RIDEMA
Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática

Processos do raciocínio matemático evidenciados por estudantes do Ensino Médio na resolução de problemas de Geometria Plana

The processes of mathematical reasoning showed in answers given in plane geometric problems.

Thiago Emanuel Santos Goulart e Silva[1]
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo - IFSP campus Guarulhos, SP, Brasil

William Vieira[2]
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo - IFSP campus Guarulhos, SP, Brasil

Roberto Seidi Imafuku[3]
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo - IFSP campus Guarulhos, SP, Brasil

RESUMO

Neste artigo, analisamos processos do raciocínio matemático nas respostas dadas por estudantes do Ensino Médio em questões de geometria plana. A análise é de cunho qualitativo, com a qual buscamos extrair o máximo de informações possíveis das respostas dos participantes. O objetivo foi o de observar se, como e quais os processos do raciocínio matemático são evidenciados nas justificativas apresentadas. As questões foram aplicadas para ingressantes do Ensino Médio no início do ano letivo de 2023. As análises revelam bons conhecimentos dos participantes sobre processos de argumentação e validação, que revelaram conhecimentos e dificuldades destes sobre conceitos de álgebra elementar e geometria plana.
Palavras-chave: Raciocínio matemático, Pensamento algébrico, Pensamento geométrico, Educação matemática, Geometria plana.

ABSTRACT

In this article, we analyze mathematical reasoning processes in the answers given by high school students to plane geometry questions. The analysis is of a qualitative nature, with which we look to extract as much information as possible from the participants' responses. The aim is to observe whether, how and which mathematical reasoning

[1] Licenciando em Matemática e bolsista de Extensão do Instituto Federal de São Paulo - IFSP campus Guarulhos, Guarulhos, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Sebastião Eugenio de Camargo, 82, Butantã, São Paulo, São Paulo, Brasil, CEP: 05360-010. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6330-1877. Lattes: http://lattes.cnpq.br/2149107814979279. E-mail: t.goulart@aluno.ifsp.edu.br.

[2] Doutor em Educação Matemática – UNIAN-SP. Docente e pesquisador do Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores – CEPIN do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos, Guarulhos, SP, Brasil. Av. Salgado Filho, 3501 - Centro, Guarulhos - SP, 07115-000. E-mail: ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-5592-891X. Lattes: http://lattes.cnpq.br/6106510148543215. E-mail: wvieira@ifsp.edu.br.

[3] Doutor em Educação Matemática – UNIAN-SP. Docente e pesquisador do Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores – CEPIN do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos, Guarulhos, SP, Brasil. Av. Salgado Filho, 3501 - Centro, Guarulhos - SP, 07115-000. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4047-9533. Lattes: http://lattes.cnpq.br/7926295090638853. E-mail: roberto.imafuku@ifsp.edu.br.

processes are evidenced in the justifications presented. The questions were applied to high school entrants at the beginning of the 2023 school year. The analyzes reveal the participants' good knowledge of argumentation and validation processes, which revealed their knowledge and difficulties about concepts of elementary algebra and plane geometry.
Keywords: Mathematical reasoning; Algebraic reasoning; Geometric reasoning; Mathematics Education; Plane geometry.

INTRODUÇÃO

A ideia de que para se aprender matemática é necessário saber raciocinar é um ponto de consenso entre professores e educadores matemáticos, que sempre enfatizam a importância do desenvolvimento do mesmo, mas sem necessariamente saber ao certo como defini-lo, tornando o termo "raciocínio matemático" vago e sem significado (Ponte, 2022; Jeannotte; Kieran, 2017). Esta falta de significação pode implicar em uma possível defasagem na aprendizagem matemática pois, quando analisamos alguns documentos curriculares, como o NCTM (2017), estão definidos alguns "princípios e padrões para o ensino da matemática" *(Principles and Standards for School Mathematics* no original*)* (NCTM, 2017), que trazem o raciocínio matemático como fundamental para o desenvolvimento da aprendizagem da matemática.

Nesse sentido, entender o que é e como desenvolver o raciocínio matemático se mostrou uma tarefa necessária, posto que diversos outros currículos ao redor do mundo dão destaque para esta ideia. Exemplos destes currículos são o Programa de Matemática do Ensino Básico de Portugal (Ponte *et al.*, 2007) e a Base Nacional Comum Curricular BNCC (Brasil, 2017). Porém, quando buscamos na literatura a definição de raciocínio matemático, dificilmente encontramos algum consenso entre os pesquisadores pois "[...] diversos professores e investigadores usam este termo de acordo com os diferentes graus de relevância e significados que lhe atribuem, associados a distintas práticas e abordagens teóricas." (Quaresma; Mata-Pereira; Henriques, 2022, p. 1).

Desta forma, se mostra necessário realizar estudos mais aprofundados sobre o tema, buscando definições que trabalhem com os processos do raciocínio matemático e seus elementos estruturais, assim como possíveis ferramentas que são utilizadas pelos estudantes quando estão em atividade matemática (Jeannotte; Kieran, 2017; Ponte, 2022; Barbosa; Vale; Palhares, 2012).

Vieira, Rodrigues e Serrazina (2020) e Ponte (2022) defendem a necessidade de se trabalhar o raciocínio matemático com os professores em seus anos iniciais de carreira e com futuros professores. Eles reiteram que, apenas a conceituação dos processos do raciocínio matemático não é suficiente para que os professores compreendam o tema de forma plena. Observa-se, então, a necessidade de se trabalhar com questões concretas, as quais envolvam análises de respostas de alunos, buscando compreender como se dão os processos do raciocínio matemático. Esta perspectiva, segundo estes autores, possibilitaria que professores e futuros professores consigam pensar em atividades que tenham como objetivo promover o raciocínio matemático de seus estudantes. Neste sentido, diversos outros pesquisadores seguem trabalhando com questões que buscam promover seu desenvolvimento e observar como se manifestam os processos do raciocínio matemático em resoluções apresentadas por estudantes.

Por exemplo, Mata Pereira e Ponte (2011) trabalharam com dois estudantes do 9º, os quais estavam sendo ensinados sob a perspectiva do antigo currículo português, no qual o raciocínio matemático não era visto como fundamental. O objetivo do trabalho, segundo os pesquisadores, era analisar como se davam os processos do raciocínio matemático, dando foco para os processos de justificação, juntamente com as representações e justificações que eram utilizadas pelos participantes. Ao final do trabalho, evidenciaram dificuldades dos estudantes no que tange a necessidade de validação de suas inferências.

