RIDEMA
Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática

Possibilidades de Desenvolvimento de Heurísticas de Resolução de Problemas por meio de ações concretas em sala de aula

Possibilities for Developing Problem-Solving Heuristics through Concrete Actions in the Classroom

Nilton Cezar Ferreira[1]
Instituto Federal de Goiás

RESUMO

Trata-se de uma pesquisa que teve como objetivo elucidar quais iniciativas perpetradas por um discente podem efetuar nele uma indução de heurísticas de resolução de problemas. Como metodologia, levando em consideração uma abordagem qualitativa, foi feito um levantamento dos principais referenciais teóricos que advogam por práticas eficazes direcionadas ao desenvolvimento de habilidades para resolver problemas; E, com base nesse referencial, foram meticulosamente eleitas algumas proposições de ações a serem implementadas em sala de aula. A partir destas ações, concebeu-se e operacionalizou-se um projeto de cunho pedagógico em uma turma de licenciatura em Matemática durante uma Prática Profissional - Prática como Componente Curricular. Ao longo dessa consecução, ancorada pelo arcabouço teórico, constatou-se que transformações efetivas correlatas ao desenvolvimento da aptidão de um indivíduo para resolver problemas, em linhas gerais, não sucedem em um horizonte temporal exíguo. Todavia, as ações aventadas e concretizadas mostraram-se hábeis em instigar alterações de postura no discente, conduzindo-o à imersão na problemática por intermédio de cogitações ativas e reflexivas, com uma qualidade apta a instigar, nesse aprendiz, heurísticas de resolução de problemas.
Palavras-chave: Estratégias de resolução de problemas; Formação de professores de matemática; Prática profissional; Pensamentos ativos e reflexivos.

ABSTRACT

The aim of this research was to elucidate which initiatives perpetrated by a student can induce problem-solving heuristics. As a methodology, taking into account a qualitative approach, a survey was made of the main theoretical references that advocate effective practices aimed at developing problem-solving skills; and, based on this reference, some proposals for actions to be implemented in the classroom were meticulously chosen. Based on these actions, a pedagogical project was designed and implemented in a mathematics undergraduate class during Professional Practice - Practice as a Curricular Component. Throughout this process, anchored in the theoretical framework, it was found that effective transformations related to the development of an individual's ability to solve problems, in general terms, do not take place over a short time horizon. However, the actions proposed and carried out proved adept at instigating changes in students' attitudes, leading them to immerse themselves in the problem through active and reflective cogitation, with a quality capable of instilling problem-solving heuristics in them.
Keywords/Palabras clave: Problem-solving strategies; Mathematics teacher education; Professional practice; Active and reflective thinking.

[1] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Professor titular do Instituto Federal de Goiás (IFG), Goiânia, Goiás, Brasil. Endereço para correspondência: Rua 75, n. 46, setor Central, Goiânia, Goiás, Brasil, CEP: 74055-110. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-9766-4254. Lattes: http://lattes.cnpq.br/2055261061681261. E-mail: nilton.ferreira@ifg.edu.br.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Diversas pesquisas têm orientado os professores sobre o trabalho efetivo com a resolução de problemas em sala de aula. De acordo com Polya (2006), Schoenfeld (1985), Mason, Burton e Stacey (2010) e outros, a resolução de problemas pode ser vista como uma maneira eficaz de desenvolver a capacidade do aluno para resolver problemas. Por outro lado, segundo Onuchic e Allevato (2011), Kilpatrick (2016) e outros, a resolução de problemas também pode ser usada como um meio eficiente para a produção de conhecimento, introduzindo novos conceitos a partir de um problema. Além disso, Cai (2022), Santos e Andrade (2020), Teixeira e Moreira (2022) e outros enfatizam que a resolução de problemas pode ser abordada de forma mais geral, envolvendo proposição, exploração e resolução de problemas.

Independentemente da abordagem escolhida, um dos grandes desafios enfrentados pelos professores ao trabalhar a resolução de problemas em sala de aula é conseguir fazer com que os estudantes se envolvam com o problema. Isso geralmente acontece porque um indivíduo tende a evitar esforço mental, pois, segundo López (2018), o esforço mental consome muita energia e nosso organismo foi programado para economizar energia. Portanto, a maioria dos estudantes tem resistência em se engajar no desafio de resolver um problema e, quase sempre, só o faz quando consideram realmente necessário. Inclusive, muitos justificam essa falta de interesse alegando não saber como proceder diante do problema, muitas vezes enfatizando que não sabem nem por onde começar a resolvê-lo.

Este trabalho apresenta uma pesquisa que surge de uma proposta de ações para ajudar os professores a envolver seus alunos no processo de resolução de problemas. Essas ações são baseadas em atividades capazes de evidenciar e desenvolver, nos alunos, heurísticas, segundo Polya (2006), Schoenfeld (1985) e Mason, Burton e Stacey (2010), reforçadas e adaptadas para a sala de aula em Lam et al. (2011).

Para orientar o processo de investigação, cujo objetivo era desenvolver nos estudantes heurísticas capazes de levá-los a produzir estratégias para a resolução de problemas, estabeleceu-se a seguinte questão de pesquisa: "Que ações pedagógicas são capazes de levar um estudante a desenvolver heurísticas que possam ajudá-los a produzir estratégias de resolução de problemas?".

Para responder a essa questão e, consequentemente, alcançar o objetivo proposto, foram estabelecidas as seguintes ações: 1) Realizar um levantamento bibliográfico de propostas de ações concretas para o uso da resolução de problemas em sala de aula; 2) Elaborar um plano de ensino composto por um conjunto de ações fundamentadas no levantamento bibliográfico realizado de forma a emergir heurísticas que possam desencadear uma estratégia para a resolução do problema; 3) Aplicar esse plano de ensino em uma turma de formação inicial de professores, colocando esses futuros professores na posição de aluno para que possam entender como se desenvolvem as heurísticas em um estudante; e, por fim, 4) Realizar uma análise das ações propostas e, com base nessa análise, compreender se, e como, essas ações podem ajudar de forma eficiente o professor de educação básica a implementar esse tipo de atividade em sua prática docente.

