



Formação de Professores: as contribuições das Representações Semióticas evidenciadas pelo GeoGebra no ensino de frações

Teacher Training: the contributions of Semiotic Representations evidenced by GeoGebra in the teaching of fractions

Eli Ferreira dos Santos¹
Universidade Cruzeiro do Sul

Suzete de Souza Borelli²
Universidade Cruzeiro do Sul

RESUMO

Este artigo teve por objetivo analisar as contribuições das representações semióticas de tratamento e conversão no ensino de frações numa formação de professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental. Nessa formação foi utilizada a metodologia de pesquisa qualitativa, que buscou capturar as percepções dos professores diante do próprio processo de formação continuada, do uso das representações semióticas, juntamente com as construções simultâneas do *software GeoGebra*, apoiadas nas referências teóricas sobre frações. Foi observado melhoria na compreensão do conceito de frações, seus significados e procedimentos operatórios, que contribuiu para ter um outro olhar para o ensino e aprendizagem das frações.

Palavras-chave: Representação semiótica; Frações; Formação de professores; *GeoGebra*.

ABSTRACT

The aim of this article was to analyze the contributions of semiotic representations of treatment and conversion in the teaching of fractions in a training course for mathematics teachers in the final years of elementary school. In this training, qualitative research methodology was used, which sought to capture teachers' perceptions regarding the continuing education process itself, the use of semiotic representations, together with the simultaneous constructions of the *GeoGebra* software, supported by theoretical references on fractions. An improvement in understanding the concept of fractions, their meanings and operational procedures was observed, which contributed to having a different perspective on the teaching and learning of fractions.

Keywords: Semiotic representation; Fractions; Teacher training; *GeoGebra*.

INTRODUÇÃO

Este artigo teve por objetivo analisar as contribuições das representações semióticas para o ensino dos números racionais na forma fracionária, utilizando as construções simultâneas proporcionadas pelo uso do *software GeoGebra* em uma formação de professores dos anos

¹ Mestre em Ensino de Ciências e Matemática (UNICSUL). Professor (SEDUC-SP), São Paulo, São Paulo, Brasil. Rua Antônio Paranhos, 95, Perus, São Paulo, São Paulo, Brasil, CEP: 05208-220. ORCID iD <https://orcid.org/0009-0001-6359-4606>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5141618589749169>. E-mail: erafabruno@gmail.com.

² Doutora em Ensino de Ciências e Matemática (UNICSUL). Professora de Pós-graduação (UNICSUL), São Paulo, São Paulo, Brasil. Av. Marechal Deodoro 597 ap.41, Santa Paula, São Caetano do Sul, São Paulo, CEP: 09541-300. ORCID iD <https://orcid.org/0000-0002-0738-8162>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4142294210381247>. E-mail: suzeteborelli@gmail.com.

finais do ensino fundamental. Participaram dessa formação quatro professores de matemática e uma professora facilitadora, cuja função foi acompanhar a formação e mediar a relação entre todos os participantes.

O ensino e a aprendizagem do conceito e dos significados das frações são complexos, e uma das dificuldades dos professores é a construção de sequencias didáticas que efetivamente melhorem a aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, a formação teve a intenção de: *“Propor aos professores situações de aprendizagens que integram as representações semióticas com o uso do GeoGebra para o ensino dos números racionais na forma fracionária”*.

As representações semióticas contribuem para a compreensão das diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático, como as frações. Em sua obra *“Semioses e Pensamento Humano”* Duval (2009, p. 14) apresenta e faz uso das representações semióticas para a construção do conhecimento matemático, “[...] não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação”. Para o autor é essencial a compreensão do significado de uma representação em relação ao seu objeto matemático, ou seja, reconhecer que um objeto pode ter diferentes representações é essencial para o aprendizado. A representação mental e a sua representação semiótica de maneira adequada evidenciam a aquisição do conhecimento matemático sobre o objeto estudado.

Ao examinar o ensino e a aprendizagem dos números racionais na forma fracionária, surgem questões que influenciam a compreensão desse conceito: por que é necessário fazer mais de uma representação do mesmo objeto de estudo, e como isso pode afetar a compreensão dos significados de frações pelos professores e pelos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental? De que maneira as sequencias de atividades propostas podem colaborar para a formalização do conceito de fração e da compreensão de seus significados e procedimentos?

Esses questionamentos são importantes para a investigação dos processos de aquisição desses conhecimentos, uma vez que indicam aspectos conceituais que demandam a intervenção do professor em sala de aula.

O ensino de frações inicia-se formalmente no 4º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018). Posteriormente, a cada ano escolar os conhecimentos vão se aprofundando até o 7º ano, sendo utilizados em diferentes situações no decorrer da educação básica.

Cabe destacar que a BNCC (2018), orienta que o ensino de frações deve se iniciar pelas frações unitárias e se aprofundar gradativamente para as operações nas resoluções de problemas.

Nessa fase espera-se também o desenvolvimento de habilidades no que se refere à leitura, escrita e ordenação de números naturais e números racionais por meio da identificação e compreensão de características do sistema de numeração decimal, sobretudo o valor posicional dos algarismos. Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária. (Brasil, 2018, p. 268-269, grifo dos autores)

A BNCC (2018) afirma que a aprendizagem significativa sobre o pensamento numérico é ampliada quando se articula com outras unidades temáticas, o que propicia uma rede de significados, conforme descrito por Pires (2000), entre as unidades temáticas, incluindo o conhecimento dos números racionais, tanto na forma decimal, quanto da fracionária.

