao mesmo tempo, influenciasse na sua relação pessoal com os objetos não ostensivos estudados.

As autoanálises de erros totalizavam 25% da nota final da disciplina, funcionando como uma espécie de redenção ao estudante que não obtivesse boa nota nas parciais, que representavam a totalidade de 20% da nota final. Além disso, as parciais eram aplicadas em duplas/trios, inseridas dentro de um grupo sorteado pelo docente no início do semestre letivo. Diante do que até aqui foi exposto, discutiremos os resultados obtidos da pesquisa em cada turma, separadamente, verificando ao final a influência das autoanálises de erros no desenvolvimento do processo de aprendizado dos Sujeitos.

## ANÁLISES E RESULTADOS

Iniciaremos pelas autoanálises da turma 2022.2. Essa turma era constituída de 10 estudantes, dos quais metade eram estudantes cursando a disciplina no semestre correspondente ao da grade curricular, enquanto a outra metade eram estudantes de semestres mais avançados no curso. Este é um fator que, por si só, já poderia influenciar na ocorrência de maior número de erros para os estudantes de semestres mais avançados.

A disciplina envolve objetos matemáticos relacionados aos objetos Integrais e Derivadas, vistos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II no segundo semestre da graduação; assim, quanto maior o tempo desde que o estudante concluiu Cálculo Diferencial e Integral II, provável que sua relação pessoal com os objetos matemáticos citados não fosse a

mesma de outrora, que já não recordasse as propriedades e manipulações aprendidas anteriormente.

O conteúdo de integrais duplas dado essa semana me deixou bastante angustiada no que se refere aos pré-requisitos. Questões mais complexas de integral que exigem métodos como o de substituição ou por partes não me recordo e sei que isso afetará meu desenvolvimento nesse crédito. Além disso, com a aplicação da oficina tecnológica, é mais do que visível que ainda não tenho habilidade o suficiente para manipular o *GeoGebra*, pois apesar de conseguir esboçar a região de integração no 2D, encontrei muita dificuldade para desenvolver no 3D, na qual tive problemas que não foram solucionados, mesmo com ajuda de outros colegas que tiveram a disposição para me explicar, além de que, infelizmente, há pouco conteúdo relevante na internet sobre tal manuseio (Estudante M, 2022).

Nesta turma, realizaram-se três parciais, uma por crédito, e duas avaliações finais; as parciais eram aplicadas na metade de cada crédito, abordando o conteúdo estudado até ali, enquanto as finais abordavam todo o conteúdo do crédito e eram aplicadas no final deste. O 2º crédito não possuiu uma avaliação final, por ser aplicado um trabalho em grupo como requisito para obtenção de nota. Todas as tarefas presentes nas parciais e finais eram desenvolvidas de modo que o estudante exercesse a coordenação entre pelo menos dois registros de representação (geralmente, entre os registros de língua materna e algébrico), além da possibilidade de inserir o *software* nas técnicas de resolução. Destaca-se, abaixo, o enunciado de uma destas tarefas:

Determine e classifique os pontos críticos da função  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ .

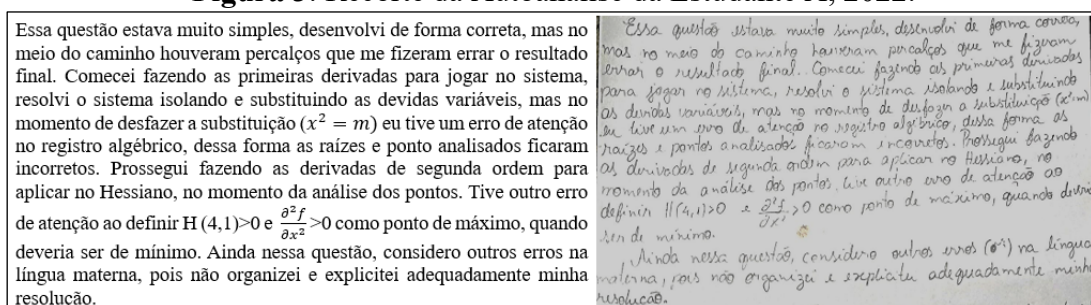
As técnicas necessárias para conclusão dessa tarefa incluiriam: determinar as derivadas parciais da função dada, estabelecer um sistema com as derivadas parciais igualadas à zero, isolar uma das variáveis em função da outra para determinar os seus valores, obter os valores da outra variável e por fim, aplicar esses valores das duas variáveis na função dada para obter um conjunto de pontos. A classificação desses pontos seria dada pelo determinante hessiano.