Ao explorar diferentes abordagens e atividades baseadas em heurísticas, esperamos não apenas promover o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas dos estudantes, mas também estimular sua curiosidade, criatividade e autonomia. Acreditamos que investir na formação de professores e na implementação de práticas pedagógicas inovadoras pode potencializar significativamente a aprendizagem dos alunos e prepará-los melhor para os desafios do século XXI.

O QUE SÃO HEURÍSTICAS?

Segundo o dicionário Houaiss e Villar (2009), heurística possui diversos verbetes, com designações específicas para cada área de conhecimento, mas de maneira geral é definida como “a arte de inventar, de fazer descobertas; ciência que tem por objetivo a descoberta dos fatos” (p. 1017). A palavra heurística está relacionada com descoberta, com pesquisa, que, segundo Abaggnando (2007), originou-se de “eúpíOKto” que significava “acho”. Essa palavra foi muito usada pelo grande filósofo Arquimedes de Siracusa, e, para ele, ela estava relacionada ao raciocínio que levava um determinado indivíduo a fazer uma descoberta ou a inventar algo.

Na primeira metade do século XX, o matemático e educador matemático George Polya estudava e pesquisava métodos e técnicas usadas na resolução de problemas de matemática. Assim como Arquimedes, que se interessava pelo raciocínio dos grandes inventores, Polya começou a se interessar pelo raciocínio dos bons resolvedores de problemas, mais especificamente pelos pensamentos que os capacitavam a resolver problemas complexos. Uma pergunta fundamental norteava essa inquietação: por que algumas pessoas têm facilidade para resolver problemas, enquanto outras não? Inclusive, algumas desenvolvem ideias excepcionais que as levam a resoluções surpreendentes, enquanto outras nem conseguem começar. E, frequentemente, isso ocorre com dois indivíduos com o mesmo grau de formação e possivelmente compartilhando os mesmos conhecimentos. Diante disso, Polya atribuiu uma nova designação e um novo significado para a palavra heurística, chamando-a de "heurística moderna", que, segundo ele, busca compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais típicas desse processo, que tenham utilidade. É importante salientar que um estudo meticuloso de heurística deve levar em conta tanto as bases lógicas quanto psicológicas, com objetivos práticos, ou seja, buscar compreender melhor as operações mentais típicas aplicadas à resolução de problemas (POLYA, 2006).

Ainda, Polya (2006) intitula a parte III de seu livro como "Pequeno Dicionário de Heurística", onde apresenta um conjunto de conceitos cuja aplicação pode desencadear heurísticas modernas. Segundo ele, as heurísticas podem se manifestar ao observar analogias, ou ao evidenciar a existência de condicionantes; ao usar um problema auxiliar, relacionado com algum problema mais simples ou já resolvido anteriormente; ao considerar a incógnita, mantendo em mente o que se quer determinar; ao identificar corolários, observando se o que se quer determinar seria uma consequência de algum teorema; ao realizar decomposição e recombinação, dividindo o problema em partes e resolvendo cada uma delas, ou resolvendo um caso particular e, a partir dele, determinar a solução do problema; e ao procurar conhecer a definição de todos os termos envolvidos, entre outras ações. Vale ressaltar que algumas dessas ações são, na verdade, estratégias para resolução de problemas. Portanto, compreende-se que as ações apresentadas por Polya não são heurísticas, mas sim atividades que, quando realizadas, podem fazer emergir heurísticas. Isso revela um forte entrelaçamento, e talvez até uma sobreposição, entre heurísticas e estratégias.

O PROCESSO METODOLÓGICO DA INVESTIGAÇÃO

Com foco no objetivo desta investigação, realizou-se uma intervenção pedagógica em uma turma de um curso de licenciatura em Matemática durante um projeto de Prática

Profissional (Prática como Componente Curricular), integrante do currículo do curso. A turma era composta por 12 estudantes matriculados, dos quais apenas 9 mantiveram assiduidade, constituindo o grupo de interesse para nosso estudo. Durante essa prática, foram apresentadas inicialmente bases teóricas sobre resolução de problemas, com destaque para o artigo de Schroeder e Lester (1989), que aborda as três vertentes do uso da resolução de problemas em sala de aula. Em seguida, foram trabalhados 22 problemas em 15 encontros, com duração de uma hora e meia cada, com o objetivo de compreender os pensamentos que emergiam durante o processo de resolução de problemas e identificar quais deles poderiam ser considerados heurísticas modernas, conforme a definição de Polya (2006). A partir dessa compreensão, foram realizadas ações com o propósito de envolver os estudantes no processo de resolução de problemas e, consequentemente, promover o desenvolvimento de heurísticas.

A pesquisa foi dividida em dois momentos. No primeiro momento, um problema era proposto e, antes de sua resolução, solicitava-se que cada estudante lesse o problema e respondesse às questões apresentadas no quadro 1 a seguir.

Quadro 1- Ficha de avaliação das heurísticas

Ficha – Problema ___

1) O que você pensou ao ler o problema? (por favor, escreva o que veio à sua mente, relativo ao problema, durante e após sua leitura).

____

____

____

____

____

____

2) Qual a primeira coisa que você faria para tentar resolver esse problema? Se possível justifique.

____

____

____

____

3) Esse problema lhe é familiar? Você já resolveu algum problema parecido com esse antes?

____

____

4) Quais conhecimentos (teoria, fórmula etc.) você acha que seriam necessários para resolver esse problema?