O ensino e aprendizagem de fração, pela sua abrangência de significados, são considerados por muitos pesquisadores como um conteúdo delicado e de difícil formalização conceitual e compreensão. De acordo com Bertoni (2009, p. 20), a autora aponta a questão de uma ruptura que ocorre principalmente quando os alunos se deparam com a complexidade desse tema afirmando:

As operações com símbolos numéricos fracionários surgem de repente, na forma de regras. Os alunos não compreendem os significados iniciais desses números e as relações entre eles, como ocorre quando começam a perceber o sentido dos números naturais. Assim, não constroem o conceito de número fracionário.

A autora destaca as situações de ensino de frações que não contribuem para a formação dos conceitos e significados desses números, que se apoiam muitas vezes em um ensino que faz uso de algoritmos e figuras que não propiciam a compreensão por parte dos alunos. Autores como Behr, et al (1983), Scheffer e Power (2020), Almeida e Ribeiro (2019), discutem as dificuldades da compreensão de frações e de seu ensino. Silva (2020) aponta para os cuidados que se deve ter na elaboração de uma sequência didática. Essas questões foram abordadas em uma formação de professores em nossas pesquisas de doutoramento, porém a ideia de discutir esse tema iniciou-se em uma formação de professores que ocorreu no segundo semestre de 2023

em uma escola pública da cidade de São Paulo. A seguir, o referencial teórico que subsidiou esta formação continuada de professores.

REFERENCIAL TEÓRICO

O ensino dos números racionais na forma fracionaria, segundo autores como Bertoni (2009), Behr et al. (1983) e Scheffer e Powell (2020), é considerado como um conteúdo muito sensível de ensinar e aprender. A BNCC (2018, p. 269) orienta:

Com referência ao Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos.

As frações envolvem vários significados, o que torna sua compreensão complexa, indo além das práticas de repartir, colorir e pintar sugeridas pelos livros didáticos. Bertoni (2009) pondera sobre a importância de trabalhar o desenvolvimento conceitual de frações em detrimento somente a construção de figuras e regras memorizadas. Scheffer e Power (2020), nas suas pesquisas realizadas sobre o que revelam as pesquisas brasileiras de 2013 a 2019 sobre frações, citam os cinco significados mais presentes nas pesquisas, os quais são: números, parte todo, medida, quociente e operador.

- Frações números - decimais ou ordinárias: decimais são as frações que tem no denominador uma potência de 10 e as ordinárias são as frações que tem uma dizima periódica.

- Fração parte-todo: são as frações que representam a parte todo ou divisão.

- Fração medida: são as frações que representam o valor de uma medida

- Fração quociente: indica uma divisão, o resultado dessa divisão.

- Fração operador: um multiplicador de quantidade indicada.

Este conjunto de significados amplia a compreensão dos números racionais na forma fracionaria e auxilia o professor a pensar em sequências que possibilitem aos alunos observarem essas diferenças que são conceituais. Silva (2020) argumenta que uma sequência didática “[...] deve conter um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas”, ou seja, o professor ao propor as atividades, deve considerar o contexto e o significado que o conteúdo de

frações está inserido, elaborando sequência didáticas que estruturam e articulam o conceito com seus respectivos significados.

Para possibilitar melhor compreensão e diminuir a complexidade dos significados de frações, como apoio teórico e prático, apresentamos as representações semióticas de Duval (2009) e as construções simultâneas proporcionadas pelo *software GeoGebra*.

As representações semióticas de Duval

Duval (2009, p. 13) destaca a importância da matemática como uma ciência que ajuda no desenvolvimento intelectual da pessoa e afirma:

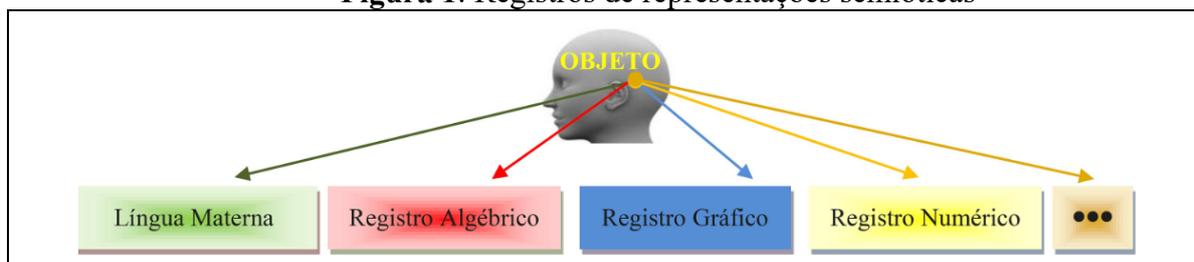
As aprendizagens das matemáticas constituem, em evidência, um campo de estudo privilegiado para a análise de atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e mesmo a compreensão de textos. A particularidade da aprendizagem das matemáticas considera que essas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação além da linguagem natural ou das imagens: sistemas variados de escrituras para números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébricas e lógicas que contenham o estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc.

Para o autor, a matemática é uma ciência que favorece o desenvolvimento de atividades cognitivas que nos permite formar um conjunto de aptidões ou faculdades mentais que nos possibilita processar tudo aquilo que nos rodeia, mobilizando diferentes conhecimentos e habilidades. Nesse contexto, destacam-se as representações noéticas e semióticas. A noésis refere-se às apreensões mentais de um objeto matemático, enquanto a semiótica representa essas apreensões mentais por meio da língua materna, da linguagem simbólica e outras. Um símbolo é aquilo que pode representar um objeto. Sobre isso, Santos (2023, p. 91) afirma:

[...] cabe-nos compreender que a representação pode estar presente em um enunciado em nossa língua materna, em uma fórmula, em uma tabela, em um gráfico, em uma figura geométrica, em um conjunto de números, em uma escrita algébrica, entre outros. Isso são exemplos de representações semióticas que permitem observar um conjunto de sistemas semióticos, com diferentes signos.

Um signo é tudo aquilo que pode fazer sentido para uma pessoa, representando e indicando significados. Para um melhor entendimento, a figura 1 ilustra as representações semióticas.