Observa-se que seria necessária uma boa manipulação dos objetos não ostensivos utilizados (derivadas parciais, sistemas e matrizes) para que o discente conseguisse prosseguir na execução da tarefa. Também seria preciso que a conversão da representação do objeto no registro da língua materna para sua representação no registro algébrico ocorresse sem más interpretações: o enunciado claramente pede que se determine e classifique os *pontos*, no plural, o que já indicaria ao estudante que a variável  $x$  e a variável  $y$  assumiriam mais de um valor,

cada. Havendo essa compreensão, por fim, o tratamento no registro algébrico deveria ser realizado com atenção.

Ao relatar sua resolução da Tarefa, presente na **Figura 3**, a estudante A descreve como ocorreu erro de atenção no registro algébrico quando se esqueceu de calcular as raízes para  $m = 4$  e  $m = 1$  uma vez que havia realizado uma substituição  $m = x^2$ . Destaca também que a falta de organização na resolução se classifica como outros erros na língua materna.

**Figura 3:** Recorte da Autoanálise da Estudante A, 2022.



**Fonte:** Autoanálise da Estudante A, 2022.

Em seu relato, a discente A menciona um erro de atenção na classificação dos pontos, mas não faz a associação a nenhum registro de representação. A seguir, destacamos o enunciado de uma tarefa na qual ocorreram muitos erros de conhecimento atual associados ao registro algébrico: 80% dos discentes não conseguiram obter êxito na realização da tarefa.

Suponha que a temperatura no ponto  $(x, y, z)$  do espaço seja dada por:

$$T(x, y, z) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}$$

em que  $T$  é a medida em graus celsius e  $x, y, z$  em metros. Em que direção no ponto  $(1, 1, -2)$  a temperatura aumenta mais rapidamente (*indique essa direção graficamente*)? Qual é a taxa máxima de aumento?

Nesta tarefa, o discente deveria utilizar a técnica de derivadas parciais para obter o gradiente, aplicar em  $\nabla T$  o ponto dado e assim obter a máxima direção e a taxa máxima. Para esboço o gráfico, o discente deveria se apoiar no conhecimento de que o ponto final do vetor gradiente é obtido mediante a soma das coordenadas do ponto inicial às coordenadas do gradiente no ponto; assim, seria possível esboçar o vetor no *software GeoGebra* com o comando vetor (<ponto>, <ponto>). Ainda assim, metade dos discentes demonstrou dificuldades na manipulação das derivadas parciais. Alguns não haviam compreendido o objeto não-ostensivo

derivadas parciais e não sabiam realizar a sua manipulação, como a Figura 4 dispõe, mesmo que soubessem realizar o restante das conversões e tratamentos necessários para a tarefa. Este erro de conhecimentos atuais no registro algébrico cometido pela estudante K e outros estudantes, facilmente poderia ter sido evitado pela manipulação do *software GeoGebra* ao utilizar o comando derivada (função, variável).