Os pesquisadores Yenilmez e Karacoca-Gürler (2021) analisaram as respostas de 1114 alunos do 6º ano, utilizando um sistema de pontuação baseada no uso dos processos do raciocínio matemático nas resoluções dos estudantes. Em suas conclusões, os autores destacam a necessidade de se explorar o raciocínio matemático por meio de atividades que incentivem os estudantes a utilizar diferentes estratégias e abordagens para resolver um mesmo problema.

Rossi e Rivera (2005) trabalharam com 22 estudantes do 8º e 9º ano, propondo-se a investigar quais as estratégias que estes utilizavam em suas resoluções e como os processos de generalização emergiam das mesmas. Os autores buscaram compreender as potencialidades e limitações que as estratégias utilizadas demonstravam. Ao final de seu trabalho, os pesquisadores perceberem que aqueles alunos que utilizavam de estratégias que envolviam o uso de diferentes representações de um mesmo objeto tinham maior facilidade em generalizar.

A produção de trabalhos visando a compreensão dos processos do raciocínio matemáticos e em como utilizá-los de forma a fazer com que estudantes compreendam os conteúdos ensinados é uma perspectiva que vem ganhando destaque mundial nos últimos anos, como enfatizam Ellis e Özgür (2024). A pesquisa realizada por estes autores apresenta um levantamento bibliográfico, de diversas investigações que tratavam sobre os temas do pensamento algébrico e o uso do mesmo para o melhor ensino da álgebra na escola. Os autores observaram uma grande variedade de trabalhos envolvendo o desenvolvimento do ensino da álgebra, principalmente nos anos iniciais de formação. Eles também destacam a necessidade de que se façam pesquisas que busquem observar o aprendizado de álgebra dos estudantes a longo prazo, acompanhando o desenvolvimento do pensamento algébrico ao decorrer de seus estudos.

Neste artigo, discutimos duas questões de geometria plana. O tema da geometria foi escolhido a partir dos resultados de um questionário diagnóstico aplicado para os participantes desta pesquisa, os quais demonstraram ter dificuldades com o tema. Estas dificuldades, como verificaram Frantz e Bisognin (2022), pode ser observada para uma grande parcela dos estudantes do Brasil e do mundo. Este problema, destacam as autoras, é algo sistêmico, englobando todo o processo de ensino da Matemática, o que culmina nas dificuldades e falta de interesse de estudantes por esta área de conhecimento.

As discussões apresentadas aqui são fruto de uma iniciação cientifica, na qual buscou-se observar como os processos do raciocínio matemático emergem das respostas de estudantes do Ensino Médio. Analisamos o encadeamento das ideias geradas pelo uso destes processos, visando a produção de inferências para a resolução dos problemas. As questões foram aplicadas para estudantes do 1º e 2º anos do Ensino Médio, em atividades extracurriculares que ocorreram na instituição na qual eles estudam.

REFERENCIAL TEÓRICO

Neste artigo, entendemos o raciocínio matemático como uma série de processos estruturais e processuais (Jeannotte; Kieran, 2017), que são utilizados para produzir inferências sobre um objeto matemático visando produzir um novo conhecimento. Para tal, utiliza-se de conhecimentos previamente concebidos para justificar as conjecturas e afirmações realizadas e assim, validar inferências e alterar o valor epistêmico de uma sentença (Ponte, 2022; Vieira; Serrazina; Rodrigues, 2020).

Dentre os processos estruturais associados ao raciocínio matemático podemos evidenciar três tipos de pensamento como fundamentais: o pensamento dedutivo, indutivo e o abdutivo. Ao pensamento dedutivo compete-se o processo de inferir, realizando o resgate de conceitos anteriormente adquiridos, para assim, justificar as conclusões. O pensamento indutivo e abdutivo são semelhantes, por ambos tratarem dos processos de generalização e inferências a partir de semelhanças entre objetos matemáticos. O pensamento indutivo trata da análise de um caso específico, buscando encontrar semelhanças em outros casos para assim se estabelecer uma regra geral, enquanto o pensamento abdutivo surge a partir da observação de semelhanças e padrões, buscando produzir as primeiras conjecturas (Ponte, 2022; Jeannotte; Kieran, 2017).

No que diz respeito aos processos do raciocínio matemático, consideramos cinco deles como mais relevantes: conjecturar, generalizar, identificar padrões, comparar e classificar, os quais estão inseridos nos aspectos estruturais, podendo ou não, se conectarem. Jeannotte e Kieran destacam também um "segundo conjunto de processos, que tem a alteração do valor epistêmico da sentença em primeiro plano" (2017, p. 17). Este segundo conjunto trata dos processos de validação e prova, que estão ligados a validação das inferências e o processo de justificação, associados a argumentação e fundamentação matemática das conjecturas produzidas (Vieira; Serrazina; Rodrigues, 2020; Jeannotte; Kieran, 2017).

Há de se destacar os processos de generalizar e justificar, que Ponte (2020) trata como partes fundamentais para o raciocínio matemático, enquanto os demais tomam papeis de processos auxiliares. O processo de generalizar envolve a habilidade de estabelecer relações entre objetos matemáticos distintos, através da observação de padrões e semelhanças, além de buscar entender um tipo de raciocínio para outros objetos semelhantes, trabalhando com a classificação destes mesmos objetos. No que tange a justificação, seu destaque se dá pela importância do desenvolvimento das habilidades de argumentação matemática. Sejam estas por meio de argumentos que se utilizam do formalismo ou que apenas utilizam de elementos não formais, mas que conseguem estabelecer um percurso lógico que valide a premissa dada (Ponte, 2020; Vieira; Serrazina; Rodrigues, 2020; Stylianides; Stylianides, 2009).

No desenvolvimento do pensamento algébrico e do pensamento geométrico podemos observar a relevância que os processos do raciocínio matemático têm sobre estes dois tipos de pensamento. De fato, o pensamento algébrico trata dos processos de pensar genericamente, tendo a habilidade de estabelecer relações entre estruturas, por meio da busca de padrões e regularidades. De acordo com Ponte, é um tema fundamental a ser desenvolvido nos anos iniciais, para assim, posteriormente, fundamentar melhora argumentação matemática por meio das expressões algébricas (Ponte, 2006). O pensamento geométrico compete-se dos processos que envolvem estabelecer relações entre elementos visuais e conceitos abstratos da geometria, habilidade em realizar e compreender construções geométricas e habilidade na observação de padrões e classificação de elementos (Costa, 2020). Estes tipos de pensamentos podem ser entendidos como partes do raciocínio matemático voltados para áreas especificas da Matemática, porém gozando de seus processos e sendo parte fundamental para seus desenvolvimentos (Ponte, 2006).