Figura 1: Registros de representações semióticas

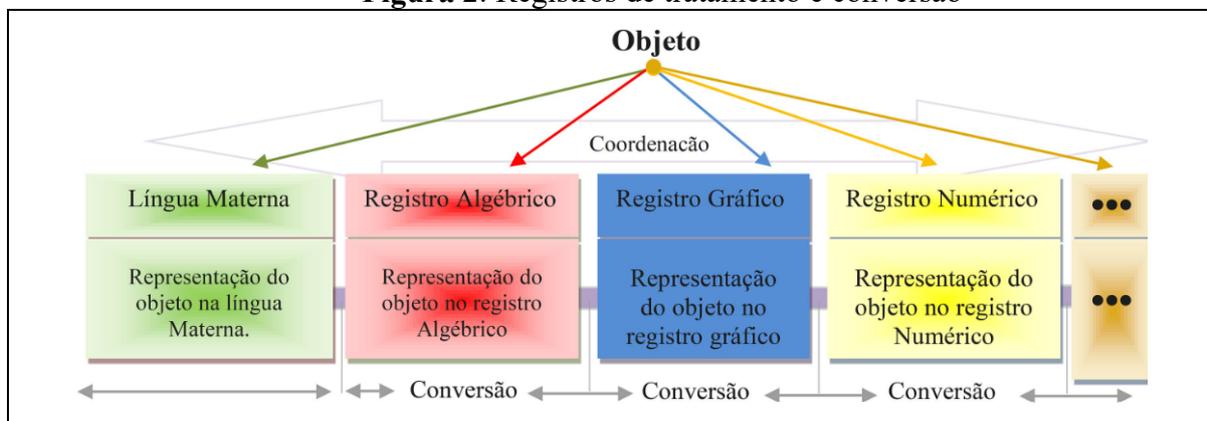


Fonte: Henriques, Almouloud, (2016, p. 468).

A figura 1 ilustra os possíveis registros que podem ser feitos pelo aluno, primeiro cria-se uma imagem de um objeto na mente (noésis) e depois faz o registro semiótico dessa imagem. Duval (2009) afirma que essas duas representações não são possíveis de serem separadas no pensamento humano. Os registros semióticos são os registros de transformação, tratamento e conversão.

O registro de transformação contorna as representações mentais dos objetos, e as representações de tratamento ocorre quando as regras de funcionamento dos registros permanecem. Já as representações de conversão ocorrem quando as regras de funcionamento dos registros não permanecem. A figura 2 a seguir, ilustra detalhadamente as representações de tratamento e conversão.

Figura 2: Registros de tratamento e conversão



Fonte: Henriques, Almouloud, (2016, p. 470).

De acordo com Duval (2009) o tratamento é: “uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas; um tratamento mobiliza então apenas um registro de representação”, ou seja, quando o aluno faz uma representação numérica de uma fração e transforma em um número decimal, a regra de

funcionamento permanece. Exemplo: a fração $\frac{4}{8}$, na representação decimal é 0,5, permanece a mesma regra de funcionamento, ou seja, continua com apenas uma representação de tratamento do mesmo registro numérico.

A representação de conversão ocorre quando há mudanças nas regras de funcionamento. Por exemplo, a fração $\frac{4}{8}$, na sua representação numérica para a figural ocorre a mudança das regras de funcionamento, isto é, as regras de construção da expressão numérica da fração são diferentes das regras geométricas para criar a figura. Essa mudança de registro cria uma dificuldade de aprendizagem, e é importante que o professor conduza os alunos nas diversas representações do mesmo objeto. Duval (2009, p. 90) “Para não confundir um objeto e sua representação, quando a intuição direta do objeto não é possível, é necessário dispor de várias representações semióticas heterogêneas desse objeto e coordená-las”. Quando o aluno consegue realizar várias representações do mesmo objeto, demonstra aprendizagem adquirida sobre o objeto em estudo. No quadro 1, apresentamos as representações de tratamento e conversão da fração.

Quadro 1: Representação de tratamento e conversão

Representação na língua materna	Representação na linguagem numérica	Representação geométrica	Significado: parte-todo
quatro oitavos ou 4 oitavos	$\frac{4}{8}$		O todo dividido em partes iguais, onde cada uma dessas partes é representada como $\frac{1}{n}$

Fonte: Elaboração pelos autores, inspirado em Duval 2009.

O quadro 1 evidencia algumas representações de tratamento e conversão possíveis de serem realizadas. Duval (2009, p. 63) afirma:

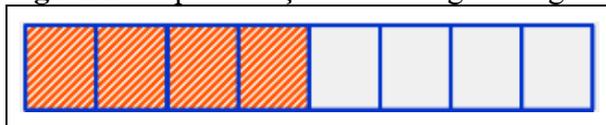
Porém, numerosas observações em aula, assim como na análise dos resultados de investigações e de avaliações, e experiências e aprendizagem mostram que a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para grande maioria dos alunos.

E nesse sentido que Duval (2009) afirma que na mudança de registro não tem nada de evidente para o aluno. Para representar um objeto é necessário conhecer o conceito e as suas propriedades matemáticas que o define. Para Moraes Filho (2009, p. 65):

Definir matematicamente um objeto é dar-lhe um nome mediante determinadas propriedades que o caracterizem e o identifiquem plenamente. Esse nome é geralmente formado por uma única palavra, como triângulo, matriz, círculo etc., mas também pode ser constituído por uma frase curta, cilindro circular reto, números primos entre si, máximo divisor comum etc.

As propriedades que define um objeto são extremamente importantes para saber representá-lo adequadamente, e pode ser construído de maneiras muito diferentes. Isso porque não há continuidade das regras de funcionamento na conversão. Por exemplo, o que é uma fração?