**Figura 4:** Resolução da Estudante K, 2022.

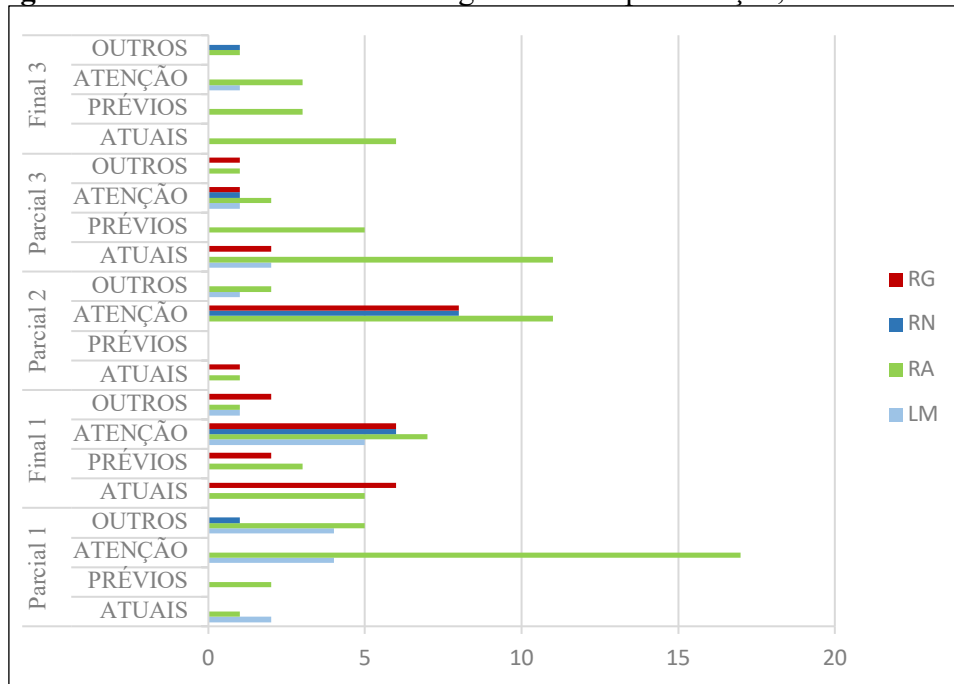
$T(x, y, z) = \frac{80}{1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2}$  ;  $P(1, 1, -2)$   
 em uma curva a direção do crescimento e decréscimo de uma função, é o gradiente.  
 $\nabla T = \frac{40}{x} \vec{i} + \frac{20}{y} \vec{j} + \frac{80}{z} \vec{k}$  ☹️ R.A  
 No ponto  $P(1, 1, -2)$   
 $\nabla T(1, 1, -2) = 40\vec{i} + 20\vec{j} - \frac{80}{12}\vec{k}$

**Fonte:** Autoanálise da Estudante K, 2022.

A Figura 5 apresenta um gráfico que distribui os erros associados aos registros de representação para cada atividade avaliativa administrada nessa turma. Percebe-se que as dificuldades de conversão das representações dos objetos no registro da língua materna para outros registros de representação diminuem com o passar dos créditos, ocasionando menos erros relacionados ao registro da língua materna. Porém, o registro algébrico tem um quantitativo muito maior que os outros registros em quaisquer categorias de erros, mas principalmente quando relacionado aos erros de atenção.

A maioria dos erros desta turma, de fato, se dava pelas dispersões psicológicas durante o tratamento no registro algébrico dos objetos. No entanto, raramente ocorriam erros de atenção quando necessário tratamento no registro numérico, o que pode evidenciar uma dificuldade dos estudantes de lidar com as representações algébricas dos objetos não ostensivo estudados, advinda de uma deficiência no Ensino Básico que se perpetua para o Ensino Superior. As autoanálises destacam, ainda, uma dificuldade relacionada a manipulação do ostensivo gráfico em relação aos objetos estudados: muitas vezes, esses erros de atenção e conhecimentos atuais associados ao registro gráfico se dava pela dificuldade dos estudantes em esboçar as representações gráficas dos objetos no *software GeoGebra*.

**Figura 5:** Erros relacionados aos Registros de Representação, Turma 2022.2.



Fonte: Dados da Pesquisa, 2024.

Diante das dificuldades expostas pelos relatos das autoanálises da turma 2022.2, o docente optou por insistir nas oficinas tecnológicas, agora nomeadas sequências didáticas. Uma vez que os discentes relataram maior facilidade de compreensão dos objetos não ostensivos através da manipulação destes no *GeoGebra*, acreditou-se que uma maior atenção no ensino dos comandos do *software* seria benéfica para as turmas posteriores.