A geometria escolar é uma das áreas da Matemática que tanto os estudantes, quanto professores, apresentam dificuldades (Frantz; Bisognin, 2022). Por parte dos estudantes, a falta de interesse ou percepção da geometria no dia a dia podem ser causadoras destas dificuldades. Por parte dos docentes, a falta de conhecimento e uma má formação na área da geometria acaba gerando inseguranças em se ensinar este tópico, o que reforça mais ainda o desinteresse dos estudantes. Nesse sentido, Frantz e Bisognin (2022) evidenciam um problema sistêmico do ensino e aprendizagem da geometria, que limita a forma com que estudantes desenvolvem o raciocínio geométrico e o pensamento visual/criativo.

Alguns estudos mostram que, quando os estudantes se utilizam de estratégias que empregam os pensamentos algébrico e geométrico ou as estratégias visuais e algébricas combinadas, demonstram um melhor desempenho em resolver problemas, quando comparadas com estudantes que dão prioridade a apenas um tipo de estratégia (Barbosa; Vale; Palhares, 2012). Estes estudos indicam que, para além da promoção do raciocínio matemático e de seus processos, é necessário que os estudantes desenvolvam estratégias para a resolução de problemas que busquem dar significado e estabelecer relações entre elementos algébricos e geométricos/visuais (Barbosa *et al.*, 2012; Ponte, 2006).

Nas questões elaboradas e aplicadas para nossos participantes, buscamos envolver as perspectivas teóricas relacionadas ao pensamento algébrico e geométrico.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa é de caráter exploratório, com análise qualitativa dos dados. Para sua realização, nos valemos de duas etapas de um processo de levantamento de dados. Em um primeiro momento foi feita uma investigação dentro da literatura sobre o que se diz a respeito das definições de raciocínio matemático, suas potencialidades e como este pode aparecer nos processos de resolução de estudantes. Em seguida, elaboramos duas questões sobre temas de geometria plana que foram aplicadas para 5 estudantes do primeiro e segundo ano do Ensino

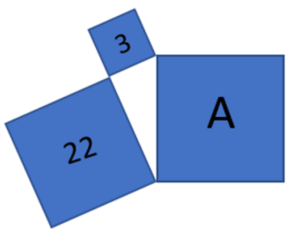
Médio de uma instituição pública de ensino do Estado de São Paulo. Os estudantes foram selecionados por serem voluntários de atividades de revisão de Matemática básica, que eram ministradas pelo primeiro autor, na mesma instituição de ensino em que estudam. As questões foram aplicadas em um dos encontros semanais de atividades de revisão e tiveram duração de uma hora. Os responsáveis pelos participantes assinaram o Termo de Compromisso Livre e Esclarecido (TCLE) e estes assinaram o Termo de Assentimento (TA) e são tratados por pseudônimos nas análises.

Num segundo momento, foi realizada a coleta e análise das respostas dos estudantes, onde buscamos observar como se deu o resgate de conceitos de geometria plana, se os argumentos e justificativas constituíam um percurso lógico e coerente, e se as respostas apresentadas eram validadas por seus argumentos (Stylianides; Stylianides, 2009).

Na questão 1 (Figura 1), era esperado que os participantes realizassem o resgate de alguns conceitos da geometria plana, como elementos do triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras, que fossem capazes de identificar o triangulo retângulo formado pelos lados dos quadrados e de reconhecer que as áreas dos quadrados construídos sob os catetos somadas resultam na área A do quadrado maior. E, nesse sentido, se conseguiam estabelecer uma relação algébrica e geométrica entre os elementos do Teorema de Pitágoras.

Figura 1 – Questão 1 sobre o Teorema de Pitágoras

1--) (Canguru – 2020 (adaptada)): A figura a seguir apresenta três quadrados que formam um triangulo retângulo. Dois Quadrados possuem áreas iguais a 3cm² e 22cm². Determina a área A do terceiro quadrado. Explicite cada parte do raciocínio que você utilizou para chegar à resposta.



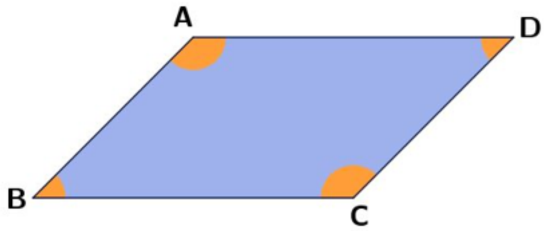
Fonte: Elaborado pelos autores

Além disso, também nos interessa avaliar o desenvolvimento da argumentação de cada participante e como validam e justificam suas conclusões (Vieira; Rodrigues; Serrazina, 2020).

Na questão 2 (Figura 2), esperávamos que nas respostas dos participantes surgisse a interpretação e tradução do que está destacado em língua materna no enunciado para uma linguagem algébrica, condição que sinalizaria o desenvolvimento do processo de generalização (Ponte, 2006; Vieira; Rodrigues; Serrazina, 2020).

Figura 2 – Questão 2, sobre os ângulos internos de um paralelogramo

Determine os ângulos internos do paralelogramo ABCD destacado a seguir sabendo que a medida de cada ângulo obtuso é o dobro da soma dos ângulos agudos. Justifique seu raciocinio



Fonte: Elaborado pelos autores

Também era esperado que fizessem uso correto de conceitos como ângulos agudos e obtusos e propriedades dos quadriláteros, perspectiva que evidenciaria elementos sobre o pensamento geométrico resgatado por cada um deles (Costa, 2020; Ponte, 2020).

Na próxima seção discutimos as respostas apresentadas pelos participantes para as questões 1 e 2, segundo a perspectiva do raciocínio matemático adotada neste trabalho.

ANÁLISE E DISCUSSÃO

No que segue, apresentamos as análises das respostas dos estudantes para as questões 1 e 2. Os participantes são tratados por pseudônimos, de maneira que suas identidades sejam mantidas em sigilo. Após a discussão das respostas de cada uma das questões, apresentamos uma discussão geral dos dados coletados.

ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 1

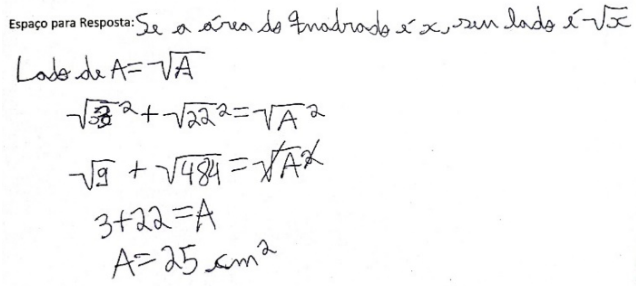
De forma geral, todos os 5 participantes conseguiram realizar as atividades e se propuseram a resolver os exercícios justificando o máximo possível seus raciocínios. Apenas a participante Carla não respondeu nenhuma das duas questões, colocando em suas justificativas “Sinceramente, eu realmente não sei como resolver, mas pensei que poderia obter a resolução calculando a tangente do triangulo retângulo”. Está justificativa evidência uma confusão com

doi 10.34019/2594-4673.

os elementos do triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras e como ela não apresentou nenhuma resolução, não conseguimos analisar nenhum aspecto do raciocínio matemático.

Os participantes Gabriel e Tomas foram os únicos que chegaram a resultados corretos, porém suas justificativas demonstram confusões no que diz respeito ao uso do Teorema de Pitágoras e seus procedimentos algorítmicos e elementos geométricos. Na resposta do Gabriel (Figura 3) podemos observar que ele consegue realizar o resgate das propriedades dos quadriláteros, conjecturando e estabelecendo a relação entre a área do quadrado e seus lados. Ele apresenta uma sutil confusão entre o objeto geométrico quadrado e o número associado a área desta figura, o que é denotado pela sua resposta no trecho que ele trata do lado de A ser a raiz de A. Ainda assim, consegue estabelecer uma relação correta entre a área de um quadrado e os lados da figura.

Figura 3 – Resposta de Gabriel para a questão 1.

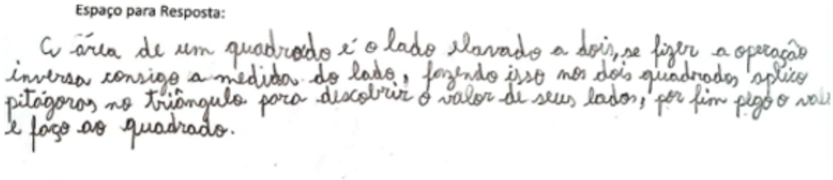


Fonte: Dados da pesquisa

Estes elementos resgatados são utilizados logo em seguida no Teorema de Pitágoras, mostrando que Gabriel consegue reconhecer o triângulo retângulo e seus elementos, como indicado na Figura 3. Em sua justificativa, observamos que ele acaba por realizar uma conta desnecessária, pois acaba tomando como catetos, a $\sqrt{3}$ e a $\sqrt{22}$. Ao aplicá-los no teorema, eleva-os ao quadrado, para depois extrair as raízes, quando bastava somar as áreas dos quadrados, denotando também uma confusão algorítmica no uso do teorema.

Tomas e Gabriel evidenciam em suas resoluções um entendimento geométrico a respeito da relação entre o cálculo de área e os lados de um quadrado. Tomas acabou optando por transcrever seu pensamento somente com elementos textuais, não utilizando nenhum algoritmo, porém, em seu argumento, explica exatamente como resolveria o problema, conforme destacado na Figura 4.

Figura 4 – Resposta de Tomas para a questão 1.


Espaço para Resposta:

A área de um quadrado é o lado elevado a dois, se fizer a operação inversa consigo a medida do lado, fazendo isso nos dois quadrados aplico pitágoras no triângulo para descobrir o valor de seus lados, por fim pego o valo e faço ao quadrado.

A área de um quadrado é o lado elevado a dois, se fizer a operação inversa consigo a medida do lado, fazendo isso nos dois quadrados aplico pitágoras no triângulo para descobrir o valor de seus lados, por fim pego o valor e faço ao quadrado

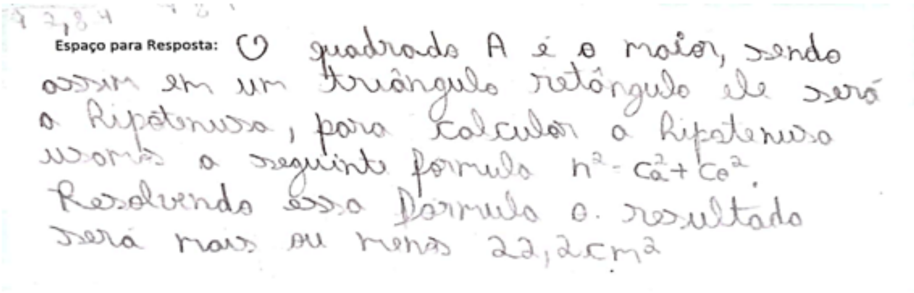
Fonte: Dados da pesquisa

Em sua resposta, observamos que Tomas realiza o resgate de elementos da geometria plana necessários para realizar suas inferências, além de evidenciar conhecimentos acerca das operações que envolvem o cálculo de área, como no trecho que ele diz que "A área de um quadrado é o lado elevado a dois, se fizer a operação inversa consigo a medida do lado". Em sua explicação, indica que utilizaria o algoritmo do Teorema de Pitágoras para conseguir determinar a área do quadrado A, valendo-se de passos desnecessários para sua conclusão, e revelando não ter percebido que bastava somar as áreas dos quadrados para concluir a área do quadrado A. Embora apresente uma boa descrição dos procedimentos que utilizaria, Tomas não realiza os cálculos e não apresenta uma resposta para o problema.

Nestes casos, ambos os participantes conseguem articular bem suas ideias, justificando seus argumentos de forma correta e lógica. No entanto, também apresentam dificuldades no que diz respeito aos procedimentos algorítmicos do Teorema de Pitágoras, o que é mais evidente na resposta de Gabriel, Tomas também indica em sua explicação que possivelmente realizaria o mesmo procedimento. As dificuldades apresentadas pelos participantes surgem, provavelmente, de uma possível falta de clareza no que diz respeito a um entendimento geométrico do Teorema de Pitágoras, o que é evidenciado pelo uso desnecessário do algoritmo. De todo modo, as respostas apresentadas por Gabriel e Tomas indicam bons conhecimentos destes participantes no que diz respeito aos processos de argumentação e justificação, na medida em que resgatam conhecimentos anteriores para justificar suas decisões.

Em sua justificativa, Silas relaciona os elementos visuais com a ideia do teorema de Pitágoras dizendo que "O quadrado A é o maior, sendo assim em um triangulo retângulo ele será a hipotenusa, [...]" (Figura 5).