Figura 3: Representação de um registro figural



Fonte: Elaboração pelos autores

Será que esta imagem é suficiente para reconhecer o que é uma fração? Para isto é importante reconhecer a figura por meio de seus significados.

- Definição - significado: número racional, número que pode ser expresso como a razão ou fração de dois inteiros $\frac{a}{b}$ com ($b \neq 0$)
- Indicação: $Q = \left\{ \frac{a}{b}; a e b \in Z e b \neq 0 \right\}$

Q; conjunto dos números racionais apresentado pela relação entre seus elementos

Além dessa representação é necessário referenciar o significado da fração parte-todo no caso da figura 3. Reconhece-se que a figura 3 é uma representação geométrica da fração pela visualização e de acordo com Duval (2009) “As representações mentais são todas as que permitem uma visão de objeto na ausência de todo significante perceptível. Elas são geralmente identificadas às “imagens mentais” [...]”. As imagens preenchem as funções internas conscientes e busca a objetivação da representação. No quadro a seguir, apresentamos os registros de partida e chegada fração.

Quadro 3: Exemplo de registros de partida e chegada de frações

Representação de Partida: Registro da representação linguística	Representação de chegada: Registro de representação semiótica
Número racional, número que pode ser expresso como a razão ou fração de dois inteiros: a e b ($b \neq 0$).	$= \left\{ \frac{a}{b}; a \text{ e } b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$
Razão ou fração de dois inteiros a e b	$\frac{a}{b}$

Fonte: Elaboração pelos autores, inspirado em Duval 2009.

Estes registros de partida e chegada tem a função de comunicação, contribuindo para as funções de objetivação da representação de tratamento ou de expressão numérica. Duval (2009, p. 90) “Para não confundir um objeto e sua representação, quando a intuição direta do objeto não é possível, é necessário dispor de várias representações semioticamente heterogênea desse objeto e coordená-las”. O autor reafirma a necessidade das representações para a compreensão matemática e que diferentes registros ampliam as percepções em diferenciar o objeto da sua representação, ou seja, quando o aluno consegue realizar apenas um registro, pode resultar em uma aprendizagem incompleta. A seguir, apresentamos o *software* de geometria dinâmica, o *GeoGebra*.

As construções simultâneas do GeoGebra

O *GeoGebra* é um *software* de geometria dinâmica livre que potencializa as representações de tratamento e conversão das construções numérica, algébrica e geométrica de modo simultâneo e integrado. Essa integração ocorre por meio da conexão entre as janelas de álgebra e geométrica, e possibilita apresentar as construções de forma simultaneamente, ou uma após a outra. De acordo com Nóbriga (2015), o uso do *software* de modo adequado propicia ao aluno perceber visualmente a mudança do registro, quando altera um registro, o que ocorre em outro registro. Para Santos (2021) essas construções proporcionam ganhos de aprendizagem em relação as construções realizadas no caderno, que é um produto pronto e acabado.

Duval (2009), ao afirmar que as representações de conversão não têm nada de evidente para o aluno, e dependendo da maneira que o professor realiza as construções no *software* diminui a complexidade da compreensão pelo aluno na mudança de registro. Por exemplo, o

software proporciona construir várias representações de fração, o que permite observar suas representações na língua materna, na linguagem geométrica e numérica simultaneamente, e facilita a observação do conceito, das propriedades envolvidas e as operações.

O *software* disponibiliza uma gama de ferramentas para trabalhar com a geometria plana e espacial, em perspectiva 2D e 3D respectivamente, e recentemente foi desenvolvido a versão do *GeoGebra Discovery*. Essa versão permite trabalhar a verificação das propriedades dos objetos, de teoremas etc., principalmente da geometria plana. Mesmo o professor e o aluno que não tiveram contato com o *software*, ao selecionar qualquer ferramenta, é disponibilizado uma comanda de como executar. De acordo com Santos (2021) a falta de conhecimento não pode ser um empecilho para utilizá-lo, e sim oportunidade de aprendizagem. O aluno pode aprender e visualizar dinamicamente as propriedades dos objetos geométricos, o que seria impossível utilizando caderno, transferidor, régua e compasso. Isso porque, cada uma das representações seria feita individualmente e não como acontece no *software GeoGebra*.

Para o professor, o *software* oferece a funcionalidade de acompanhar a construção em cada passo, utilizando a ferramenta *barra de navegação para passos da construção*, o que melhora o *feedback* ao aluno. Também é possível que o professor compartilhe *link* de atividades, e assim, o aluno salva, resolve e envia o *link* para a correção do professor. Tem a opção para o professor criar a sua própria turma na plataforma, o que proporciona aos alunos realizarem as atividades online e compartilhadas.

METODOLOGIA

O objetivo da pesquisa foi analisar as contribuições das representações semióticas para o ensino dos números racionais na forma fracionária, utilizando as construções simultâneas proporcionadas pelo uso do *software GeoGebra* em uma formação de professores dos anos finais do ensino fundamental. Em vista disso, foi utilizada a pesquisa qualitativa, e a escolha por essa abordagem se deu pela possibilidade de apreender as interações dos professores sobre o conteúdo de frações, apoiadas pelo olhar do formador/pesquisador.

A pesquisa qualitativa de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 76) "Entretanto, tanto a prática do ensino quanto a prática da pesquisa exigem que o professor seja reflexivo". Essa ação reflexiva do professor leva-o a avaliar a própria prática no momento do ensino, e

continua posteriormente em busca de novas estratégias para atingir os resultados esperados, verificando se há possíveis correções do percurso. Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 50) “Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, onde a pesquisa é realizada e o pesquisador será o principal instrumento, e o olhar do investigador, está muito mais voltado aos processos que estão sendo desenvolvidos do que nos resultados ou produtos”.