____

____

____

Fonte: Elaborado pelo autor

Após os alunos responderem às questões do quadro 1, solicitava-se que eles tentassem resolver o problema, registrando suas ideias e tentativas ao longo do processo. Após a resolução, os alunos que haviam conseguido resolver o problema colocavam suas soluções na lousa, liam suas respostas do questionário e comparavam-nas com suas ações efetivas de resolução, compartilhando suas ideias com toda a turma e promovendo uma discussão que estimulava um processo de avaliação formativa.

No segundo momento, o pesquisador evidenciou um conjunto de ações úteis para o desenvolvimento de heurísticas, baseadas nos trabalhos: Polya (2006), Schoenfeld (1985), Mason, Burton, Stacey (2010), Larson (1983), Engel (1998), Posamentier e Krulik (2015) e Lam et al. (2011). Essas ações consistem em observar os elementos de um problema, entender seus conceitos e colocá-los em prática. Esses elementos são apresentados no quadro 2.

10.34019/2594-4673.

Quadro 2 - Conceitos relativos aos elementos de um problema

- **Incógnita:** É o valor ou a informação que se deseja descobrir ou determinar durante a resolução do problema. É o objetivo a ser alcançado.
- **Condicionante:** Condições exigidas ou restrições implícitas no problema, incluindo hipóteses e limitações relacionadas à incógnita ou aos dados.
- **Dados:** São as informações fornecidas no enunciado do problema. Podem ser valores numéricos, equações, expressões matemáticas, figuras, tabelas ou qualquer outro tipo de informação relevante para a resolução.
- **Correlações:** Relações com outras áreas de conhecimento, semelhanças com problemas anteriores ou outras situações já abordadas.
- **Conhecimento específico:** Refere-se ao conjunto de conceitos, teorias, fórmulas, métodos ou qualquer outro conhecimento relevante que seja necessário ou útil para resolver o problema.
- **Representação:** É a forma como os elementos do problema são apresentados ou representados, seja por meio de texto, gráficos, diagramas, ilustrações ou qualquer outra forma de visualização que facilite a compreensão e análise do problema. Podendo também ser uma representação mental, por exemplo, a imaginação de um contexto.
- **Existência de solução:** Refere-se à possibilidade de encontrar uma solução viável para o problema. É importante investigar se o problema possui uma resposta possível ou se pode ser insolúvel em determinadas condições.
- **Unicidade de solução:** Diz respeito à quantidade de soluções possíveis para o problema. Pode-se verificar se o problema tem uma única solução ou se admite múltiplas soluções, dependendo das condições e das restrições apresentadas.

Fonte: Elaborado pelo autor

Nessa etapa, primeiramente, discutiu-se a importância de compreender o significado desses elementos e como identificá-los em um problema. É importante destacar que os elementos apresentados como componentes de um problema não devem ser vistos como um roteiro a ser seguido e aplicado em todas as situações. A observação e identificação desses elementos são sugestões oferecidas quando não se sabe por onde começar a resolver um problema. Além disso, nem todos esses elementos precisam ser destacados, pois quando surgem ideias (heurísticas) para resolver o problema, o foco deve ser nessas ideias que, em geral, resultam em uma ou mais estratégias.

Após a discussão desses elementos, nos encontros subsequentes, o pesquisador empregou a seguinte dinâmica: apresentava um problema e orientava os estudantes a identificar cada um dos elementos elencados no quadro 2. A partir de uma reflexão sobre esses elementos, eles eram incentivados a elaborar uma estratégia para resolver o problema.

Com base na observação do pesquisador e no material escrito produzido pelos alunos, com foco no objetivo desta pesquisa, levando em consideração os dois momentos mencionados, o processo de análise foi realizado.

UM EXCERTO DA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

Para um melhor entendimento do processo metodológico desta investigação, serão expostos dois problemas, cada um acompanhado de uma descrição da dinâmica do trabalho realizado em sala de aula. No primeiro problema, será delineado o que ocorreu no início da investigação, enquanto que, para o segundo problema, serão detalhadas todas as ações realizadas para o desenvolvimento de heurísticas.

O Quadro 3 exibe um dos problemas abordados no início desta investigação. Nesse momento, a intenção foi compreender o raciocínio dos estudantes diante do desafio de ler, entender e resolver um problema.

Quadro 3 – Primeiro problema sobre o entendimento das heurísticas

Problema 1: Um dos lados de um triângulo mede 15cm e forma um ângulo de 60º com uma de suas bases. Sabendo-se que sua altura, relativa a referida base, mede 10cm, determine o tamanho dessa base.

Fonte: elaborado pelo autor

Este problema foi intencionalmente formulado para possuir infinitas soluções. Além de buscar compreender o raciocínio dos estudantes durante o processo, o pesquisador também tinha a intenção de observar se os alunos perceberiam esse fato, o qual constitui um dos elementos do pequeno dicionário de heurísticas apresentado por Polya (2006).

Verificar a existência e unicidade de solução pode constituir um processo legítimo de análise crítica de um problema, pois adentra em questões específicas do problema, podendo suscitar uma discussão sobre a validade (se há erro no enunciado, ou não), e sobre o que poderia ser feito para torná-lo um problema de solução única. Isso foi realizado durante este processo de investigação, mas, aqui, nos concentramos especificamente no entendimento das heurísticas. Para isso, são apresentadas, a seguir, algumas respostas dadas pelos estudantes ao questionário apresentado no Quadro 1, referentes ao problema 1.

Quadro 4 – Algumas respostas da primeira questão do questionário

Calcular o lado do triângulo utilizando LAL e assim achar o valor do tamanho da base

(a)

Inicialmente organizei as informações dadas pelo problema e posteriormente, após o término da leitura, mesmo que instruído a não tentar resolve-lo, imaginei automaticamente formas para isso.