A turma 2023.2 era constituída de 10 estudantes, na qual 8 destes eram de semestres mais avançados. Poucos estudantes que iniciaram a graduação no período remoto chegaram à disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, que atua como pré-requisito para Cálculo Diferencial e Integral IV, devido ao retorno das aulas presenciais e evasão do curso. Dos que se mantiveram, poucos conseguiram concluir a disciplina por apresentarem dificuldades em se ajustar ao ritmo de aulas presenciais. Nesta turma, realizaram-se duas parciais, uma por crédito, e duas avaliações finais; as parciais eram aplicadas na metade de cada crédito, abordando o conteúdo estudado até ali, enquanto as finais abordavam todo o conteúdo do crédito e eram

aplicadas no final deste. O 3º crédito não possuiu uma avaliação final nem parcial, por ser aplicado um trabalho em grupo como requisito para obtenção de nota.

Uma das diversas tarefas propostas nestas avaliações continha sub tarefas. Trazemos o seu destaque, focando na sub tarefa b.

Considere as funções de  $f$ ,  $g$  e  $h$  a seguir:

$$f(x, y, z) = \cos xy + eyz + \ln(zx), g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 \text{ e } \vec{h}(x, y, z) = (y^2 - x^2)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}.$$

b) Calcular a derivada direcional de  $f$  no ponto  $P_2(1,0,1)$ , na direção do vetor  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ;

As técnicas necessárias para conclusão dessa sub tarefa incluiriam: determinar as derivadas parciais da função  $f$  e aplicar o ponto dado nestas; determinar o vetor unitário  $\vec{u}$  e multiplicá-lo pelo gradiente da função para obter a derivada direcional. A conversão da representação do objeto derivada direcional no registro da língua materna para sua representação no registro algébrico exigiria do discente o domínio de dois objetos não ostensivos: derivadas parciais e vetores, ou seja, seria necessário que o discente dominasse a teoria destas tecnologias para realizar a sub tarefa sem erros.

O estudante G utilizou o *software GeoGebra* como uma ferramenta, pois havia percebido que poderia acelerar seu processo de resolução da sub tarefa, como descrito em seu relato disposto na Figura 6. Isso indica que o estudante possuía confiança no uso do *software*, além dos conhecimentos necessários tanto em relação aos objetos não ostensivos (derivadas parciais, vetores e derivadas direcionais) quanto em relação ao objeto ostensivo (*GeoGebra*).

**Figura 6:** Recorte da Autoanálise do Estudante G, 2023.

Na letra b) da questão 1, foi pedido para calcularmos a derivada direcional de  $f$  no ponto  $P_2$ , na direção do vetor  $\vec{u}$ . Comecei, então, obtendo o gradiente de  $f$  utilizando o GeoGebra, e aplicando o ponto  $P_2(1,0,1)$ . Depois, também utilizando o GeoGebra, obtive o vetor unitário de  $\vec{u}$ , multiplicando em seguida pelo gradiente no ponto encontrado anteriormente, achando assim o resultado. Aqui, houve um pequeno erro no gabarito do professor ao aplicar o ponto no gradiente, obtendo um resultado incorreto.

Na letra b) da questão 1, foi pedido para calcularmos a derivada direcional de  $f$  no ponto  $P_2$ , na direção do vetor  $\vec{u}$ . Comecei, então, obtendo o gradiente de  $f$  utilizando o GeoGebra, e aplicando o ponto  $P_2(1,0,1)$ . Depois, também utilizando o GeoGebra, obtive o vetor unitário de  $\vec{u}$ , multiplicando em seguida pelo gradiente no ponto encontrado anteriormente, achando assim o resultado. Aqui, houve um pequeno erro no gabarito do professor ao aplicar o ponto no gradiente, obtendo um resultado incorreto.

**Fonte:** Autoanálise do Estudante G, 2023.

As tarefas eram desenvolvidas de modo que o apoio dos discentes no *software* não fosse o único requisito necessário para a execução correta; era preciso interpretar corretamente a representação gráfica gerada pelo *GeoGebra*, ou seja, era preciso haver coordenação entre os registros de representação dos objetos estudados. Quando não havia essa coordenação, por mais



que a conversão da representação do objeto no registro da língua materna/algébrico para a representação do mesmo em registro gráfico ocorresse, o discente não conseguia passar disso. A estudante L traz esse relato em sua autoanálise, disposto na Figura 7, acerca dos entraves enfrentados em sua resolução, que dispomos na Figura 8 juntamente com o gabarito do docente.