A formação ocorreu em uma escola estadual na cidade de São Paulo, com a participação de 4 professores de matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental e uma professora facilitadora, durante o horário da “Atividade de Trabalho Pedagógico Coletivo” (ATPC), de agosto a dezembro de 2023, totalizando 8 encontros, de 1:30 horas cada. O (ATPC) é um momento dedicado para a formação profissional dos professores em serviço da Rede Estadual de Educação. Desses, foi feito um recorte nos 3º, 4º e 5º encontros que envolviam especificamente o estudo de frações, e foram propostas atividades teóricas e práticas. Para a resolução das atividades, foram formados dois grupos com 2 e 3 professores. A coleta de dados para análise deu-se a partir das observações do formador/pesquisador, na interação com os professores durante as atividades propostas, sendo registradas questões que surgiram do grupo para a correção do planejamento do processo formativo e das atividades realizadas na plataforma do *software GeoGebra*.

ANÁLISES E RESULTADOS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Os encontros da formação buscaram apoiar e instrumentalizar os professores no desenvolvimento de atividades e intervenções que possibilitem o avanço dos alunos. Foi trabalhada a habilidade (EF06MA07) – Frações: Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultados de divisão, identificando frações equivalentes.

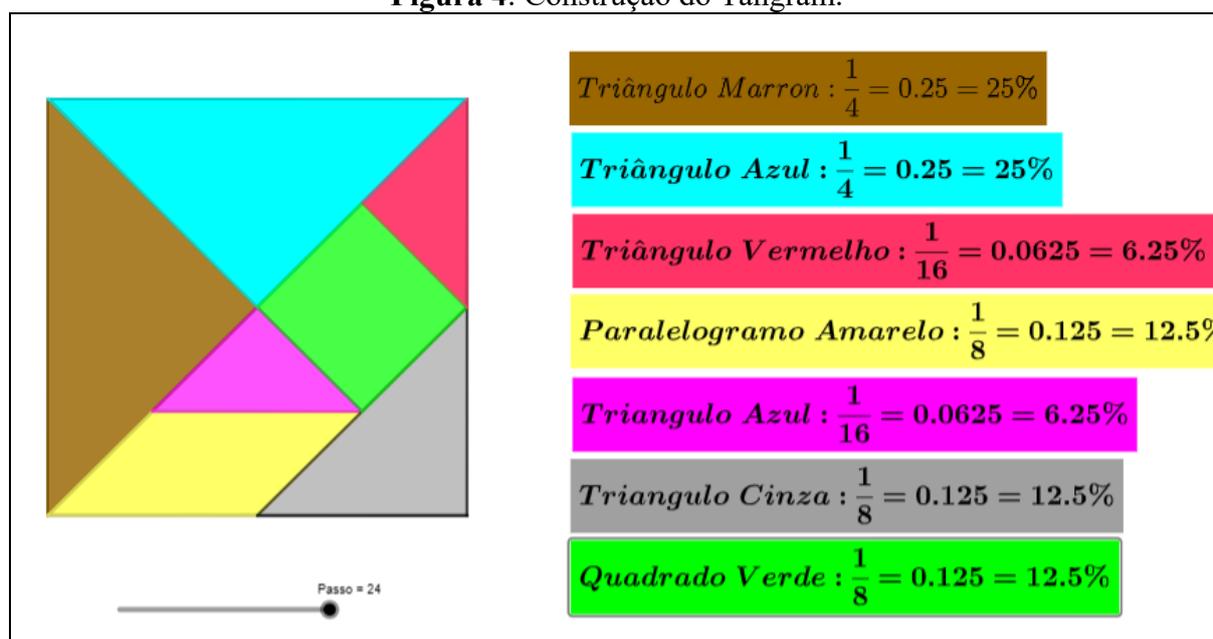
Assim, como o objetivo foi analisar as contribuições das representações semióticas para o ensino dos números racionais na forma fracionária utilizando as construções simultâneas proporcionadas pelo uso do *software GeoGebra*, o grupo de professores compreenderam que os alunos com dificuldades em matemática, especificamente sobre o conteúdo de frações, precisam construir relações entre as representações numérica, algébrica e geométrica em contextos diversos. Além disso, foi fundamental vivenciar situações-didáticas que propiciassem

a oportunidade de desenvolverem a compreensão sobre o conceito, significados e procedimentos operatórios de frações.

Diante das dificuldades dos alunos elencadas pelos professores, como dificuldade de leitura e interpretação de problemas, dificuldade da passagem de uma representação pictórica para frações, e principalmente em reconhecer o conceito e os significados de frações em contextos diversos, foram propostas atividades teóricas e práticas que subsidiaram a formação e o trabalho dos professores em sala de aula. Para ilustrar o 3º encontro, apresentamos a 1ª atividade proposta que consistiu em trabalhar a fração como parte de um inteiro a partir do Tangram.

Inicialmente foi pedido aos professores construírem o Tangram no *GeoGebra* para as primeiras aproximações com o *software*. Perguntado se já conheciam o *software*, relataram que tinham visto em algum vídeo do youtube, mas não tinham conhecimento nenhum. Ao iniciarem a manipulação das ferramentas, observaram que não tinham grandes dificuldades e um treinamento mais efetivo facilitaria a construção dos objetos para depois trabalhar com os alunos. O formador orientou os professores para levar o *software* para sala de aula, e que era necessária uma preparação para expor a atividade e o modo como poderia ser abordado o uso do *GeoGebra*. Após esse momento, o formador apresentou a construção do Tangram para ser trabalhado o conceito e significados da fração parte-todo, utilizando o *link* da construção, e que os professores poderiam utilizar a figura para apresentação em sala de aula, mesmo sem conhecimento, manipulando o controle deslizante, nomeado de Passo, ilustrado na figura 4, a seguir.

