



Apreensões Figurais e Materiais Manipuláveis na Resolução de Problemas de Geometria por Alunos do Oitavo Ano

Figural Apprehensions and Manipulative Materials in Geometry Problem Solving by Eighth Grade Students

Antônio Alexandre Aparecido da Silva¹
Colégio Domus

Angelica da Fontoura Garcia Silva²
UNOPAR

Maria Elisa Esteves Lopes Galvão³
USP

Ruy Cesar Pietropaolo⁴
UNIAN e UNOPAR

RESUMO

Este estudo investiga as possibilidades de apreensões figurais mobilizadas por alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental durante a resolução de problemas geométricos. Baseando-se no referencial teórico de Duval, que categoriza as apreensões figurais em perceptiva, discursiva, sequencial e operatória, a pesquisa analisa como essas apreensões são ativadas pelos participantes de uma pesquisa desenvolvida no contexto escolar. Os dados foram coletados durante sessões de estudo que envolveram 19 alunos de uma escola particular em São Paulo, utilizando observações, registros escritos, gravações em vídeo e áudio, além de protocolos de resolução de problemas. Os resultados indicam que a utilização de figuras geométricas e materiais manipuláveis desempenha um papel importante na compreensão e solução de problemas. Alunos que utilizaram esses recursos conseguiram explorar diversas possibilidades, desenvolver estratégias mais eficazes e apresentar soluções precisas. A manipulação concreta de figuras, como dobrar papel para visualizar formas e comparar áreas, facilitou a aplicação prática de conceitos matemáticos, corroborando com as práticas pedagógicas indicadas no currículo de matemática que

¹ Doutor em Educação Matemática pela Unian-SP. Professor do Colégio Domus, São Paulo, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Wilson Nahra, 88, ap. 14, Vila Guarani, São Paulo, São Paulo, Brasil, CEP: 04313090. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4041-8877>. Lattes: <https://lattes.cnpq.br/6155273163064627>. E-mail: alex01166@gmail.com.

² Doutora em Educação Matemática pela PUC-SP. Professora do Programa de Pós-graduação em Metodologias para o Ensino de Linguagens e suas Tecnologias da Unopar, Londrina, Paraná, Brasil. Rua Teête, 1208, Londrina, Paraná, Brasil, CEP: 86025-230 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2435-9240> Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5279665144777466> E-mail: angelicafontoura@gmail.com.

³ Doutora em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo Função que desempenha e Instituição a que está vinculado: Professor Senior, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Carajua, 60, apto 12, Moema, São Paulo, SP, Brasil, CEP: 04520-020. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0000-0000-0000> . Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0294609067982327> . E-mail: elisa.gal.meg@gmail.com

⁴ Doutor em Educação Matemática pela PUC-SP. Coordenador do Programa de Pós-graduação e Educação Matemática na Unian, São Paulo e professor do Programa de Pós-graduação em Metodologias para o Ensino de Linguagens e suas Tecnologias da Unopar, Brasil. Endereço para correspondência: Alameda Santos, 721, apto 71. CEO1419-001. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-1353-2191> Lattes: <http://lattes.cnpq.br/2747970094543043>. E-mail: rpietropaolo@gmail.com.

incentivem a criação e manipulação de figuras ou materiais concretos para enriquecer a experiência de aprendizagem.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem de Matemática. Ensino Fundamental. Apreensão Figural. Resolução de Problemas. Materiais Manipuláveis.

ABSTRACT

This study investigates the possibilities of figural apprehension mobilized by 8th grade students when solving geometric problems. Based on Duval's theoretical framework that categorizes figural apprehensions into perceptual, discursive, sequential and operative, the research analyzes how these apprehensions are activated by the participants of a study developed in the school context. The data was collected during study sessions involving 19 students from a private school in São Paulo, using observations, written records, video and audio recordings, as well as problem-solving protocols. The results indicate the use of geometric figures and manipulable materials plays an important role in understanding and solving problems. Students who used these resources were able to explore many possibilities, develop strategies more effective and present accurate solutions. The concrete manipulation of figures, such as folding paper to visualize shapes and comparing areas, facilitated the practical application of mathematical concepts, corroborating the pedagogical practices indicated in the mathematics curriculum that encourage the creation and manipulation of concrete figures to enrich the learning experience.

Keywords: Teaching and learning mathematics. Elementary school. Figural apprehension. Problem solving. Manipulative materials.

INTRODUÇÃO

No cotidiano, frequentemente nos deparamos com situações que envolvem conceitos geométricos, como ao organizar móveis em uma sala, ao calcular a quantidade de tinta necessária para pintar uma parede ou até mesmo ao escolher o de um bolo para uma festa. Em todas essas situações, a visualização propiciada pela representação por meio de figuras geométricas facilita a compreensão e a solução dos problemas.

Para além de favorecer a compreensão, ao resolver problemas geométricos a figura pode assumir uma posição importante dentre as ferramentas disponíveis, para que um aluno encontre a solução. Ela permite explorar diversas possibilidades, promovendo a mobilização de estratégias que conduzam à resolução do problema, segundo Duval (1994).

Uma figura pode sofrer diferentes manipulações, como ampliação, redução, deslocamento e destaque de partes para estudo individualizado. Além disso, pode ser contextualizada em uma estrutura mais ampla, integrando-se a uma figura maior. A divisão da figura, conforme exigido pelo problema, permite tratamento individual das subfiguras ou sua combinação para gerar novas formas que preservem propriedades da figura inicial, como a área, por exemplo.