**Figura 7:** Recorte da Autoanálise da Estudante L, 2023.

<p>A questão 2 solicitava o cálculo do volume de um sólido limitado pelas superfícies <math>z = x^2, z = 3 - x^2</math>, o plano <math>xz</math> e a função <math>y + z = 4</math> além do esboço correspondente. Consegui elaborar o esboço do sólido, mas enfrentei dificuldades ao visualizar a região. Embora tenha compreendido os limites de <math>y</math> e <math>z</math>, tive dificuldade com a parte referente ao eixo <math>x</math>. Por conta disso, modifiquei o limite de <math>z</math> na tentativa de encontrar o limite de <math>x</math>, mas essa alteração não foi realizada da maneira correta, levando a uma resposta final errada, o que acabou gerando um erro de conhecimento atual no registro algébrico.</p>	<p>A questão 2 solicitava o cálculo do volume de um sólido limitado pelas superfícies <math>z = x^2, z = 3 - x^2</math>, o plano <math>xz</math> e a função <math>y + z = 4</math>, além do esboço correspondente. Consegui elaborar o esboço do sólido, mas enfrentei dificuldades ao visualizar a região. Embora tenha compreendido os limites de <math>y</math> e <math>z</math>, tive dificuldade com a parte referente ao eixo <math>x</math>. Por conta disso, modifiquei o limite de <math>z</math> na tentativa de encontrar o limite de <math>x</math>, mas essa alteração não foi realizada da maneira correta, levando a uma resposta final errada, o que acabou gerando um erro de conhecimento atual no registro algébrico.</p>
---	--

Fonte: Autoanálise da Estudante L, 2023.

**Figura 8:** Resolução da Estudante L e Gabarito do Professor.

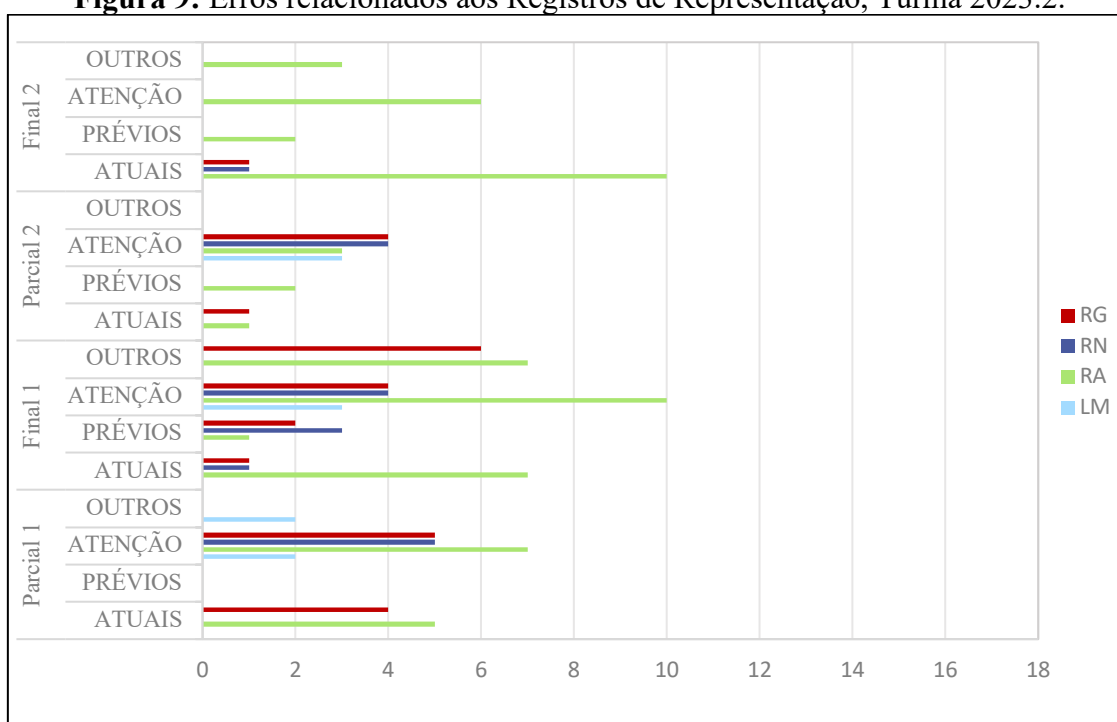
<p><b>Questão 2</b></p> <p><math>z = x^2, z = 3 - x^2</math>, plano <math>xz</math> e <math>y + z = 4</math></p> <p><math>z = x^2, -x^2 = z - 3</math></p> <p><math>x = \sqrt{z}, x = \sqrt{-z+3}</math></p> <p><math>T = \begin{cases} 0 \leq z \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 - z \\ \sqrt{-z} \leq x \leq \sqrt{-z+3} \end{cases}</math> R.A.</p> <p><math>\iiint_T dV = \int_0^3 \int_0^{4-z} \int_{\sqrt{-z}}^{\sqrt{-z+3}} dx dy dz = \int_0^3 \int_0^{4-z} (-\sqrt{-z} + \sqrt{-z+3}) dy dz</math></p> <p><math>= \int_0^3 (-2\sqrt{-z+3} + 2\sqrt{z} + 4\sqrt{-z+3} - 4\sqrt{z}) dz = \frac{6}{5} \sqrt{3} \text{ u.v.}</math></p>	<p><b>2ª Questão</b></p> <p>Calculando o volume, temos, considerando a região em <math>xy</math>:</p> <p><math>z = 3 - x^2</math></p> <p><math>z = x^2</math></p> <p><math>R: \begin{cases} -\frac{\sqrt{6}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \\ x^2 \leq z \leq 3 - x^2 \end{cases}</math></p> <p><math>dV = \int_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \left( \int_{x^2}^{3-x^2} \int_0^{4-z} dy \right) dz dx = \int_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \left( \int_{x^2}^{3-x^2} (4-z) dz \right) dx = \int_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \left( -\frac{10x^2 + 15}{2} \right) dx = 5\sqrt{6} \text{ u.v.}</math></p>
---	--