(b)

Pensei em fazer o desenho para facilitar a compreenção da posição de cada lado dado e do posicionamento do ângulo; pensei também que o problema envolve geometria basica

(c)

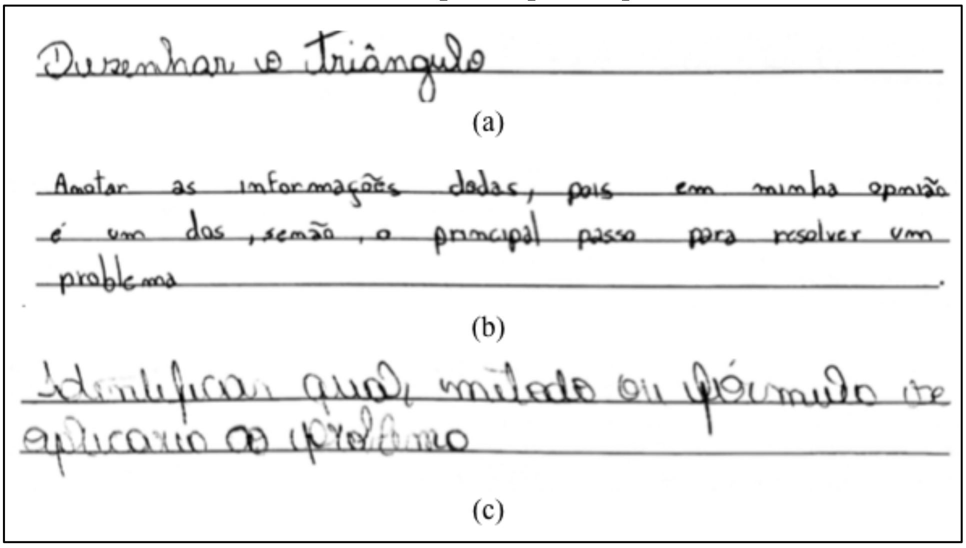
Fonte: Dados da pesquisa

No Quadro 4, são apresentadas as respostas de três estudantes para a primeira pergunta: o que você pensou ao ler o problema?. O que é retratado nesse quadro reflete exatamente o que ocorreu de maneira generalizada na turma: um pensamento centrado no processo. Em outras palavras, ao ler o problema, os estudantes não demonstravam uma preocupação em entender ou refletir sobre o problema; ao contrário, buscavam uma abordagem imediatista, com seus pensamentos voltados para "de que maneira" (Quadro 4a) ou "o que fazer" ou "que conteúdo devo usar" (Quadro 4b). Além disso, alguns alunos já partiram para a ação, mesmo com a orientação para que não resolvessem antes de responder ao questionário, como relatado pelo estudante no Quadro 4c.

Essa forma de pensar contraria o primeiro passo na resolução de problemas apresentado por Polya (2006) e os objetivos da segunda e terceira atividades do roteiro de Allevato e Onuchic (2014), que enfatizam a importância de entender o problema. Na primeira etapa, esperava-se que fossem evidenciadas algumas dificuldades no entendimento do enunciado, ou que surgissem questionamentos sobre o significado de algum termo, por exemplo, "altura relativa à referida base", ou até mesmo uma aversão à área de conhecimento, no caso, Geometria.

O processo de resolução do problema é evidenciado nos Quadros 5 e 6, apresentando as respostas de três estudantes para as questões 2 e 4 do questionário. Ressalta-se que as respostas fornecidas à questão 3 foram todas bastante simplistas, resumindo-se a respostas como "sim", "não", "esse não, mas parecido sim",... Por esse motivo, essa questão não foi considerada relevante para este processo de investigação.

Quadro 5 – Respostas para a questão 2


Desenhar o triângulo

(a)

Anotar as informações dadas, pois em minha opinião é um dos, senão, o principal passo para resolver um problema.

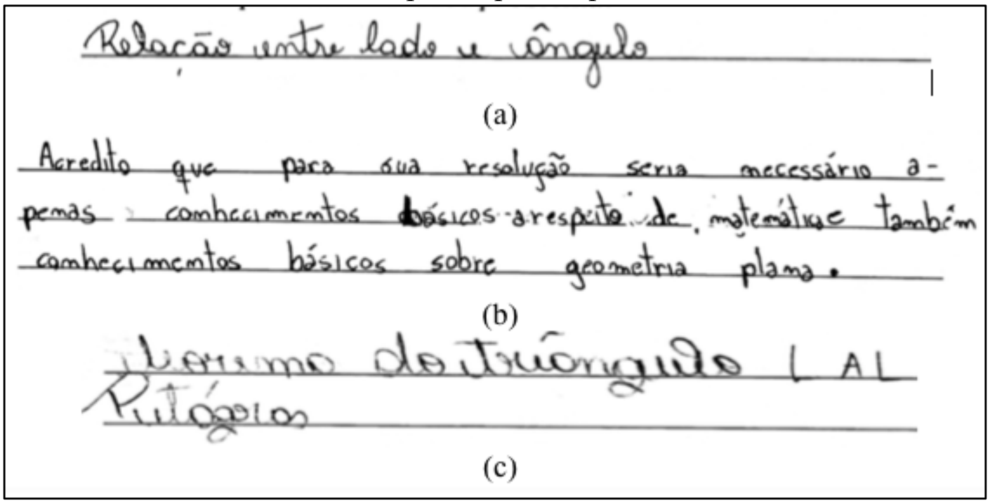
(b)

Identificar qual método ou fórmula se aplicaria ao problema

(c)

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 6 – Respostas para a questão 4


Relação entre lado e ângulo

(a)

Acredito que para sua resolução seria necessário apenas conhecimentos básicos a respeito de matemática e também conhecimentos básicos sobre geometria plana.