A operação de fracionamento da figura, estudada por pesquisadores como Raymond Duval é um processo complexo utilizado para interpretar uma figura no contexto da resolução

de problemas. Artigos de Duval discutem a exploração de figuras para revelar alternativas ou caminhos que levem à solução de problemas, além de abordar os desafios enfrentados nesse processo e os fatores estratégicos que influenciam o desenvolvimento das denominadas apreensões figurais.

O uso de materiais manipuláveis no ensino da matemática possui uma extensa história e encontra respaldo em teorias de aprendizagem que enfatizam a importância da experiência sensorial e da ação para a construção do conhecimento como apresentado nos estudos por exemplo de Lorenzato (2010), Bartolini, Martignore (2020), Passos (2010), Galvão e Panossian (2022) e Clements (1999, 2004). Os autores defendem que a manipulação de objetos concretos permite que os alunos experimentem relações e padrões, construindo pontes entre o mundo físico e o mundo abstrato das ideias matemáticas. Essa transição do concreto para o abstrato é essencial, para a compreensão de conceitos numéricos e geométricos. Concordamos com esses autores que defendem a importância dos materiais manipuláveis para uma aprendizagem significativa. Eles argumentam que a interação com objetos reais permite que os alunos atribuam significado aos conceitos abstratos, indo além da simples memorização de regras e procedimentos. O Ministério da Educação, em seus programas e orientações, por exemplo a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) também recomenda a utilização de materiais manipuláveis em todos os níveis de ensino, reconhecendo seu potencial para criar um ambiente de aprendizagem mais ativo e engajador.

Este estudo baseou-se na análise dos dados coletados na pesquisa de Silva (2023), com o objetivo de investigar as possibilidades de apreensão figural emergentes durante a resolução de problemas geométricos por alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental.

Para apresentar e analisar as estratégias e os comentários dos alunos em uma seção de estudo, este artigo apresentamos um aprofundamento da fundamentação teórica, descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados e ao final tecemos nossas considerações sobre os resultados obtidos.

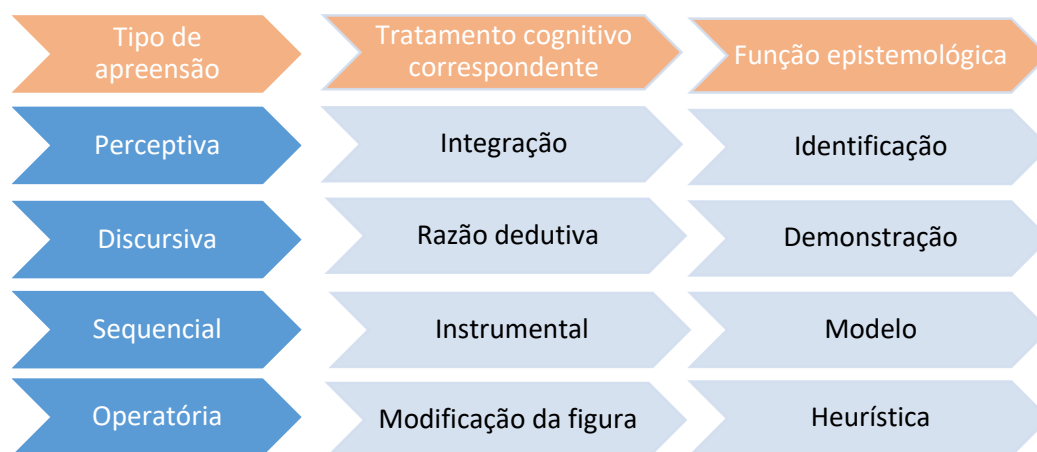
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Duval (1994, 2012) oferece uma importante contribuição para a compreensão do papel das figuras na resolução de problemas geométricos, elucidando os motivos pelos quais essas

figuras podem ou não ser úteis. O autor destaca a importância essencial de desenvolver a habilidade de criar registros semióticos figurais, permitindo assim que essas representações sejam parte integrante e da resolução das situações em que estão inseridas. Ele afirma que a compreensão de um objeto matemático resulta da "descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não supunha, mesmo que outros lhe houvessem explicado" e apresenta uma categorização das possibilidades de compreensões, as chamadas apreensões, que podem ser mobilizadas a partir da figura associada à uma questão em Geometria (Duval, 1994, p. 41).

Duval (1994, 2012) discute quatro tipos de apreensão relevantes, por ele denominadas: perceptiva, discursiva, sequencial e operatória. Cada uma dessas apreensões envolve um tratamento cognitivo específico, que é a função psicológica na aquisição do conhecimento, bem como uma função epistemológica correspondente, que é o conhecimento científico relacionado a cada tipo de apreensão, conforme ilustrado, resumidamente, no Quadro 1.

Quadro 1: Tipos de apreensão das figuras geométricas



Fonte: Próprio autor, inspirado nos estudos de Duval

A apreensão denominada perceptiva é a que ocorre de maneira imediata e automática ao observar uma figura geométrica no papel, associando-se à identificação dos objetos, independentemente do enunciado. Duval (2012) observa que os objetos revelados pela figura por meio dessa apreensão podem não coincidir com os objetos necessários para resolver a situação apresentada.

A apreensão discursiva, segundo Duval (2012), envolve ler o enunciado, referir-se à figura e, em seguida, usar esses registros para explicar outras propriedades ou formular hipóteses. Ele destaca que a integração do enunciado com a figura é facilitada pela congruência

semântica entre o problema apresentado e a figura correspondente. Essa apreensão permite explicitar ou demonstrar propriedades matemáticas indicadas, às vezes, por uma legenda ou pelas hipóteses no enunciado do problema, inserindo a figura geométrica em uma rede de relações conceituais que exigem a organização de informações para estabelecer conexões entre elas.