Figura 5 - Reposta escrita de Silas para a questão 1

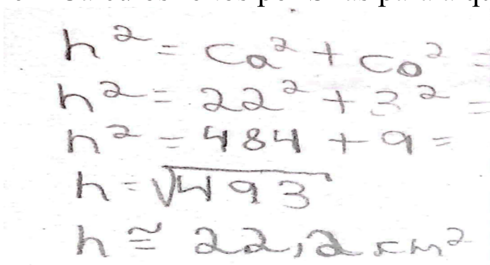


O quadrado A é o maior, sendo assim em um triângulo retângulo ele será a hipotenusa, para calcular a hipotenusa usamos a seguinte formula $h^2=ca^2+ce^2$. Resolvendo essa fórmula, o resultado será, mais ou menos 22,2 cm²

Fonte: Dados da pesquisa

Neste trecho, demonstra que consegue relacionar a área do quadrado maior com a ideia do quadrado da hipotenusa, reconhecendo os elementos do triangulo retângulo de forma correta, porém, acaba por não somar as áreas dos quadrados para assim obter a área do quadrado desejado, optando por realizar o procedimento algorítmico do teorema de Pitágoras, como destacado na Figura 6.

Figura 6 – Cálculos feitos por Silas para a questão 1



Fonte: Dados da pesquisa

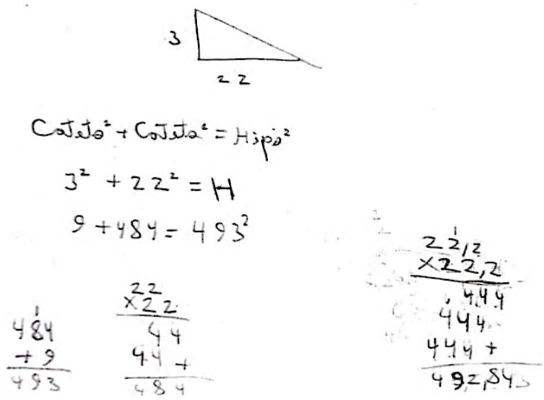
A falta de clareza entre os elementos algébricos e geométricos do teorema de Pitágoras também se evidencia na resposta de Silas, pois ele toma as áreas dos quadrados como catetos e, ao usar o algoritmo, acaba produzindo uma inferência incorreta. Mesmo assim, consegue argumentar de forma clara, resgatando os conhecimentos necessários para fundamentar sua justificativa, evidenciando os processos de argumentação e justificação, mesmo sem ter resolvido corretamente o problema.

Gustavo demonstra conseguir identificar e nomear os elementos do triângulo retângulo, mas não percebeu que 22 cm² e 3 cm² são as áreas dos quadrados e não os catetos. O participante

10.34019/2594-4673.

aplica o teorema de Pitágoras para estes valores e depois extrai a raiz, chegando, assim como Silas, ao valor de 22,2 cm².

Figura 7 - Resposta de Gustavo para a questão 1.

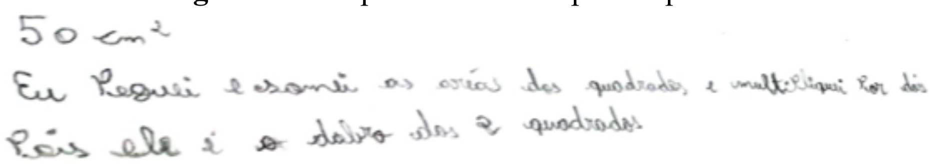


Fonte: Dados da pesquisa

A estratégia que Gustavo utiliza para extrair a raiz de 493 evidencia uma boa percepção sobre radiciação, indicando um conhecimento a respeito de processos algorítmicos da extração de raízes, denotada pelos métodos de aproximação que pode ser observado na Figura 7. No entanto, embora apresente uma tentativa de validação em sua resposta, o participante não apresenta uma argumentação ou justificativa para sua decisão, evidenciando dificuldades com estes processos do raciocínio matemático.

Leticia teve a resposta que mais destoava dos outros participantes, pois apresenta uma inferência incorreta, dizendo que somou as áreas dos quadrados e depois as multiplicou por dois (Figura 8**)**. Ela justifica este procedimento dizendo que o quadrado maior é duas vezes a área dos outros dois somados, o que, provavelmente, indica uma confusão entre multiplicação por dois e a potenciação envolvida no teorema de Pitágoras.

Figura 8 – Resposta de Leticia para a questão 1



50 cm²   Eu peguei e somei as áreas dos quadrados, e multipliquei por dois, pois ele é o dobro dos 2 quadrados

Fonte: Dados da pesquisa

Na análise das respostas para a questão 1, observamos, de forma geral, uma boa argumentação dos participantes. Gabriel e Tomas foram os únicos estudantes que chegaram a inferências corretas, mesmo apresentando certos passos desnecessários e não percebendo a relação entre os elementos algébricos e geométricos. Os demais participantes, demonstram a mesma falta de percepção destes elementos, mas cometeram erros de outra natureza, como destacamos nas análises. Uma das causas possíveis para estas dificuldades pode ser a ausência de relação entre os elementos geométrico e algébrico do teorema de Pitágoras, semelhante ao que Vieira, Imafuku e Pereira (2019) observaram.

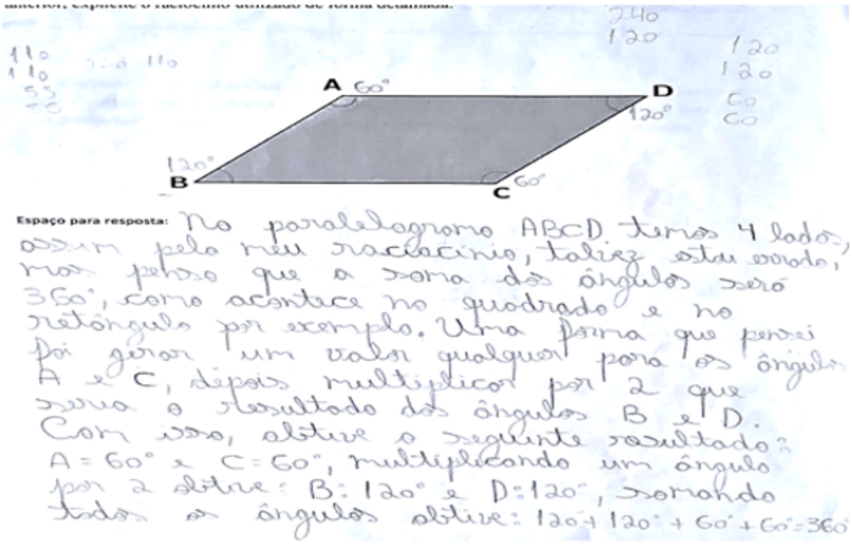
Com exceção de Gustavo que não conseguiu apresentar uma justificativa satisfatória, os demais participantes evidenciaram um bom uso dos processos de argumentação e justificação, mesmo não tendo chegado a respostas corretas, como no caso de Silas e Leticia. Questões que valorizem os processos de argumentação, exigindo que os estudantes apresentem seus pensamentos e conclusões, podem ser úteis não somente por exercitarem os processos justificação e validação matemática, mas também porque terminam por evidenciar possíveis dificuldades e lacunas que estes possuam em seus conhecimentos, como as respostas destes participantes revelam.