(b)

Teorema do triângulo LAL
Pitágoras

(c)

Fonte: Dados da pesquisa

É relevante enfatizar que, nessa etapa, alguns estudantes afirmaram não ter ideia de como proceder para resolver o problema, enquanto outros apresentaram ideias muito frágeis, como evidenciado no Quadro 5. Além disso, a partir do Quadro 6, percebe-se a dificuldade que os estudantes enfrentavam para identificar ou conjecturar sobre quais conteúdos um determinado problema demandaria. Essa dificuldade ocorre, como observado nas falas dos estudantes e sustentado por Mason, Burton e Stacey (2010), pela falta de prática e orientação. Ou seja, a única estratégia utilizada pelos estudantes era a reprodução de técnicas observadas nas aulas. De acordo com esses estudantes, seus professores nunca discutiram, em suas aulas, quais procedimentos poderiam ser úteis na resolução de um problema, e esta era a primeira vez que eles se deparavam com um processo efetivo de ensino sobre resolução de problemas. Como destaca Larson (1983), a única forma de aprender os processos de resolução de problemas é praticando.

Para descrever o segundo momento da pesquisa, no qual o pesquisador atuou como mediador, evidenciando e promovendo uma discussão sobre os elementos do problema, é apresentado no Quadro 7 um dos problemas trabalhados em sala de aula. É importante ressaltar que este problema foi proposto aos alunos e, durante seu entendimento e resolução, houve a intervenção do pesquisador por meio de perguntas como: “Você conseguiu identificar a incógnita do problema?”, “Quais condicionantes você conseguiu evidenciar?”, “Você listou todos os dados do problema?”, “Você conseguiu estabelecer alguma relação entre os dados e a incógnita?”, entre outras. Após esse trabalho, o pesquisador apresentou o problema na lousa e seguiu-se uma discussão coletiva, por meio da evidenciação e análise de seus elementos, culminando na resolução do problema, como pode ser observado nos parágrafos que se seguem.

Quadro 7 – Um dos problemas trabalhado em sala com a mediação do pesquisador

Problema
Em uma balança de dois pratos, três maçãs e uma pera se equilibram com trezes ameixas. Cinco ameixas e uma maçã se equilibram com uma pera. Considerando que frutas iguais têm mesmo peso, quantas ameixas se equilibram com uma pera?

Fonte: Adaptado de Gusmão et al. (2002)

Supondo que um indivíduo não saiba resolver esse problema e nem ao menos saiba por onde começar, aconselha-se que ele inicie identificando a incógnita do problema. Em seguida,

10.34019/2594-4673.

deve evidenciar as condicionantes, os dados, correlações, conteúdos específicos, entre outros. Esse processo deve ser conduzido até que ideias surjam, capazes de ajudá-lo a resolver o problema (heurísticas). Pode ser que, a partir dessas ideias, ele consiga resolver o problema. No entanto, mesmo que isso não aconteça, esse procedimento de identificação dos elementos do problema pode levar o indivíduo a se envolver com o problema, por meio de pensamentos ativos e reflexivos. Observa-se que a ação de identificar os elementos de um problema visa fazer com que o indivíduo se aproprie do problema e trabalhe no entendimento do enunciado e das relações entre seus elementos. Esse procedimento de identificação e análise dos elementos do problema deve ser repetido até que um caminho promissor para a resolução do problema seja concebido. Experiências, inclusive durante este processo de investigação, revelaram que isso ocorre, em geral, quando se obtém uma boa representação, ou seja, uma forma eficiente de representar a relação existente entre os dados e a incógnita, levando em consideração as condicionantes e outras relações pertinentes.

Para o problema proposto no quadro 7, determinaram-se:

Incógnita

- *Quantas ameixas se equilibram com uma pera?*

  De acordo com Polya (2006), não se deve perder de vista a incógnita; ela deve ser mantida em mente ao longo de toda a resolução do problema.

Condicionantes

- Numa balança de dois pratos, o equilíbrio ocorre quando o peso em um lado é igual ao peso no outro;
- A incógnita deve ser um número inteiro e positivo;
- A quantidade de frutas colocadas em cada prato também é um número inteiro e positivo.

Dados

- 3 maçãs e 1 pera equilibram-se com 13 ameixas;
- 5 ameixas e 1 maçã equilibram-se com 1 pera;
- Frutas iguais têm o mesmo peso.

Observa-se que o que diferencia as condicionantes dos dados é a forma como elas se apresentam no problema. As condicionantes não são informações apresentadas no problema; são condições intrínsecas próprias da natureza do problema. Por exemplo, o problema não especifica o comportamento de uma balança de dois pratos, não indica que a incógnita e quantidade de frutas devem ser um número inteiro e positivo. Todas essas informações são perceptíveis pela natureza do problema, enquanto os dados são trazidos explicitamente no enunciado do problema.

Correlações

- ❖ Uma das áreas de conhecimento é a Aritmética, pois envolve a adição e comparação dos pesos das frutas;
- ❖ Possui uma relação estreita com uma das abordagens para entender as equações algébricas, ou seja, o que está antes da igualdade se equilibra com o que está depois.

Vale enfatizar que as correlações são baseadas em suposições e conhecimento prévio, podendo variar entre indivíduos. Além disso, durante a resolução do problema, essas correlações podem ser confirmadas ou não.

Conhecimentos específicos

- ❖ Raciocínio Lógico;
- ❖ Operações numéricas envolvendo adição, subtração, possivelmente multiplicação e divisão;
- ❖ Equações;
- ❖ Sistema de Equações.