A apreensão sequencial de uma figura é requerida durante a sua construção com instrumentos de desenho, como régua, compasso ou software. Duval (2012) aponta que as instruções de construção devem seguir três princípios: fornecer apenas uma informação por frase, na medida do possível; evitar ambiguidades nas instruções; e definir um quadro de referência autônomo, permitindo uma descrição clara do que está sendo apresentado.

A apreensão operatória, conforme Duval (1994), envolve modificações e reconfigurações da figura para exploração epistemológica heurística. Isso inclui modificações posicionais (deslocamento da figura no plano), óticas (ampliação, redução ou deformação da figura) e as denominadas mereológicas (relação entre partes e o todo). As modificações mereológicas podem ser globais, focando na divisão da figura inicial, ou analíticas, focando nas partes elementares da figura. As modificações globais envolvem dividir uma figura em subfiguras e, ao reagrupar essas partes, originar uma nova configuração intermediária. Duval (2012) descreve o mergulhamento como uma operação, ligada à apreensão operatória, em que uma figura é inserida em outra, transformando-se em uma subfigura da nova figura construída.

Duval (1994, 2012) considera "heurísticamente relevantes" as modificações que visam revelar a solução ou demonstração, assumindo a congruência semântica entre a apreensão operatória e um tratamento matemático do problema. Ele observa que essas modificações são influenciadas por fatores que podem favorecê-las ou inibi-las, dependendo da organização interna da figura. Segundo Duval, os conceitos em si não são os principais obstáculos na aprendizagem da Geometria, mas sim a proximidade entre tratamentos relevantes e irrelevantes dentro de um mesmo registro de representação. Tratamentos relevantes são modificações que aproximam da resolução, enquanto tratamentos irrelevantes afastam o estudante desse objetivo.

O estudo das apreensões segundo Duval é fundamental para compreender o processo de resolução de problemas em Geometria, como demonstrado por pesquisas de Barroso (2015), Gridos et al. (2022), Karpuz e Atasoy (2019), Karpuz e Güven (2022), Moretti e Cans (2024) e

Pirola (2012). Essas pesquisas reafirmam a importância das ideias de Duval no desenvolvimento teórico e metodológico do ensino de Geometria, enfatizando a utilização de diferentes registros de representação semiótica e a compreensão das apreensões figurais. Ao abordar as dificuldades dos professores, a competência heurística dos estudantes e a influência das ideias de Duval na resolução de problemas geométricos, esses estudos corroboram a relevância das apreensões perceptiva, discursiva, sequencial e operatória na aprendizagem em Geometria.

Esse entendimento fundamenta a escolha de utilizar materiais manipuláveis como recurso didático, conforme discutido em estudos subsequentes. Esses materiais não apenas promovem a visualização e a representação de figuras geométricas, mas também facilitam a compreensão dos processos cognitivos envolvidos na resolução de problemas. A utilização de materiais manipuláveis na educação matemática é amplamente respaldada pela literatura, destacando sua importância no desenvolvimento de habilidades visuais e espaciais dos alunos. Pesquisas nacionais e internacionais, como as de Clements (1999, 2004), Bartolini e Martignone (2020), Matos e Serrazina (1996), Passos (2010) e Weiss (2006), têm comprovado a eficácia dos materiais manipuláveis em processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Bartolini e Martignone (2020) e Galvão e Panossian (2022) defendem que os estudantes precisam desenvolver habilidades para criar, manipular e interpretar imagens mentais, além de compreender informações espaciais e quantitativas apresentadas visualmente. Segundo Duval (1994, 1995, 2006, 2012, 2018), a manipulação de materiais concretos é um tratamento específico da apreensão operatória que facilita a compreensão dos conceitos matemáticos e confere dinamismo ao processo de aprendizagem, permitindo aos alunos explorar e investigar propriedades e possibilidades de forma mais eficaz.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este estudo, de caráter qualitativo, expande as discussões e resultados da pesquisa de doutorado conduzida pelo primeiro autor Silva (2023). Para seu desenvolvimento, foi obtida aprovação ética pelo sistema CEP/CONEP CAAE:: 45236821.3.0000.5493. A pesquisa foi realizada ao longo do segundo semestre de 2021, em quatro sessões de estudo, realizadas no turno oposto ao das atividades escolares.

A investigação contou com a participação de 19 estudantes do 8.º ano de uma escola particular em São Paulo, que concordaram em participar. Para garantir o anonimato dos participantes, substituímos seus nomes por nomes de flores.

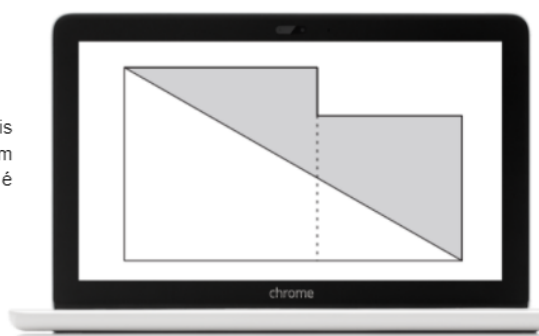
As sessões ocorreram de forma híbrida, com participação presencial e on-line dos estudantes, devido aos impactos da Pandemia de Covid-19. Foram utilizados os seguintes instrumentos de coleta de dados: observações com registros escritos e gravações em vídeo e áudio, além dos protocolos de resolução dos estudantes.

Para este artigo, focaremos na análise dos dados referentes à resolução de um problema geométrico apresentado na segunda seção de estudo. A escolha deste problema (Figura 1) para subsidiar a discussão foi motivada pela expectativa de que ele poderia gerar a mobilização de diferentes apreensões por parte dos participantes ao longo do processo de resolução.