Figura 4: Construção do Tangram.



Fonte: Arquivo do formador em <https://www.geogebra.org/classic/ey4bzfvf>.

Nesta atividade foi explorado o significado de frações como parte de um todo, e as representações nas formas figural, fracional, decimal e porcentagens. Os professores já conheciam e tinham trabalhado o Tangram com os alunos, porém a novidade foi a introdução dos termos representações semióticas de conversão e tratamento e o uso do *GeoGebra*. Para a apresentação da solução, foi construído um seletor com 24 passos de construções para evidenciar as representações de tratamento e conversão de maneira simultânea entre as partes geométrica e numérica.

Os professores relataram que não conheciam a integração simultânea das janelas, e de acordo com Nóbrega (2015) e Santos (2021), esse modo de construção e apresentação do Tangram proporciona situações de aprendizagens por meio da visualização, o que facilita a compreensão, ou seja, quando se alterou um registro, os professores visualizaram a mudança no outro registro, e perceberam que seria impossível se tivessem sido utilizado o caderno.

Nessa mudança de registro, Duval (2009) afirma que não tem nada de evidente para o aluno, e a utilização do *GeoGebra* de modo simultâneo, mostrou para os professores que poderia minimizar as dificuldades de compreensão da conversão. Um professor mostrou como tinha trabalhado a atividade e que era basicamente desenhar, pintar e recortar o Tangram e

depois achar cada fração corresponde. Esse professor afirmou que era muito difícil os alunos reconhecerem o triângulo pequeno como uma fração $\frac{1}{16}$, pelo fato de não imaginarem que toda a figura foi dívida em 16 triângulos iguais, e que no *GeoGebra* foi mostrado como forma-se os 16 triângulos. O formador questionou os professores se tratava de uma representação de fração contínua ou discreta, e não souberam distinguir. Foi um momento oportuno para discutir esses significados, e disseram que não tinham essas percepções devido os materiais didáticos utilizados por eles não fazer essa relação.

O formador fez algumas indicações de leituras e orientou os professores com outras sugestões de como poderia ser trabalhada esta atividade na sala de aula utilizando o *link* <https://www.geogebra.org/classic/ey4bzfvr> de maneira dinâmica a partir do seletor. A seguir, apresentamos uma atividade realizada no 4º encontro.

No 4º encontro foi trabalhado o significado da comparação de frações, e inicialmente os professores foram questionados sobre por qual razão os alunos do 8º e 9º ano apresentavam muitas dificuldades no conteúdo, se desde o 4º até o 7º ano são trabalhadas 10 habilidades de frações da unidade temática números? De modo geral, os professores não tinham claro essas percepções da quantidade de habilidades indicadas para o trabalho com os números racionais na forma fracionárias indicadas na BNCC (2018) e no Currículo Paulista (2019), principalmente nos anos finais. Em seguida o formador apresentou um problema para ser trabalhado o conceito de comparação de frações para ser resolvido na plataforma do *GeoGebra*.

Para ampliar a prática de uso do *software*, os professores acessaram a plataforma pelo *link* indicado iniciando com a escrita do problema e a sua resolução. Dois professores apresentam algumas dificuldades para a manipulação das ferramentas para escrever o problema no *software* e o formador pediu a colaboração dos demais professores, pois isso poderia acontecer na sala de sala com os alunos. Apenas um professor conseguiu construir a solução no *software* de modo satisfatório.

Foi observado que os professores resolveram o problema no caderno do modo tradicional para depois transcrever para o *GeoGebra*. Nóbriga (2015) argumenta sobre as dificuldades da passagem do uso do caderno para o uso de *software* e isso pode tirar o aluno da passividade. Ficou evidenciado a repetição do modo tradicional de resolução de problemas em sala de aula, em que primeiro fizeram a resolução numérica e depois a representação geométrica

separadamente. Após a resolução do problema pelos professores, o formador apresentou uma possível solução evidenciando as representações de tratamento e conversão, ilustrado na figura 5.

Figura 5: Problema de comparação de frações.

Em uma competição de natação, três nadadores, Pedro, Ana e Marcos, estão competindo em diferentes provas de estilos diferentes. Pedro nadou $\frac{3}{4}$ da distância total da prova, Ana nadou $\frac{5}{8}$ da distância total e Marcos nadou $\frac{2}{3}$ da distância total. Podemos então afirmar que :

(A) Pedro nadou uma distância maior.
 (B) Ana nadou por uma distância maior.
 (C) Marcos nadou uma distância maior.
 (D) Os três nadaram a mesma distância.

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24}$ $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$
 $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 10}{8 \cdot 10} = \frac{50}{80}$ $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$
 $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = \frac{16}{24}$ $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$

Etapa = 14

$\frac{5}{8} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

Fonte: elaborado pelo formador.

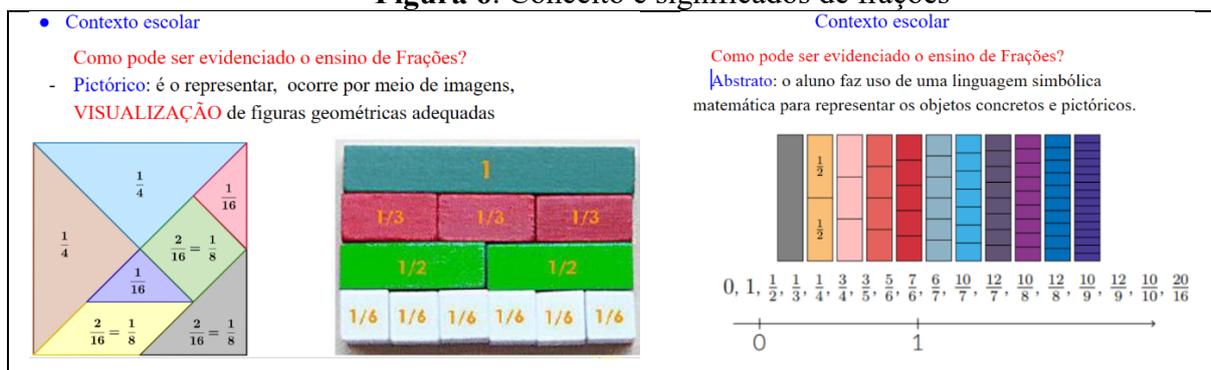
Inicialmente o formador orientou os professores a observarem como as representações estavam sendo construídas e visualizadas para melhorar as suas próprias apresentações. Foi discutida a questão de resolver o problema de modos diferentes usando as representações numéricas. Mesmo sendo feita várias representações numéricas do mesmo objeto, isso se constitui apenas um registro de representação do mesmo objeto, ou seja, as regras de funcionamento permanecem, o que Duval (2009) afirma que a aprendizagem fica incompleta.