Fonte: Dados da Pesquisa, 2024.

Ao comparar a resolução da estudante (à esquerda) com o gabarito do professor (à direita), vemos que a dificuldade da estudante na interpretação gráfica advém de conhecimentos prévios, e não atuais: a visualização da limitação do eixo  $x$  para a função seria dada no espaço bidimensional, o que é ensinado ainda no Ensino Básico. A estudante não se deu conta disso, pois estava dependente do *software* para visualização no espaço 3D; em contrapartida, o docente utiliza uma perspectiva diferente, em 2D, para visualizar o volume que seria calculado. Isso destaca como, apesar do *software* ser um meio ostensivo que facilite a compreensão de objetos não ostensivos, os estudantes podem se limitar à perspectiva gerada por ele.

A Figura 9 apresenta um gráfico que distribui os erros associados aos registros de representação para cada atividade avaliativa administrada nessa turma. A maioria dos erros desta turma se dava tanto pelas dispersões psicológicas durante o tratamento no registro algébrico dos objetos, quanto nos conhecimentos atuais, referentes aos conteúdos estudados na disciplina, também no registro algébrico. Por ser uma turma onde a maioria é de estudantes de semestres avançados, já era esperada uma dificuldade na manipulação dos objetos não ostensivos vistos na disciplina, e que essa dificuldade se refletisse no quantitativo de erros descritos nas autoanálises.

**Figura 9:** Erros relacionados aos Registros de Representação, Turma 2023.2.



Fonte: Dados da Pesquisa, 2024.

Novamente, o número de erros relacionados ao tratamento no registro numérico é menor. mas a dificuldade relacionada à manipulação do ostensivo gráfico em relação aos objetos estudados dessa vez se destaca para esta turma, variando em erros de conhecimentos atuais, atenção e outros (relacionados ao tempo de duração das avaliações). Ainda assim, comparando os quantitativos de erros associados aos registros de representação obtidos em cada turma, verificamos que a turma 2023.2 possui menos erros associados aos registros de

representação, indicando que as práticas pedagógicas adotadas entre as duas turmas surtiram efeitos positivos no processo de aprendizado.