Figura 1: Situação-problema proposta aos estudantes

Juntando quadrados

A figura é formada por dois quadrados, um de lado 8 cm e outro de lado 6 cm. Qual é a área da região cinza?



Fonte: OBMEP 2014 – N1, Q07, F1

O modelo de intervenção estruturado para esta pesquisa foi desenvolvido com base em Alevato et al. (2021) e incluiu as seguintes etapas: (1) proposição do tema gerador, (2) leitura individual utilizando conhecimentos prévios, (3) discussão coletiva mediada pelo pesquisador para aprimorar as compreensões, (4) resolução do problema em grupos e (5) apresentação das soluções para discussão e verificação da compreensão.

Inicialmente, o problema foi apresentado aos estudantes, que tiveram tempo para explorá-lo e propor soluções individualmente (etapas 1 e 2). Após esse período, o pesquisador conduziu uma discussão coletiva com o grupo, incentivando os estudantes a compartilharem as estratégias pensadas para a resolução, bem como as dificuldades ou obstáculos encontrados

(etapa 3). Essa etapa coletiva visou encorajar os alunos a exporem suas ideias e dificuldades, mostrando que essas questões poderiam ser comuns a vários colegas. Nela, o pesquisador retomou o trabalho solicitando aos alunos que apresentaram soluções (completas ou incompletas). O objetivo era ouvir os relatos dos estudantes e encorajar o uso de estratégias que considerassem as apreensões por meio da utilização de materiais manipulativos.

Na etapa quatro, o pesquisador propôs aos participantes uma tentativa de resolução do problema, organizando-os em grupos conforme a afinidade com a estratégia discutida. Essa fase foi um desdobramento da etapa anterior, baseada na discussão sobre as estratégias apresentadas pelos estudantes e no incentivo do pesquisador para o uso de materiais manipulativos, favorecendo a mobilização das apreensões. Ao final, as resoluções encontradas pelos participantes foram novamente apresentadas para discussão coletiva. Nosso objetivo foi observar as apreensões desenvolvidas e discutir coletivamente sua influência na resolução da situação. Acreditamos que esse design e a mediação do professor podem estimular os participantes a desenvolverem novas apreensões a partir das apresentadas na exploração inicial do problema. Consideramos que o modelo proposto para o encaminhamento da pesquisa poderia ser flexibilizado para atender às demandas dos participantes e às necessidades e condições do modelo híbrido. Isso significa que ele poderia ser adaptado para se adequar às necessidades específicas dos estudantes tanto no ambiente da sala de aula quanto no virtual.

Para analisar essa experiência, utilizamos a metodologia de Bardin (2011). Inicialmente, realizamos uma pré-análise dos dados coletados, referida pela autora como leitura flutuante, que marca o primeiro contato com esses dados. Nesse momento, surgiram hipóteses e informações provisórias. Em seguida, passamos à fase mais extensa, a exploração do material, que nos permitiu organizar os dados de modo a agrupá-los em torno das categorias de apreensões previstas por Duval (1994, 2012). Por fim, na etapa de interpretação dos dados, procuramos compreender os significados profundos das interpretações dos estudantes. Esses dados nos permitiram uma compreensão mais detalhada de nosso objeto de estudo.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

A situação proposta, conforme já descrevemos, teve o intuito de incentivar os estudantes a utilizarem material manipulável. Foram produzidos modelos em papel quadriculado e papel

sulfite. Nesta seção, nosso objetivo foi discutir e construir com o grupo de estudantes um conjunto de ações que pudessem ser executadas para auxiliá-los no processo de resolver o problema, explorando essas estratégias de manipulação e investigação das figuras. Antes de descrever e analisar o ocorrido na seção, consideramos fundamental discutir sobre o potencial heurístico da figura do problema.

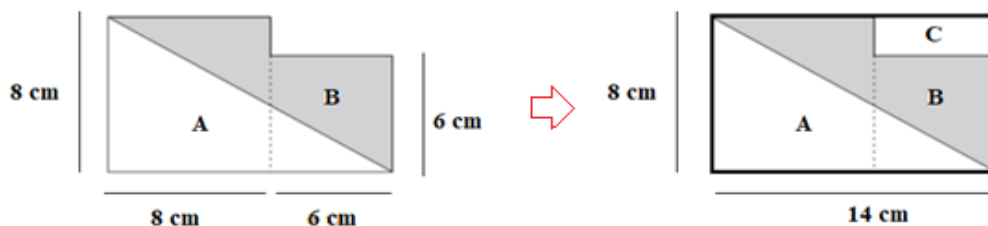
Potencial heurístico da figura da situação proposta

A figura desse problema possibilita explorar a modificação figural conhecida como "mergulhamento". Conforme classificação de Duval (2012, p. 130), essa modificação consiste em integrar a figura em um contexto maior e mais compreensível, o que pode facilitar a interpretação e a resolução do problema. Ao utilizar essa estratégia, os alunos podem encontrar um caminho mais claro e direto em direção à solução do problema.