ANÁLISE DAS RESPOSTAS DADAS NA QUESTÃO 2

Para a questão 2, Carla e Leticia foram as únicas que não apresentaram nenhuma resposta, apenas escrevendo em suas justificativas que não conseguiram responder à questão.

Na resposta apresentada por Silas (Figura 9) podemos observar uma série de informações que evidenciam o raciocínio matemático, mesmo que o aluno produza inferências incorretas ao final de sua justificativa. No início de seu argumento, ele conjectura a respeito da soma dos ângulos internos do paralelogramo, buscando observar alguma relação que aquela figura tenha com as demais conhecidas. De fato, quando sustenta que "[...] a soma dos ângulos será 360º, como acontece no quadrado e no retângulo por exemplo", indica o uso do processo de classificação, por meio da observação de padrões (Vieira; Rodrigues; Serrazina, 2020; Jeannotte e Kieran, 2017). Ele também valida essa primeira conjectura, fazendo uma comparação entre o paralelogramo e esses dois quadriláteros, concluindo que a soma dos ângulos internos destas figuras serão iguais.

Figura 9 – Reposta de Silas para a questão 2



No paralelogramo ABCD temos 4 lados, assim pelo meu raciocínio, talvez estou errado, mas penso que a soma dos ângulos será 360°, como acontece no quadrado e no retângulo por exemplo. Uma forma que pensei foi gerar um valor qualquer para os ângulos A e C, depois multiplicar por 2 que seria o resultado dos ângulos B e D. Com isso, obtive o seguinte resultado A = 60° e C = 60°, multiplicando um ângulo por 2 obtive B: 120° e D: 120°, somando todos os ângulos obtive: 120° + 120° + 60° + 60° = 360°

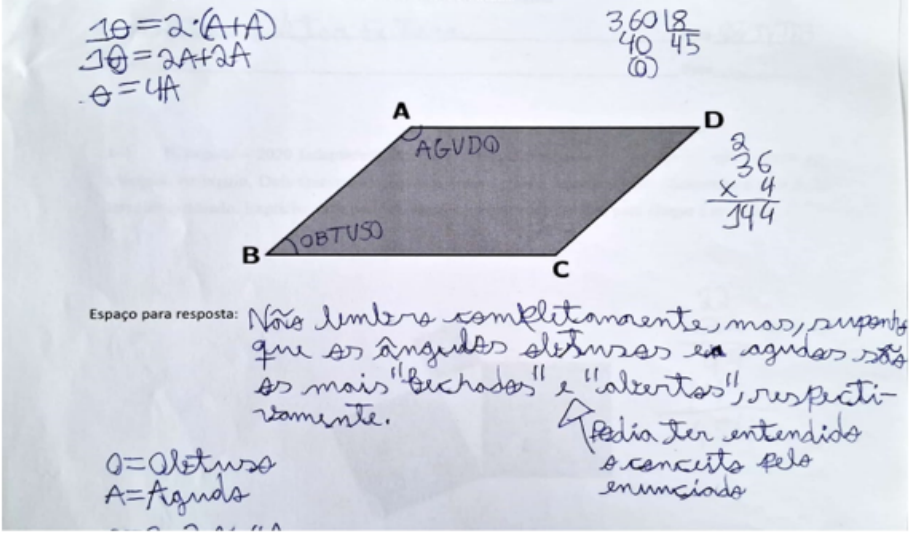
Fonte: Dados da pesquisa

Em seguida, calcula o valor dos ângulos A e C e justifica que "[...] Uma forma que pensei foi gerar um valor qualquer para os ângulos A e C, depois multiplicar por 2, que seria o resultado para os ângulos B e D." Neste passo de sua justificativa, podemos observar algumas confusões, uma vez que, por mais que tenha resgatado alguns elementos dos quadriláteros para produzir suas inferências, não consegue interpretar de forma correta o enunciado, chegando a uma conclusão incorreta no que se refere aos valores dos ângulos B e D serem o dobro dos outros dois.

Em seus argumentos, Silas se utiliza do método de comparação para validar suas inferências sobre a soma dos ângulos internos do paralelogramo, porém acaba por tomar valores arbitrários para os ângulos, chegando a uma conclusão incorreta. Embora não tenha realizado a tradução do enunciado para uma linguagem algébrica, sua resposta denota um bom nível de argumentação, tendo conseguido encadear de forma coerente suas ideias e validar seus argumentos.

Em sua justificativa, Gabriel consegue realizar a generalização que era esperada, traduzindo o enunciado da questão para a linguagem algébrica e manipulando as variáveis de forma correta, evidenciando o uso do pensamento genérico (Ponte, 2006), como podemos observar na Figura 10.

Figura 10 – Primeira parte da resposta de Gabriel para a questão 2

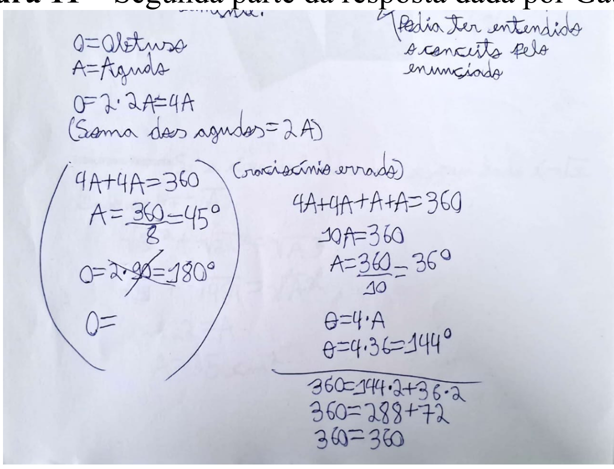


Não lembro completamente, mas, suponho que os ângulos obtusos e agudos são os mais "fechados" e "abertos", respectivamente. (Podia ter entendido o conceito pelo enunciado)

Fonte: Dados da pesquisa

No que diz respeito à sua argumentação, consegue realizar inferências corretas, busca o equacionamento do problema de uma maneira que logo identifica como "raciocínio errado" (Figura 11) para, em seguida, resolver a equação correta, obtendo os valores de 36° e 144° para os ângulos agudos e obtusos.