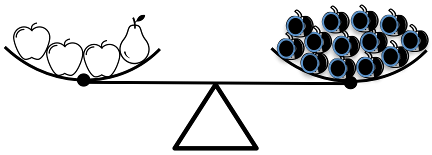
Da mesma forma que ocorre com as correlações, os conhecimentos específicos são, em grande parte, suposições a priori, sujeitos à confirmação ou refutação. No entanto, conjecturar sobre quais conteúdos podem ser úteis na resolução do problema é sempre benéfico, pois, frequentemente, o conhecimento específico de algum conteúdo pode orientar os próximos passos. Inclusive as estratégias de resolução de problemas apontadas por Engel (1998) são fundamentadas no conhecimento dos conteúdos. Além disso, ocasionalmente, é necessário revisar alguns conceitos, fórmulas ou procedimentos essenciais à resolução do problema.

Uma etapa que pode ser decisiva na resolução do problema é a representação dos dados, considerando as relações entre eles e entre eles e a incógnita. Às vezes, isso pode ser feito de mais de uma maneira. Para o problema proposto, foram feitas duas representações: uma por meio de imagens e outra por meio de equações, utilizando letras do nosso alfabeto para representar as frutas. É importante destacar que, em alguns casos, também é possível criar representações mentais úteis durante o processo de resolução, como pode ser visto em Ferreira (2022).

Representação

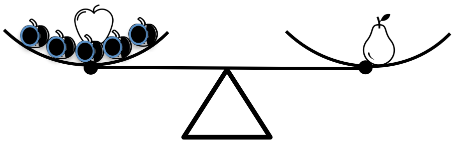
❖ *Por imagem*. As figuras 1, 2 e 3 ilustram esse tipo de representação. Essas figuras trazem representações dos dados e da incógnita do problema proposto.

Figura 1 – Três maçãs e uma pera se equilibram com 13 ameixas



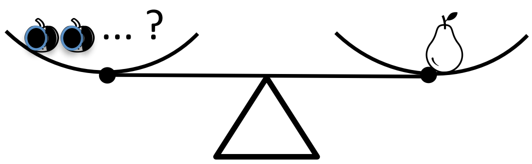
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 2 – Cinco ameixas e uma maçã se equilibram com uma pera



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3 – Quantas ameixas se equilibram com uma pera?



Fonte: Elaborado pelo autor

❖ *Usando letras* (representação algébrica). Cada maçã, cada pera e cada ameixa serão representadas, respectivamente, por M, P e A. Com isso, temos:

➢ $3M + P = 13A$ (três maçãs e uma pera se equilibram com 13 ameixas).

➢ $5A + M = P$ (cinco ameixas e uma maçã se equilibram com uma pera).

➢ $xA = P$ (x ameixas se equilibram com uma pera; quanto vale x?).

Existência de solução

Em geral, é difícil ter certeza se um problema tem ou não solução sem uma tentativa efetiva de resolvê-lo. Contudo, muitas vezes, é possível avaliar essa possibilidade com base nas informações disponíveis, como dados, incógnitas e suas relações. No caso do problema em análise, observa-se que o peso de uma ameixa é menor que o de uma pera, uma vez que são

10.34019/2594-4673.

necessárias 5 ameixas e uma maçã para igualar o peso de uma única pera. Assim, não haveria impedimento para que uma determinada quantidade de ameixas tivesse o peso de uma pera.

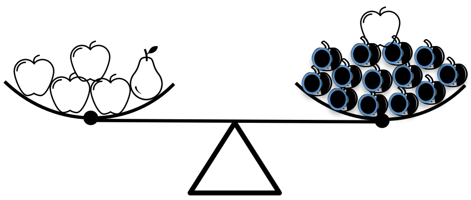
Nesse cenário, o único problema surgiria se o peso de uma pera não fosse igual a uma quantidade exata de ameixas, isto é, se para igualar o peso de uma pera fosse necessária uma quantidade inteira de ameixas mais parte de outra. Essa condição só pode ser verificada durante a resolução do problema. No entanto, se algum dado do problema nos conduzisse à conclusão de que o peso de uma ameixa fosse maior que o de uma pera, o problema certamente não teria solução. Isso ocorreria porque uma única ameixa já teria um peso superior ao de uma pera, tornando impossível equilibrar uma quantidade de ameixas com uma única pera.

Unicidade de solução

Geralmente, a análise da unicidade da solução é realizada junto com a análise da existência de solução. De fato, não é possível falar sobre unicidade sem a presença de uma solução. No entanto, em muitos casos é possível concluir, antes mesmo de resolver o problema, que se ele tiver uma solução, essa solução será única. Essa conclusão se aplica ao problema em análise. Se encontrarmos uma solução, significa que existe uma quantidade de ameixas que se equilibra com uma pera, e essa quantidade é uma solução do problema. Portanto, se aumentarmos ou diminuirmos a quantidade de ameixas, não haverá mais equilíbrio. Em outras palavras, não existem duas quantidades distintas de ameixas que se equilibrem com uma única pera.

É relevante observar que a resolução desse problema pode ser conduzida a partir de qualquer uma das duas representações apresentadas. No caso da representação por imagem, se acrescentássemos uma maçã em cada prato da balança na primeira imagem da representação, teríamos uma situação representada pela figura 4.

Figura 4 – Resolução por imagem (procedimento 1)

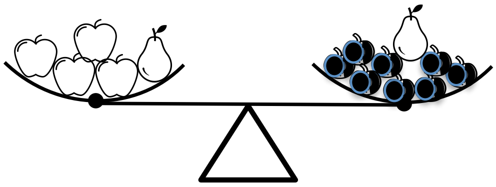


Fonte: Elaborado pelo autor

Juiz de Fora, v. 8, n. 1, p. 1-21, Jan. – Dez., e-ISSN: 2594-4673, 2024
10.34019/2594-4673.

De acordo com os dados, uma maçã e cinco ameixas se equilibram com uma pera. Logo podemos realizar uma substituição no segundo prato (lado direito da figura 4), trocando a maçã e cinco ameixas por uma pera. Após essa substituição, teríamos no segundo prato uma pera e oito ameixas, conforme ilustrado na figura 5 a seguir.