A operação de mergulhamento propicia uma reestruturação da apreensão discursiva, por apresentar uma nova figura. Na figura inicial são identificados os quadrados A e B, cada um com uma região cinza, o mergulhamento revela um retângulo com lados 8 cm e 14 cm dividido em três regiões A, B e C (Figura 2), a partir dessa apreensão uma alternativa para a resolução do problema que se apresenta:

$$A_B = A_{retângulo} - (A_A + A_C)$$

Figura 2: Mergulhamento



Fonte: OBMEP 2014 – N1, Q07, F1, adaptado

As modificações consideradas “heurísticamente relevantes” por Duval (1994) são aquelas que objetivam expor a ideia da solução ou da demonstração, como as que verificamos nessa possibilidade de resolução. Mesmo supondo que há congruência semântica entre a apreensão operatória e um tratamento matemático do problema, as modificações sofrem

influências de fatores que tanto podem favorecer quanto inibir tais ações, fatores que, ~~os quais~~, por sua vez, dependem de outros aspectos relacionados à organização interna da figura. Observamos ainda que, nesse problema, uma outra alternativa seria a decomposição da figura como reunião de um triângulo retângulo e um trapézio.

Análises das resoluções do problema

Ao longo da orientação, o pesquisador acatou a solicitação dos participantes para desenvolverem em grupos as etapas 1 e 2, e ressaltou a importância de os alunos observarem e relatarem as dificuldades encontradas durante a resolução do problema, enfatizando a necessidade de registrar e comentar suas atividades.

No quadro 2, apresentamos o registro quantitativo da resolução desse problema na etapa 2, destacando a quantidade de alunos que utilizaram ou não a figura na resolução, bem como o número daqueles que conseguiram resolver completamente ou não o problema. Optamos por manter o formato de apresentação dos dados de forma individualizada, e nos comentários atribuímos as produções aos grupos, considerando essa abordagem mais relevante para uma análise detalhada das respostas e para compreender o desempenho dos alunos de forma mais precisa.

Quadro 2: Registro quantitativo da resolução do problema Juntando quadrados

Juntando quadrados	Estudantes		
	Total	Usou a figura na resolução	Não usou a figura na resolução
Resoluções completas	10	7	3
Resoluções incompletas	6	3	3
Sem resposta	3		
Total	19		

Fonte: Elaboração do Pesquisador

Quatro grupos, dois trios e duas duplas, resolveram corretamente o problema, um trio não usou a figura. Dois trios resolveram incorretamente o problema, sendo que um deles não

usou a figura e o outro nomeou um representante para postar a resolução; um trio não resolveu o problema explicando apenas que “não conseguiram fazer o problema.”

A partir das observações iniciais dos estudantes foi possível identificar a dificuldade na compreensão do enunciado do problema. Dentre os 19 participantes, 9 relataram ter lido o enunciado mais de uma vez e recorreram à discussão para entender o que o problema solicitava. Durante a discussão na etapa 3, o pesquisador percebeu que os estudantes tinham compreendido o que era solicitado no problema. Ficou evidente que a dificuldade foi não conhecer um procedimento resolutivo para colocar em prática. Os alunos enfrentavam dificuldades em mobilizar a apreensão discursiva e operatória para visualizar um caminho para a solução.

Após a análise desse quadro, verifica-se que os estudantes encontraram dificuldades em transitar da apreensão perceptiva para a apreensão discursiva. Embora tenham sido capazes de identificar as informações visuais relevantes, eles enfrentaram dificuldades na interpretação adequada dessas informações e na habilidade de estabelecer conexões com outros conhecimentos para auxiliar na resolução do problema. Essa constatação é consistente com os resultados obtidos por Karpuz e Atasoy (2019)

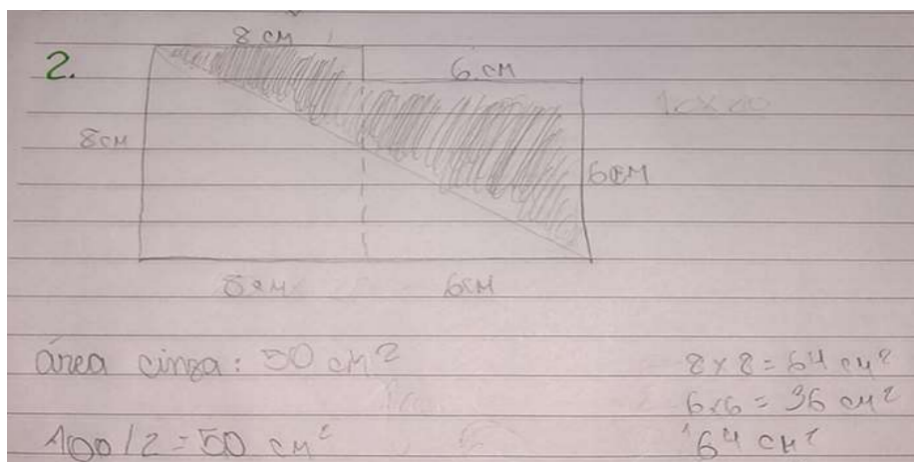
A maioria dos alunos não conseguiu reconhecer as várias subfiguras presentes em uma figura geométrica, transformar informações verbais em informações visuais, derivar informações verbais com base em informações visuais, chegar a conclusões sem ser influenciado pela aparência de uma figura e decompor e recompor figuras geométricas. (KARPUZ; ATASOY, 2019, p. 285, Tradução nossa).

Segundo Duval (2012), o desenvolvimento da apreensão perceptiva embora fundamental no processo resolutivo do problema não é suficiente para conduzir o aluno a sua solução, o que verificamos nas etapas iniciais do trabalho dos alunos.

Ainda durante as discussões na etapa 3 os alunos tiveram dificuldades em relatar suas limitações, nas análises das produções os relatos também não ajudavam a compreender o fato. A estudante Azaleia relata nas observações que “percebeu que tinha entendido errado”, mas não esclareceu o que tinha entendido errado e nem como tinha interpretado a situação; essa informação iria fornecer pistas sobre a transição da apreensão perceptiva para a apreensão discursiva.