À medida que foi feito a apresentação no modo passo a passo, os professores observaram que não tinha sido utilizado o mínimo múltiplo comum para achar a fração equivalente como estavam acostumados a fazer juntamente com os alunos. Nesse sentido, o formador apoiado nas observações de Bertoni (2009), argumentou em que a abordagem tradicional em usar fórmulas prontas e memorizadas, não contribui para a formação do conceito e dos significados de números fracionários, ou seja, muitas vezes o aluno não consegue fazer as relações pertinentes dos significados, mas, consegue manipular as fórmulas, e isso foi observado nas ações de alguns professores. Os professores afirmaram que sempre ensinaram do modo tradicional e costumeiro. Primeiramente apresenta o conteúdo, os procedimentos, um exemplo de uma atividade como modelo e em seguida passam uma lista de exercícios semelhantes para os alunos resolverem.

A resolução apresentada oportunizou aos professores enxergarem que o mínimo múltiplo comum permite encontrar a fração equivalente, e destacamos a fala muito oportuna de uma professora “*que se fosse trabalhada somente na perspectiva de divide pelo de baixo e multiplica o de cima não constituiria significado e sim memorização, mas mostrar as representações juntas melhora o entendimento*”. Essa observação de *mostrar as representações juntas*, ou uma após a outra, vêm ao encontro das afirmações de Duval (2009) e Nóbriga (2015), da necessidade de realizar mais de uma representação do mesmo objeto, simultâneo ou um após o outro, respectivamente, e foram orientados para levar os alunos a formalização do significado de fração equivalente e só depois utilizar a fórmula tradicional. A seguir, o relato do 5º e último encontro especificamente sobre o ensino de frações.

O 5º e último encontro foi dedicado a trabalhar a ideia da formação do conceito de frações a partir de seus significados. A figura 6 a seguir ilustra uma das atividades desenvolvidas.

Figura 6: Conceito e significados de frações



Fonte: Elaboração pelos autores

O objetivo dessas figuras foram para que os professores pudessem resgatar o conceito, os significados e procedimentos abordados nos encontros anteriores, de maneira que pudessem construir significados para o ensino e aprendizagem de frações no contexto escolar. A seguir, alguns questionamentos que foram propostas sobre as representações na figura 6.

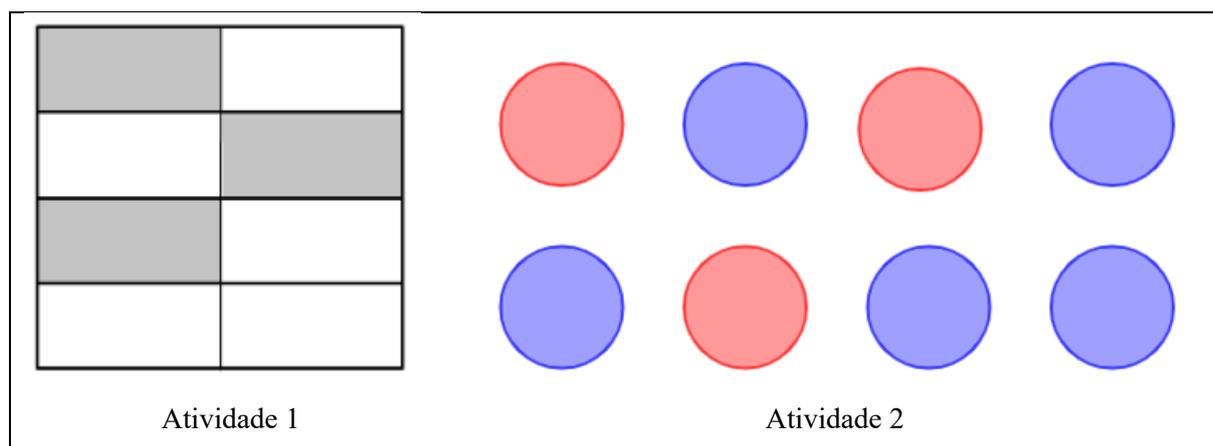
- Será que as imagens são suficientes para reconhecer o que é uma fração? Duval (2009)
- Será que dividir e pintar ajuda na formalização do conceito e dos significados de frações? Bertoni (2009)

- Será que essas sequências de atividades propostas levam o aluno a construir significados sobre frações? Silva (2020)

A partir desses questionamentos, os professores juntamente com o formador foram construindo argumentações sobre as imagens da figura 6, buscando reflexões sobre as suas práticas em sala de aula. Os argumentos que foram consensos refletiram naquilo que se tinha observado nas atividades propostas anteriormente como: num primeiro momento exigir que o aluno faça mais de uma representação do mesmo objeto; melhorar a compreensão de frações para ensinar e romper com a ideia de fração parte-todo pela memorização do denominador e numerador; trabalhar com problemas que façam sentido para o aluno e que somente os exercícios não contribuem para a aprendizagem do conteúdo, entre outras observações.