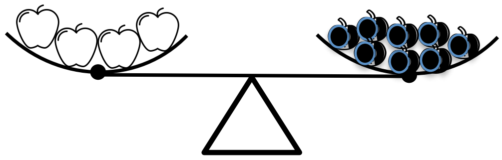
Figura 5 – Resolução por imagem (procedimento 2)



Fonte: Elaborado pelo autor

Ao retirar uma pera de cada prato da balança, restarão quatro maçãs no primeiro prato (lado esquerdo) e oito ameixas no segundo prato (lado direito), conforme ilustrado na figura 6.

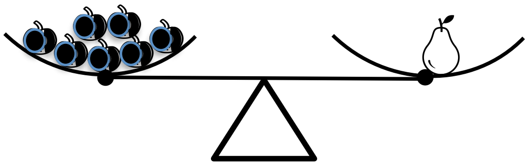
Figura 6 – Resolução por imagem (procedimento 3)



Fonte: Elaborado pelo autor

Dessa forma, observamos que 4 maçãs se equilibram com 8 ameixas. Como frutas iguais têm o mesmo peso, concluímos que cada maçã pesa o equivalente a duas ameixas. A partir disso, basta trocar, no primeiro prato da figura 2 (onde tem-se uma maçã e cinco ameixas se equilibrando com uma pera), a maçã por duas ameixas. Isso resulta na imagem ilustrada na figura 7 a seguir.

Figura 7 – Resolução por imagem (solução)



Fonte: Elaborado pelo autor

Portanto, a solução desse problema é 7. Em outras palavras, o número de ameixas que se equilibram com uma pera é 7.

Após chegar à solução do problema, o pesquisador chamou atenção para a necessidade de realizar o "quarto passo de Polya", ou seja, conferir se o resultado realmente é a solução correta, pois existe a possibilidade de ter ocorrido algum equívoco em alguma etapa. Essa conferência pode ser feita na primeira imagem da representação, figura 1, trocando, no primeiro prato (lado esquerdo), as maçãs e a pera pela quantidade de ameixas correspondente. Três maçãs dão 6 ameixas e uma pera dá 7 ameixas, totalizando 13 ameixas no primeiro prato, exatamente o que se encontra no segundo prato. Se ainda restar alguma dúvida, esse resultado pode ser conferido também fazendo as mesmas substituições na segunda imagem da representação, figura 2.

Utilizando a segunda representação, usando letras, também é possível obter a solução do problema, transformando as duas equações em uma única, de maneira que as letras sejam apenas P e A. Para isso, basta isolar M na segunda equação ($5A + M = P$) e substituir a expressão correspondente na primeira equação ($3M + P = 13A$). Com efeito, ao isolar M na segunda equação, temos $M = P - 5A$. Substituindo essa expressão na primeira equação, obtemos $3(P - 5A) + P = 13A$. Simplificando a equação, chegamos a $P = 7A$.

Portanto, chegamos à mesma conclusão: 7 ameixas se equilibram com uma pera.

PONDERAÇÕES E POSSIBILIDADES

Esta pesquisa constatou o que Schoenfeld (1985) afirmou, baseado em seu processo de investigação, na parte em que ele considerou ser um estado da arte sobre heurísticas: "[..] tentativas de ensinar os alunos a usarem estratégias heurísticas consistentes produziram menos resultados do que se esperava" (p. 70, tradução nossa[2]). Uma das principais causas desse insucesso deve-se ao fato de que a heurística está diretamente ligada à forma de pensamento do indivíduo, ao seu conhecimento e ao seu esforço (desejo de resolver o problema), tornando esse processo de ensino muito complexo, consequentemente, demandando um trabalho em longo prazo. Outro fator igualmente relevante é a falta de experiência do professor para atividades dessa natureza. Assim, um trabalho eficiente sobre heurísticas demandaria, não uma ação individual do professor, mas um trabalho institucional, quiçá uma política pública que

[2] Attempts to teach students to use heuristic strategies have consistently produced less was hoped for.

doi 10.34019/2594-4673.

institucionalizasse o uso da resolução de problemas, nessa perspectiva, desde as séries iniciais até os anos finais da Educação Básica.

Apesar de todas as complexidades e adversidades citadas no parágrafo anterior, esta pesquisa aponta algumas possibilidades de um trabalho eficiente para o desenvolvimento de heurísticas, mesmo que por meio de uma iniciativa individual de um professor, em apenas um semestre ou ano letivo. Com efeito, ao se propor um problema, a princípio, alguns, talvez todos, os estudantes não tenham interesse em resolvê-lo ou não saibam como proceder para encontrar um caminho promissor para sua resolução. A proposta apresentada neste trabalho pode mitigar essas dificuldades, desencadeando um processo genuíno de pensamentos ativos e reflexivos, podendo culminar em uma ou mais heurísticas (operações mentais úteis para a resolução do problema). Isso apareceu de forma consistente, por diversas vezes, durante esta investigação, observada na fala dos alunos e em suas reações diante de um problema. De fato, antes da proposta de resolução apresentada pelo pesquisador, muitos estudantes ficavam sem ação diante do problema ou buscavam saber o que seu colega estava fazendo para resolvê-lo. Porém, durante e após a proposta, eles tomavam a iniciativa de identificar a incógnita, os dados e demais elementos, e tentavam construir uma representação de relações observadas entre esses elementos.

Portanto, mesmo não sendo possível, em um trabalho a curto prazo, tornar os estudantes bons resolvedores de problemas, é possível levá-los a se envolver com o problema, consequentemente, desenvolver heurísticas. Ou seja, é possível levá-los a manifestar um raciocínio consistente por meio do processo de evidenciar a incógnita e os dados do problema, tentar entendê-los e buscar relações entre eles, e representar essas relações por meio de uma equação, uma inequação, uma função, uma figura, etc.