A resolução apresentada por esse grupo desenvolveu o raciocínio que pode ser observado na Figura 3, pertencente as anotações do integrante Ipê, um exemplo da dificuldade na articulação entre as apreensões perceptiva e discursiva.

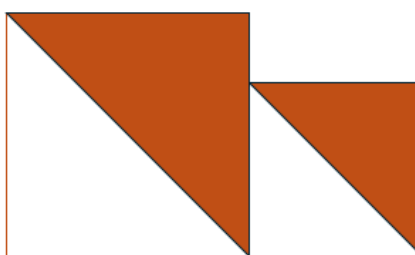
Figura 3: Anotações do integrante Ipê



Fonte: Acervo da pesquisa

Na resolução percebe-se o caminho seguido: o grupo calculou e adicionou as áreas dos dois quadrados, a seguir entendeu que a área sombreada corresponderia a metade da soma das áreas dos quadrados. Essa apreensão discursiva se conecta com a apreensão perceptiva de outro modelo figural de problema, como por exemplo o apresentado na Figura 4.

Figura 4: Possível representação figural associada a apreensão discursiva apresentada na Figura 3



Fonte: Elaboração do pesquisador

O outro grupo, cuja resolução está ilustrada na Figura 5 abaixo, que não utilizou a figura no processo, também não apresentou a solução correta.

Figura 5: Solução apresentada pelo segundo grupo

Problema 2:
Triângulo: base: $8\text{cm} + 6\text{cm}$
base: 14cm
h: altura = 8cm
Fórmula: $14 \times 8 = 112$
Área: $\frac{112}{2} = 56$ Espaço: $8 - 6 = 2$
 $2 \times 6 = 12\text{cm}^2$
Quadrado: $8 \times 8 = 64$
Outro: $6 \times 6 = 36$
 $64 + 36 = 100$
Área cinza: $100 - 56 = 46\text{cm}^2$

Fonte: Acervo da pesquisa

Observando a resolução apresentada, constatamos que ela envolve o cálculo das áreas de um triângulo, dois quadrados, a área cinza e um "espaço". Essa organização sugere que o grupo conseguiu desenvolver a apreensão discursiva, interpretando as informações reveladas pela apreensão perceptiva. Além disso, o grupo demonstrou a apreensão operatória ao obter, por meio de manipulação mental, as quatro subfiguras apresentadas a seguir:

Figura 6: Subfiguras utilizadas pelo grupo

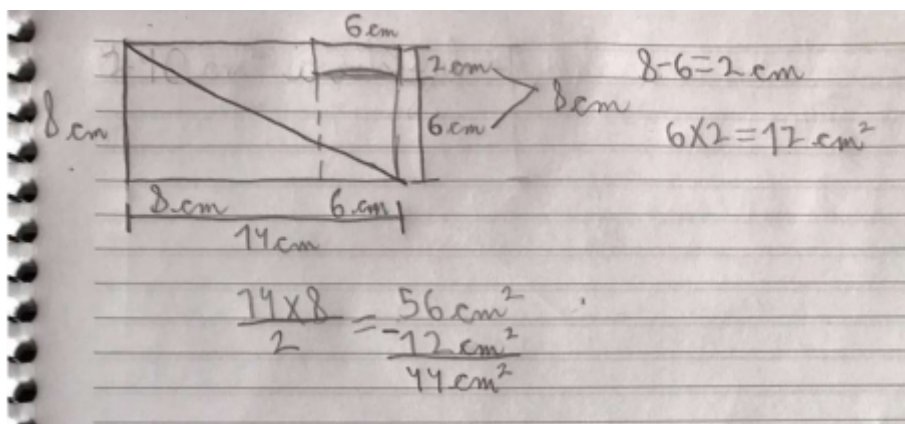


Fonte: Elaboração do pesquisador

O grupo no qual a aluna Iris fez parte apresentou uma solução correta para o problema utilizando a figura para desenvolver o raciocínio, apresentada na Figura 7.

Figura 7: Resolução correta utilizando a figura apresentada pelo grupo da estudante

Iris



Fonte: Acervo da pesquisa

A solução apresentada pelo grupo sugere a sequência de operações figurais da apreensão operatória mostradas a seguir na Figura 8.

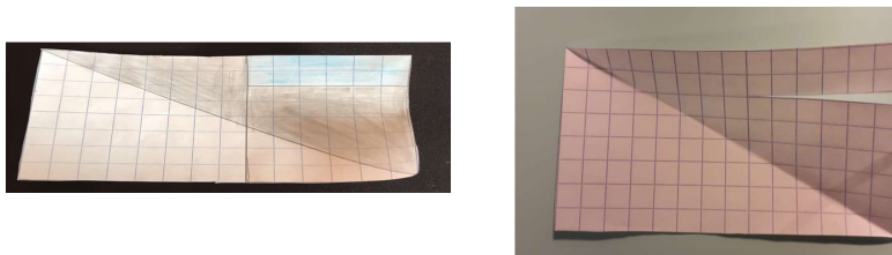
Figura 8: Subfiguras utilizadas pelo grupo da estudante Iris



Fonte: Elaboração do pesquisador

Após a discussão, o pesquisador deu continuidade à etapa 4 do trabalho, solicitando aos participantes que resolvessem o problema utilizando materiais manipulativos. Os alunos tiveram a opção de escolher entre papel sulfite e papel quadriculado, sendo que todos optaram pelo papel quadriculado. Após confeccionarem os modelos e investigarem a solução utilizando esse material, o pesquisador conduziu a seção da etapa 5, na qual os alunos puderam apresentar as abordagens utilizadas e verificar a compreensão sobre a resolução do problema e a utilização dos materiais manipulativos. Durante essa etapa, os alunos compartilharam os modelos construídos no papel quadriculado, sendo apresentados aqui dois exemplos representativos do mergulhamento da figura.