Em seguida, o formador apresentou duas atividades para o reconhecimento e distinção de seus significados, a seguir:

Figura 7: Reconhecer o conceito de fração



Fonte: elaboração pelos autores

A proposta dessa atividade, foi reconhecer o conceito de fração pelos seus significados, e fazer as representações numéricas. Figura 7, na atividade 1, todos compreenderam que se tratava da fração parte-todo como quociente. Na atividade 2, dois professores reconheceram que se tratava de uma fração parte-todo como razão. A partir das discussões que emergiram, foi observado que alguns professores tiveram dificuldades em diferenciar frações contínuas de frações discretas.

O formador retomou os significados de frações contínuas e discretas, olhando para as representações fracionárias figurais para explicar as diferenças e fez indicações de leituras. Orientou os professores para utilizarem essas atividades em sala de aula e do *GeoGebra* com os *links* disponibilizados. A seguir, algumas considerações finais sobre esse recorte da formação do tema fração.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As atividades propostas no processo formativo tiveram como objetivo analisar as contribuições de situações de aprendizagem que evidenciam o uso das representações semióticas de tratamento e conversão, com uso do *software GeoGebra*, para o ensino e a aprendizagem dos números racionais na forma fracionária com os professores.

Os professores participantes reconheceram a importância de construir mais de uma representação do mesmo objeto, para que a aprendizagem do aluno não fique incompleta (Duval 2009). As várias representações fracionárias ajudaram na compreensão dos diferentes significados para a formalização do conceito de fração. No entanto, foi percebido a dificuldade do conhecimento dos professores sobre o conceito e significado de frações contínuas e discretas envolvendo as representações numéricas e geométricas.

Os professores reconheceram a importância da utilização do uso do *software GeoGebra* para a construção das representações na língua materna, na linguagem numérica e geométrica, principalmente de maneira simultânea que facilitou o entendimento proporcionado pela visualização das propriedades e dos significados de frações. Foi observado a resistência de dois professores em utilizar o *software*, por falta de conhecimento da ferramenta e da sua implementação na sala de aula.

Além disso, perceberam que na elaboração de uma sequência didática, deve conter um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas, Silva (2020), para que favoreça o desenvolvimento das habilidades descritas na BNCC (2018) e no Currículo Paulista (2019).

Enfim, as representações semióticas de tratamento e conversão com o uso do *software GeoGebra* de forma integrada e simultânea, favoreceu a aprendizagem dos professores para o ensino de frações.

Sugerimos a pesquisadores e professores interessados em investigar sobre as contribuições das representações semióticas envolvendo as construções simultâneas proporcionadas pelo *software GeoGebra* para o ensino das operações com frações.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Alessandra Rodrigues de; RIBEIRO, Miguel.: Conhecimento especializado do professor que ensina Matemática no tópico das frações: discutindo quantidades discretas. **Trilhas Pedagógicas**, Pirassununga, v. 9, n. 11, p. 126-143, ago. 2019. https://fatece.edu.br/arquivos/arquivos-revistas/trilhas/volume9_11/8.pdf . Acessado em 16 jun. 2024.

BEHR, M. J. et al.: **Rational Number Concepts in Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. Lesh, R. e Landau, M. (ed.) New York: Academic Press. 1983.

BRASIL. Ministério da educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Versão final. Brasília: MEC, 2018

DUVAL, Raymond: **Semioses e Pensamento Humano. Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira, Ed. Livraria da Física, São Paulo - São Paulo, 2009.

HENRIQUES, A; ALMOULOU, S. A.: Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **SciELO, Ciênc. Educ.**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, <https://doi.org/10.1590/1516-731320160020012> . Acessado em 13 jun. 2024.

NÓBRIGA, J. C. C: **GGBOOK: Uma plataforma que integra o software de geometria dinâmica geogebra com editor de texto e equações a fim de permitir a construção de narrativas matemáticas dinâmicas**. 2015. Tese de Doutorado. UNB. Brasília. Goiás.

PIRES, Celia Maria Carolino: **Currículos de Matemática: Da Organização Linear à Idéia de Rede**. São Paulo: FTD, 2000.

SANTOS, E. F.: **A resolução de problemas de razão e semelhança de triângulos sob a perspectiva das representações semióticas de Duval. 2023**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2023.

SANTOS, E. F.: O Uso do Google Meet, Software Geogebra e Google Formas na Reconstrução do Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática. *In*: TERÇARIOL, Adriana Aparecida de Lima *et al.* **O (Re)inventar de Práticas Pedagógicas com as Tecnologias Digitais em Tempos de Pandemia: Da Educação Básica ao Ensino Superior**. SP: Paco, 2021. cap. 11, p. 229-247.

SÃO PAULO. Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. **Currículo Paulista**. SEDUC/Undime SP. São Paulo: SEDUC/SP, 2019

SCHEFFER, N. F.: POWELL, A. B: Frações Na Educação Básica: O Que Revelam As Pesquisas Publicadas No Brasil De 2013 A 2019. **RPEM**, Campo Mourão, Paraná, Brasil, v. 09, n. 20, p. 08 a 37, nov.-dez.
<https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6259> . Acessado em 26 jun. 2024

SILVA, M. R.: **Uma sequência de atividades de letramento probabilístico em uma abordagem pelo Modelo Teórico dos Campos Semânticos**. 174 f. (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal Juiz de Fora. Juiz de Fora - MG. 2020
<https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/11916/1/maxwellrodriguesdasilva.pdf> . Acessado em 31 mai. 2024.

HISTÓRICO

Submetido: 3 de julho de 2024.

Aprovado: 11 de novembro de 2024.

Publicado: 13 de dezembro de 2024.