Figura 11 – Segunda parte da resposta dada por Gabriel

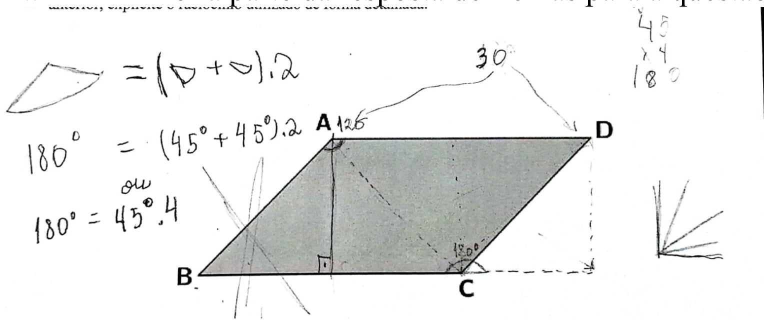


Fonte: Dados da pesquisa

Após resolver a equação, Gabriel se utiliza do processo de validação, para garantir que os valores obtidos estão corretos (Figura 11). Esta postura indica bons conhecimentos sobre o significado da solução de equações. Além disso, este participante também evidenciou, em sua resposta, bons conhecimentos sobre elementos dos quadriláteros e suas propriedades.

O participante Tomas também realizou generalizações a respeito das informações do enunciado, porém se utilizou de elementos visuais (figuras) para representar o que acreditamos ser o ângulo obtuso (representado pelo desenho maior) e o ângulo agudo (representado pelo desenho menor), como podemos observar na Figura 12

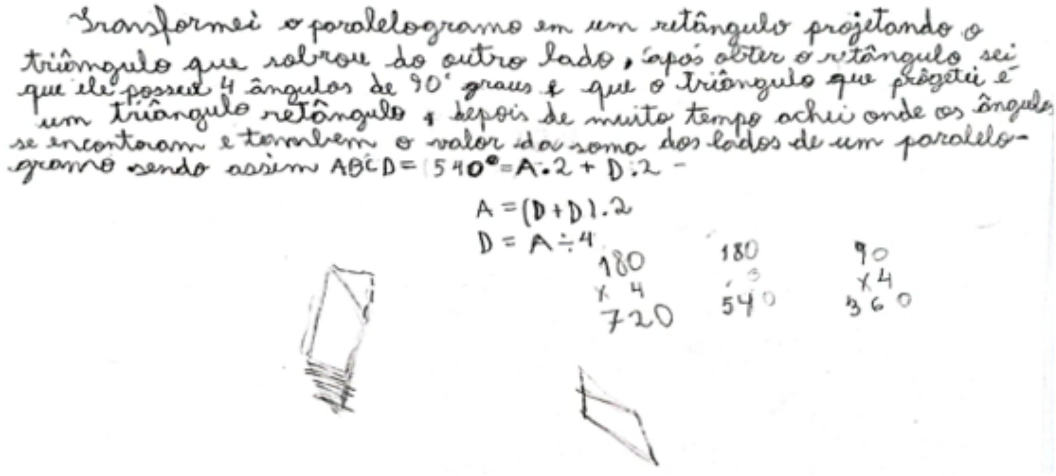
Figura 12 – Primeira parte da resposta de Tomas para a questão 2



Fonte: Dados da pesquisa

Em sua justificativa, ele transforma o paralelogramo em um retângulo, utilizando uma estratégia visual para auxiliar em suas conjecturas (Barbosa *et al*, 2012; Shama; Dreyfus, 1994). Ele realiza essa transformação projetando "o triângulo que sobrou do outro lado" (Figura 13) do paralelogramo, transformando-o em um retângulo Além disso, também resgata algumas características do retângulo, para conjecturar a respeito dos triângulos que ele forma, como revelam os desenhos produzidos por ele (Figura 12). Nesse sentido, ele se utiliza do pensamento geométrico (Costa, 2020) para validar suas conclusões.

Figura 13 – Segunda parte da resposta de Tomas para a questão 2



Transformei o paralelogramo em um retângulo projetando o triângulo que sobrou do outro lado, após obter o retângulo sei que ele possui 4 ângulos de 90° graus e que o triângulo que projetei é um triângulo retângulo, depois de muito tempo achei onde os ângulos se encontram e tambem o valor da soma dos lados de um paralelogramo sendo assim ABCD = 540° = A.2 + D.2

Fonte: Dados da pesquisa

Tomas consegue apresentar de forma correta parte de seu argumento, e resgata diversos conhecimentos importantes da geometria plana e conhecimentos algébricos, indicados na equação $A = (D + D) \cdot 2$ e manipulações apresentadas na Figura 13. A respostas deste participante também revela o uso dos processos de generalização e validação de inferências. Apesar disso, Tomas indica dificuldades com a soma dos ângulos internos de um quadrilátero (ao igualar a equação obtida a 540º), situação que o impediu de resolver o problema corretamente.

Os estudantes, assim como na questão 1, apresentaram bons argumentos e buscaram apresentar formas de validar estes argumentos, mesmo alguns tendo realizado resgates de ideias confusas e chegando a conclusões incorretas. Por meio de seus argumentos, pudemos observar que muitos deles apresentam dificuldades com as propriedades dos quadriláteros e seus ângulos. Na questão 2, nem todos os participantes conseguiram traduzir o enunciado para a linguagem algébrica.

De maneira geral, notamos o uso de diferentes processos do raciocínio matemático utilizados pelos participantes, além de abordagens mais variadas para a resolução do problema. Eles também se valeram de estratégias e argumentos mais detalhados em comparação à questão 1. Assim como destacam Shama e Dreyfus (1994), nas respostas para essa questão observamos um maior uso de estratégias mistas, que relacionam elementos algébricos por meio de elementos geométricos/visuais, com o fim de justificar as conjecturas produzidas.