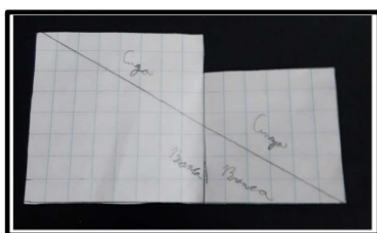
Figura 9: Exemplos de modelos manipulativos criados pelos participantes



Fonte: Acervo da pesquisa

Nos dois modelos apresentados os alunos evidenciaram que a figura construída não era a mesma do problema, e a parte que não fazia parte da figura original estava destacada de alguma forma. Nas análises dos registros o pesquisador encontrou o material enviado por um estudante Jasmim que tentou resolver o problema manipulando a figura original por meio de dobraduras. O relato desse estudante foi relevante, pois ele havia obtido sucesso na resolução de outro problema por meio desse recurso.

Figura 9: Observação do participante Jasmim sobre a resolução do problema



Nesse caso as dobraduras não me ajudaram muito pois eu tinha feito corretamente, mas me ajudou a fazer de outra forma.

Fonte: Acervo da pesquisa

Encerramos a seção de intervenção observando que aproximadamente metade dos participantes encontrou a resposta esperada para o problema proposto. As discussões e registros apresentados revelaram indícios de que os estudantes encontraram dificuldades em articular a apreensão perceptiva com as apreensões discursiva e operatória, o que dificultou a criação de um modelo que os conduzisse à solução dos problemas. Essas observações são consistentes com os resultados encontrados por Karpuz e Atasoy (2019), que indicam que a apreensão operatória não atingiu o nível esperado para a turma estudada. Já foi destacado neste artigo que a apreensão perceptiva, por si só, não é suficiente para uma compreensão profunda da geometria.

É fundamental que o indivíduo consiga transitar para a apreensão discursiva, a qual envolve a capacidade de descrever, explicar e justificar as propriedades e relações geométricas presentes na figura, utilizando a linguagem matemática. A apreensão discursiva é essencial para formalizar o conhecimento, comunicar ideias e articular conceitos em busca de soluções para problemas.

A transição da apreensão perceptiva para a discursiva pode apresentar diversos obstáculos, como, por exemplo, a dificuldade em identificar os elementos relevantes, a compreensão limitada de termos técnicos e a dificuldade em estabelecer conexões entre a figura e o conceito.

Para superar esses obstáculos, os estudantes foram incentivados a descrever o que observavam na figura, justificar suas afirmações, comparar diferentes representações, utilizar uma linguagem clara e precisa que evitasse ambiguidades e empregasse corretamente os termos matemáticos. Eles também foram estimulados a estabelecer conexões entre o concreto e o abstrato por meio de materiais manipuláveis, desenhos e representações visuais, além de promover a discussão e a argumentação, permitindo o compartilhamento de ideias, a confrontação de diferentes pontos de vista e a construção de um conhecimento coletivo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa realizada revelou diversas possibilidades de apreensões figurais mobilizadas pelos alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental durante a resolução de problemas geométricos. Observamos que, ao enfrentar um problema geométrico, os alunos ativam as apreensões figurais: perceptiva, discursiva e operatória, conforme categorizado por Duval. A apreensão perceptiva foi a primeira a ser ativada, permitindo aos alunos identificar e reconhecer figuras geométricas de forma imediata. No entanto, a transição para apreensões mais complexas, como a discursiva e operatória, mostrou-se importante para o avanço na resolução dos problemas propostos.

A análise dos dados coletados revelou que a utilização de figuras geométricas como ferramentas de apoio favoreceu a compreensão e solução de problemas. Os alunos que integraram a visualização e manipulação das figuras em suas estratégias apresentaram uma maior capacidade de explorar diversas possibilidades e desenvolver soluções mais robustas. Em

particular, a manipulação concreta das figuras facilitou o entendimento das propriedades geométricas e a aplicação de conceitos matemáticos para resolver a situação.

A importância dos materiais manipuláveis emergiu como um ponto chave nos processos de ensino e de aprendizagem da geometria. Estudos de Clements, Bartolini e outros corroboram essa visão, destacando que tais materiais não apenas promovem a visualização e representação das figuras geométricas, mas também facilitam a compreensão dos processos cognitivos envolvidos na resolução de problemas. A manipulação de materiais concretos permitiu que os alunos explorem propriedades e possibilidades de maneira dinâmica e envolvente, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades visuais e espaciais. Nesse contexto durante a seção de estudo, a utilização de materiais manipuláveis, como papel quadriculado para a criação de modelos geométricos, mostrou-se eficaz na facilitação da compreensão dos problemas propostos. Os alunos que adotaram essa abordagem puderam desenvolver apreensões sequenciais e operatórias de forma mais intuitiva, o que se refletiu na precisão e eficácia de suas soluções. A construção de modelos concretos permitiu aos alunos visualizarem e manipular as figuras de maneiras que seriam difíceis de realizar mentalmente ou apenas com descrições verbais.

O uso de materiais manipuláveis e a ênfase na exploração de diferentes apreensões figurais destacam a necessidade de incorporar práticas pedagógicas que promovam a interação física e visual com os conceitos geométricos. As atividades que incentivam a criação e manipulação de figuras concretas devem ser integradas ao currículo de matemática para enriquecer a experiência de aprendizagem dos alunos.