Considerando a presença do *software GeoGebra* em ambas as turmas, destaca-se a escolha do docente de criar tarefas que sejam executadas tanto por meio do ambiente papel e lápis/caneta quanto por meio da utilização do *GeoGebra*. Isso colabora para que o estudante torne o *software* um instrumento e desenvolva seus conhecimentos da teoria acerca do objeto matemático estudado em vários pontos de vista, mas sem criar dependência deste. As autoanálises mais uma vez atuam como sinalizadoras da eficiência da metodologia abordada, quando apresentam quando apresentam as técnicas utilizadas pelos discentes em suas resoluções, indicando a necessidade ou não de se alterar as tarefas propostas.

## CONCLUSÕES

Diante dos relatos, presentes nas autoanálises, é possível observar que a utilização das autoanálises, enquanto ferramenta pedagógica, contribui tanto no processo de aprendizado quanto no processo de ensino. Se, mesmo confeccionando as autoanálises, o reconhecimento dos discentes for apenas ao nível subconsciente, ainda assim o docente pode utilizar as informações obtidas para determinar quais práticas pedagógicas são mais eficazes.

A utilização do *software GeoGebra*, por exemplo, é corroborada através da evolução das duas turmas; a turma de 2022.2 foi a primeira de cálculo IV a utilizá-lo constantemente nas avaliações da disciplina, o que causou entraves relatados em suas autoanálises; com base nisso, o docente pôde reinventar a forma de inserir a ferramenta em sua metodologia. Desse modo, a turma 2023.2 imergiu mais no aprendizado das técnicas de utilização do *GeoGebra* que a turma anterior, conseguindo utilizar a ferramenta com maior facilidade em suas resoluções, não apenas para obter suas respostas finais, mas também verificar suas linhas de raciocínios em relação aos objetos matemáticos estudados. As autoanálises da turma 2023.2 destacam, então, o problema seguinte: antes a ferramenta se constituía como fator de dificuldades para a maioria dos estudantes, agora ela se constitui como um limitante na compreensão destes acerca dos objetos estudados. Cabe ao docente, diante disto, utilizar as informações geradas pelas autoanálises de erros para buscar formas de que, mesmo com o uso do *software*, os estudantes

das turmas futuras busquem outras perspectivas quando em dificuldades para resolver os problemas.

## AGRADECIMENTOS

Os autores prestam seus agradecimentos à FAPESB, a qual financia o projeto de pesquisa principal que gerou o presente trabalho, bem como ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia – *Campus Eunápolis*, da qual os estudantes serviram para compor a base de dados.

## REFERÊNCIAS

ALMOULOU, Saddo Ag, **Fundamentos da Didática da Matemática**, Curitiba: Editora UFPR, 2010 2.

ALMEIDA, Lucas; BRITO, Celso. **Autoanálise de Erros: Sugestão Metodológica para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral**. In: CASTRO, Paula Almeida de *et al.* Escola em tempos de conexões vol. 1. Campina Grande: Realize editora, 2022. p 1844–1859.

CHEVALLARD, Y. **A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática**. Livro: A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos. Org. Almouloud, S. A; Farias, L. M. S; Henriques, A. Ed. CRV, Curitiba, Brasil, 2018;

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. Editora Livraria da Física, 2007.

HENRIQUES, A; Almouloud, S. Ag. **Teoria dos Registros de Representação Semiótica em Pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: Uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do *software* Maple**. Revista Ciência & Educação da UNES, Bauru (SP), 2016.

HENRIQUES, Afonso. **Saberes Universitários e as suas relações na Educação Básica**. 1. ed. Ilhéus, BA; Via Litterarum Editora, 2019.

NUNES, Tamires Rigoti; BRITO, Celso Eduardo. **Erros e Obstáculos no processo de aprendizagem de Derivadas: Uma análise na perspectiva docente/discente**. In: Educação Matemática em Revista, Brasília, v. 22, n. 56, p. 277-288, out./dez. 2017.

QUEIROZ, Melina Serena Cruz. **Contribuições da autoanálise de erros e obstáculos nos processos do ensino e da aprendizagem de limites no curso de Engenharia Civil do IFBA/Eunápolis**. 62 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal da Bahia, 2022.

## HISTÓRICO

**Submetido:** 31 de julho de 2024.

**Aprovado:** 31 de outubro de 2024.

**Publicado:** 13 de dezembro de 2024.