Observou-se também, neste processo de investigação, que o desenvolvimento de heurísticas é centrado no estudante e não no problema, no entanto, a característica do problema pode determinar a capacidade do aluno de resolvê-lo ou não. De fato, o conhecimento de conteúdo é sem dúvida um fator decisivo na resolução. Nesta investigação, alguns estudantes tinham ideias promissoras para a resolução do problema, mas não conseguiam resolvê-lo quando ele demandava algum conhecimento específico que não fazia parte do repertório do aluno.

Isso vai ao encontro de Engel (1998), sobre o centro da produção de estratégias de resolução de problemas estar no conhecimento matemático, sem ele não existe progressão no processo de resolução. Por exemplo, se a resolução de um problema demandar um conhecimento específico (como o princípio de indução matemática, princípio da invariância, sequências, séries etc.) que o estudante não possui, ele não será capaz de resolvê-lo, mesmo que fomente heurísticas consistentes, pois mesmo que elas culminem para uma estratégia promissora, essa estratégia não poderá ser colocada em prática devido à sua dependência do conhecimento demandado. Neste sentido, vale enfatizar que essa limitação, a falta de conhecimento matemático, se evidenciou durante nossa investigação, produzindo, em determinados momentos, menos resultados do que o esperado. Ou seja, alguns estudantes, mesmo com efetivo engajamento nas ações propostas, não conseguiam resolver os problemas.

Diante de situações como essas, o professor deve, de maneira didática, escolher os problemas que demandam um conteúdo que seja de conhecimento da turma, para que o trabalho de desenvolvimento de heurísticas não seja comprometido. Nesta investigação, como se tratava de uma prática profissional, a turma era muito heterogênea, dificultando esse processo, pois tinham alunos de períodos iniciais e finais. Para minimizar essa discrepância, os problemas propostos demandavam conhecimentos básicos e supostamente de entendimento de todos os estudantes.

Por fim, é necessário ponderar sobre a necessidade de se produzirem mais pesquisas nessa linha, de preferência a longo prazo, para que o desenvolvimento do estudante seja acompanhado e, com isso, seja possível estabelecer parâmetros mais precisos sobre a possibilidade de promover atividades cada vez mais eficientes para tornar os alunos bons solucionadores de problemas. Neste trabalho, foi plantada uma semente nos futuros professores de matemática, e espera-se que eles se tornem multiplicadores de práticas como as desenvolvidas nesta pesquisa.

Este processo de investigação continua em andamento, e o próximo passo será reaplicar o projeto de ensino, com os devidos ajustes, em uma nova turma de prática profissional, para que novas evidências sejam levantadas e novos resultados sejam produzidos e comparados com os já obtidos.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **DICIONÁRIO DE FILOSOFIA**. Tradução: A Bossi; Tradução: I C Benedetti. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas. Em: ONUCHIC, L. R. et al. (Eds.). **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35–52.

CAI, J. What Research Says About Teaching Mathematics Through Problem Posing. **Éducation et didactique**, n. 16, p. 31–50, 7 dez. 2022.

ENGEL, A. **Problem-Solving Strategies**. Riverdale: Springer, 1998.

FERREIRA, N. C. **Resolução de problemas e a rigidez formativa de pensamento**. Anais do(a) Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais**... Em: ANAIS DO ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. On-line: Even3, 2022. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/xivenem2022/484558-RESOLUCAO-DE-PROBLEMAS-E-A-RIGIDEZ-FORMATIVA-DE-PENSAMENTO>. Acesso em: 19 fev. 2023

GUSMÃO, G. DE A. P. et al. (EDS.). **revista DA OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA: olimpíada de matemática do estado de Goiás**. Goiânia: Universidade Federal de Goiás, 2002.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S.; FRANCO, F. M. M. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

KILPATRICK, J. Reformulating: Approaching Mathematical Problem Solving as Inquiry. Em: FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (Eds.). **Posing and Solving Mathematical Problems**. Cham: Springer International Publishing, 2016. p. 69–81.

LAM, T. T. et al. **Making Mathematics Practical: An Approach to Problem Solving**. Singapore: World Scientific, 2011.

LARSON, L. C. **Problem-Solving Through Problems**. Riverdale: Springer, 1983.

LÓPEZ, Á. G. **O cérebro queima em um dia as mesmas calorias que correr meia hora. Então, pensar muito emagrece? EL PAÍS**, 27 nov. 2018.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. **Thinking Mathematically**. 2. ed. Harlow: Pearson Prentice Hall, 2010.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA - Boletim de Educação Matemática**, v. 25, n. 41, p. 73–98, 2011.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas**. Tradução: H L Araújo. Rio de Janeiro-RJ: Editora Interciência, 2006.

POSAMENTIER, A. S.; KRULIK, S. **Problem-Solving Strategies in Mathematics: From common Approaches to Exemplary Strategies**. Philadelphia: World Scientific, 2015. v. 01

SANTOS, E. V.; ANDRADE, S. Resolução, Exploração e Proposição de Problemas nos anos iniciais do ensino fundamental: contribuições para o ensino e aprendizagem da combinatória. **Revista de Educação Matemática**, v. 17, p. e020030, 1 jan. 2020.

SCHOENFELD. **MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING**. LONDON: ACADEMIC PRESS INC. LTD., 1985.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. Em: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. year book. Reston-VA: NCTM-National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

TEIXEIRA, C. DE J.; MOREIRA, G. E. Ensino-Aprendizagem da Matemática por meio da Proposição de Problemas: uma proposta metodológica. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, 2022.

HISTÓRICO

Submetido: 23 de dezembro de 2023.
Aprovado: 12 de março de 2024.
Publicado: 15 de abril de 2024.