Consideramos que perspectivas futuras podem incluir a ampliação deste tipo de abordagem em diferentes contextos educacionais, avaliando seu impacto em turmas diversas e com alunos de diferentes níveis de habilidade. Investigações adicionais poderiam focar na aplicação de tecnologias digitais, como softwares de geometria dinâmica, para complementar o uso de materiais manipuláveis tradicionais. Tais ferramentas podem oferecer novas formas de explorar e compreender conceitos geométricos, integrando a visualização e manipulação digital às estratégias de ensino já estabelecidas.

Em conclusão, a pesquisa reafirma a importância das figuras geométricas e dos materiais manipuláveis na resolução de problemas geométricos. Ao desenvolver múltiplas apreensões

figurais, os alunos são capacitados a abordar problemas de maneira mais completa e eficaz, promovendo um aprendizado mais profundo e duradouro da geometria.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. JUSTULIN, A. M. NOGUTI, F. C. H. ONUCHIC, L. R. **Resolução de Problemas (ed. 2):** teoria e prática. Jundiaí: Pacto Educacional, 2021. 248 p.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** São Paulo: Edições 70, 2011. 229 p.

BARROSO, M. M. **As Apreensões Em Geometria: um estudo com professores da educação básica acerca de registros figurais.** Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Maringá, Programa de Pós- Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática UEM, Maringá, PR, Centro de Ciências Exatas, 2015. Disponível em: <http://repositorio.uem.br:8080/jspui/handle/1/4522> Acesso em: 01 jul. 2022.

BARTOLINI, M.G.; MARTIGNONE, F. **Manipulatives in Mathematics Education.** In: LERMAN, S. (eds). *Encyclopedia of Mathematics Education.* Springer, Cham, 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_93 Acesso em: 01 jul. 2022.

CLEMENTS, D. **Concrete manipulatives, concrete ideas.** *Contemporary issues in early childhood*, v. 1, p. 45-60. 1999.

CLEMENTS, L. **A model for understanding, using and connecting representations.** *Teaching children mathematics*, v. 11, p. 97-101. 2004.

DUVAL R. **Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique.** *Repères-IREM*, n.17, p. 121-138. English title: The different functions of figures in a geometrical sequence, 1994. Disponível em: https://www.univ-irem.fr/reperes/articles/17_article_119.pdf. Acesso em: 01 jul. 2022.

DUVAL, R. **Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings.** In: SUTHERLAND, R.; MASON, J. (eds). *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education.* NATO ASI Series, v. 138. Springer, Heidelberg, 1995. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_10

DUVAL, R. **A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics.** *Educ Stud Math*, n. 61, 103–131, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>.

DUVAL, R. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência.** *Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence.* *REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática*, UFSC, Santa Catarina, v. 07, n. 1, p. 118-138, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118>.

DUVAL, R. **Registers of Semiotic Representation**. In: LERMAN, S. (eds). Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Cham, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100033-

GALVÃO, M. E. E. L.; PANOSSIAN, M. L. **Recursos didáticos em aulas de matemática o proposto pelas pesquisas e o praticado**. [Livro eletrônico]. Brasília, DF: SBEM Nacional, 2022. Formato PDF.

GRIDOS, P.; AVGERINOS, E.; MAMONA-DOWNS, J. et al. **Geometrical Figure Apprehension, Construction of Auxiliary Lines, and Multiple Solutions in Problem Solving: Aspects of Mathematical Creativity in School Geometry**. Int J of Sci and Math Educ., 20, 619–636, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10155-4> Acesso em: 01 jul. 2022.

KARPUZ, Y.; GÜVEN, B. **Are 9th grade students ready to engage in the theoretical discursive process in geometry**. REDIMAT– Journal of Research in Mathematics Education, v.11, n. 1, p. 86-112, 2022. doi: 10.17583/redimat.3667. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.17583/redimat.3667> Acesso em: 01 jul. 2022.

KARPUZ, Y.; ATASOY, E. **Investigation of 9th grade students' geometrical figure apprehension**. European Journal of Educational Research, v. 8, n. 1, p. 285-300, 2019. doi:10.12973/eu-jer.8.1.285. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/330398958_Investigation_of_9th_Grade_Students'_Geometrical_Figure_Apprehension Acesso em: 01 jul. 2022.

MATOS, J.M.; SERRAZINA, L. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MORETTI, M. T.; CANS, A. **Releitura das apreensões em geometria e a ideia de expansão figural a partir dos estudos de Raymond Duval**. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, v. 16, n. 3, p. 303-310, 2024. DOI: <https://doi.org/10.17921/2176-5634.2023v16n3p303-310>.

PASSOS, C. L. B. **Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática**. In: LORENZATO, S. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associado, 2010. p. 77-92.

PIROLA, D. L. **Aprendizagem em geometria nas séries iniciais: uma possibilidade pela integração entre as apreensões em geometria e as capacidades de percepção visual**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências da Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, 2012. Disponível em: <http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/96199> Acesso em 04 maio 2024.

SILVA, A.A.A da. **Possibilidades de apreensões mobilizadas na manipulação de figuras na resolução de problemas de geometria.** 147 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Centro Universitário Anhanguera de São Paulo, São Paulo. 2023. Disponível em: <https://repositorio.pgsscogna.com.br/handle/123456789/67114> Acesso em 04 maio 2024.

WEISS, D. **The rationale for using manipulatives in the middle grades.** Mathematics teaching in the middle school, v. 11, n. 5, p. 238-242, 2006.

HISTÓRICO

Submetido: 30 de julho de 2024.

Aprovado: 18 de novembro de 2024.

Publicado: 13 de dezembro de 2024.