CONCLUSÃO

No que diz respeito a questão 1, a maior dificuldade que os participantes evidenciaram foi em relação ao teorema de Pitágoras e seus elementos. No que diz respeito a questão 1, a maior dificuldade que os participantes evidenciaram foi em relação ao teorema de Pitágoras e seus elementos. No desenvolvimento dos processos do raciocínio matemático, pudemos observar que alguns dos participantes produziram argumentos de forma clara e coerente em suas justificativas, conseguindo explicitar suas ideias e dificuldades, e realizar o resgate de conhecimentos para fundamentar suas conjecturas, produzindo inferências sobre o problema proposto. As generalizações surgiram em quase todas as respostas, a maioria dos participantes tentou transformar o paralelogramo em um retângulo para estabelecer relações por meio da busca de padrões, utilizando os processos auxiliares da generalização. Por exemplo, Silas, que utiliza os processos de classificar e observação de padrões para inferir a respeito da soma dos ângulos internos do paralelogramo. O processo de generalização também foi evidenciado pela tradução do enunciado para uma linguagem algébrica, realizado por alguns dos participantes, o que evidência o uso do pensamento genérico (Ponte, 2006). Essa perspectiva pode ser observada nas justificativas de Gabriel e Tomas, que conseguem manipular as variáveis, evidenciando o uso da generalização para produzir suas inferências.

Pudemos concluir que os participantes da pesquisa evidenciaram o uso do raciocínio matemático para produzir suas inferências, demonstrando habilidades em argumentar matematicamente, explicitando seus pensamentos de forma clara. De forma geral, também observamos muitos dos participantes utilizando os processos de validação e justificação, processos que entendemos como fundamentais. De fato, seguindo Jeannote e Kieran (2017) e Vieira, Rodrigues e Serrazina (2020), entendemos que estes dois processos podem favorecer que professores consigam compreender mais detalhadamente quais conhecimentos estão confusos para os estudantes e quais eles conseguiram internalizar.

Em sua pesquisa, Mata-pereira e Ponte (2011) observou uma dificuldade dos participantes em realizar traduções de uma “linguagem natural” para a linguagem algébrica, o que também foi observado para boa parte de nossos participantes. Contudo, diferentemente do que constatou Mata-Pereira e Ponte (2011), em nossa análise, os estudantes deram maior atenção nos processos de justificação e validação.

Assim como tratam Barbosa *et al* (2012) e Yenilmez e Karacoca-Gürler (2021), entendemos que o uso de atividades que incentivam os estudantes a trabalharem com diferentes estratégias de resolução são fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Este tipo de atividade tem grande potencial em fazer com que os alunos explorem as relações e propriedades que um mesmo objeto matemático possui.

Por fim, observamos que os alunos demonstraram grandes potencialidades no que tange o uso do raciocínio matemático e seus processos. Porém, enfatizamos que é necessário realizar atividades que busquem preencher as lacunas de conhecimentos que foram observadas em suas respostas. Além de se trabalhar com os estudantes atividades que busquem correlacionar diferentes elementos matemáticos de um mesmo objeto.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos pela bolsa de PIBIFSP concebida e ao(à) avaliador(a), pelas contribuições ao texto.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ana.; VALE, Isabel.; PALHARES, Pedro. Pattern Tasks: Thinking processes used by 6th grade students. **Revista Latinoamerica de Investigación em Matemática Educativa**, v. 15, n. 3, p. 273-293, 2012. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/335/33524579002.pdf

BECKER, Joanne Rossi; RIVIERA, Ferdinand. Generalization strategies of beginning high school algebra students. **Researchgate**. 2005. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/251420737_Generalization_strategies_of_beginning_high_school_algebra_students.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

COSTA, André Pereira da; Pensamento geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 18, p. 152–179, 2020. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6187. Acesso em: 23 jan. 2024.

ELLIS, Amy B., ÖZGÜR, Zekiye. Trends, insights, and developments in research on the teaching and learning of algebra. **ZDM Mathematics Education**, v. 56, p. 199-201, fev. 2024. Disponivel em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-023-01545-9

FRANTZ, Débora de S. F. da S.; BISOGNIN, Vanilde. Ensino da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental: um problema sistêmico. **Revista Educar Mais**, v. 6, p. 28-45, 2022. Disponível em: https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/educarmais/article/view/2648.

JEANNOTTE, Doris; KIERAN, Carolyn. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 3, p. 1-16, 2017. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/316789539_A_conceptual_model_of_mathematical_reasoning_for_school_mathematics

MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João Pedro da. Raciocínio matemático em contexto algébrico: uma análise com alunos do 9º ano. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMATICA. 2011. **Anais eletrônicos**... 2011. Disponível em: https://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/20.Pereira%20e%20Ponte.pdf

NCTM, National Council of Teachers of Mathematics. **Princípios para a ação**: Assegurar a todos o sucesso em Matemática. Associação de Professores de Matemática, Lisboa. 2017.

PONTE, João Pedro da. Números e álgebra no currículo escolar, **Researchgate,** 2006. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/237365684_Numeros_e_algebra_no_curriculo_escolar

PONTE, João Pedro da; SERRAZINA, Lurdes; GUIMARÃES, Henrique; BREDA, Ana; GUIMARÃES, Fátima; SOUZA, Hélia; MENEZES, Luís; MARTINS, Maria Graça e OLIVEIRA, Paulo. **Programa de Matemática do Ensino Básico.** Lisboa: ME, DGIDC, 2007.

PONTE, João Pedro da. **Projeto REASON**: Raciocínio matemático e formação de professores. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2022.

STYLIANIDES, Andreas J.; STYLIANIDES, Gabriel J. Proof constructions and evaluations. **Educational Studies in Mathematics**, v. 72, n. 2, p. 237-253, 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/227008878_Proof_constructions_and_evaluations

VIEIRA, William; IMAFUKU, Roberto Seidi; PEREIRA, Emanuel Fabiano Menezes. Uma análise da resolução de questões sobre o Teorema de Pitágoras. **ForScience:** revista científica do IFMG, Formiga, v. 7, n. 2, 2019. Disponível em: https://forscience.ifmg.edu.br/index.php/forscience/article/view/552

VIEIRA, William; RODRIGUES, Margarida; SERRAZINA, Lurdes. O conhecimento de futuros professores sobre os processos de raciocínio matemático antes e depois de uma experiência de formação. **Quadrante**, v. 29, n. 1, p. 8–35, 2020. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/23012

YENILMEZ, Kürşat; GÜRLER, Ayşe Karakoca. Sixth graders' levels of using mathematical thinking in problem-solving. **Osmangazi Journal of Educational Research**, v. 8, n. 1, p. 111-128, 2021. Disponível em: https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/1734008

HISTÓRICO

Submetido: 26 de abril de 2024.
Aprovado: 02 de julho de 2024.
Publicado: 03 de julho de 2024.