RIDEMA
Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática

CC BY NC

Contribuições de um Material de Apoio para a implementação prática do método de ensino Análise de Modelos

Contributions of a Support Material for the practical implementation of the Model Analysis teaching method

Emerson Silva de Sousa[1]
Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA

Isabel Cristina Machado de Lara[2]
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUCRS

RESUMO

Este artigo tem como objetivo apresentar as contribuições de um *Material de Apoio* – MA na implementação prática do método de ensino denominado *Análise de Modelos* – AnM. Trata-se de um recorte oriundo de uma pesquisa de doutorado em Educação em Ciências e Matemática, na qual, após participar de um minicurso sobre o método (AnM), um grupo de 12 professores aplicou-o na prática em sala de aula, em suas próprias turmas de Ensino Médio, utilizando o MA sugerido durante o minicurso. Ao final dessa prática, os professores responderam um questionário e deram depoimentos sobre a experiência vivenciada nas aulas, cujas respostas evidenciaram suas opiniões acerca das contribuições desse material (MA) para a prática do método AnM. A partir de análise interpretativa das respostas dos professores, tanto do questionário como dos depoimentos, é possível inferir que um MA como o que foi sugerido aos participantes da pesquisa, não só contribui de modo significativo para a prática desse método (AnM), uma vez que dá mais segurança ao professor na sua implementação em sala de aula, mas também o incentiva a elaborar e adaptar seu próprio material.
Palavras-chave: Método de Ensino; Análise de Modelos; Material de Apoio.

ABSTRACT

This article aims to present the contributions of a *Support Material* – SM in the practical implementation of the teaching method called *Analysis of Models* – AnM. This is an excerpt from doctoral research in Education in Science and Mathematics, in which, after participating in a short course on the method (AnM), a group of 12 teachers applied it in practice in the classroom, in their own High School classes, using the SM suggested during the short course. At the end of this practice, the teachers answered a questionnaire and gave testimonials about their experience in class, whose answers showed their opinions about the contributions of this material (SM) to the practice of the AnM method. Based on an interpretative analysis of the teachers' responses, both in the questionnaire and in the testimonies, it is possible to infer that an SM such as the one suggested to the research participants not only contributes significantly to the practice of this method (AnM), since which gives the teacher more confidence in its implementation in the classroom, but also encourages him to prepare and adapt his own material.
Keywords/Palabras clave: Teaching Method; Analysis of Models; Support Material.

---

[1] Doutor em Educação em Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS). Professor Adjunto IV da Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Santarém, Pará, Brasil. Av. marechal Rondon, s/n, Caranazal, Santarém, Pará, Brasil, CEP: 68040-070. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1039-4280. Lattes: http://lattes.cnpq.br/1307757534133724. E-mail: essousa73@gmail.com.

[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Professora da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS), Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil. Av. Ipiranga, 6681, Partenon, Porto Alegre, Rio Grande do Sul, Brasil, CEP: 90619-900. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-0574-8590. Lattes: http://lattes.cnpq.br/8350544815405059. E-mail: isabel.lara@pucrs.br.

INTRODUÇÃO

O filósofo e historiador norte-americano Will Durant (1996), ao refletir sobre o conceito de *excelência*, a definiu como uma arte que se obtém com muito treinamento e insistência na busca pela melhoria da qualidade de uma ação, fazendo dessa ação, um hábito. No contexto educacional, ao concordar com Durant, entende-se que a busca do professor (em qualquer nível de ensino) por querer melhorar sempre mais sua prática pedagógica, com vistas a aprendizagem dos estudantes, deve ser um hábito contínuo na sua caminhada. No caso específico da Matemática ensinada no Brasil, os números oficiais de avaliações nacionais e internacionais têm mostrado que esse hábito se faz necessário e urgente (BENASSI; SOUZA; BASQUEIRA; AZZI, 2015; SANTOS; TOLENTINO-NETO, 2015; SZPACENKOPF; FERREIRA, 2016).

Felizmente, esse hábito, essa busca por querer melhorar a qualidade do ensino de Matemática, não só no Brasil, mas em todo o mundo, tem sido alvo de muitos esforços da parte de professores, pesquisadores e especialistas da área. Como consequência prática dessa busca, temos visto nos últimos anos o surgimento de novas estratégias de ensino que, em geral, visam essa melhoria. Uma dessas estratégias é a *Modelagem Matemática* – MM (no contexto educacional) que, no Brasil, já é conhecida a mais de quatro décadas (BIEMBENGUT, 2009).

Muitas propostas têm sido apresentadas como modo de implementar e incentivar a MM como prática pedagógica em sala de aula. Uma dessas propostas é a *Análise de Modelos* – AnM. Indicada, a princípio para o ensino superior, como uma abordagem investigativa que faz uso de modelos matemáticos já existentes para introduzir um conteúdo novo (SOARES, 2012, 2015; SOARES; JAVARONI, 2013), a AnM passa a ser concebida como um método de ensino de Matemática para a Educação Básica (SOUSA, 2019).

Essa última proposta, AnM como método de ensino, é fruto de uma pesquisa de doutorado em Educação em Ciências e Matemática, junto a um grupo de professores de Matemática da Educação Básica que ocorreu em duas fases. A primeira enfatizou a elaboração da perspectiva da AnM como método de ensino de Matemática, o que possibilitou a elaboração de um *Material de Apoio* – MA ao professor. Já na segunda, o destaque foi a aplicação prática do método em sala de aula, quando analisou-se sua viabilidade no contexto educacional vigente.

O presente artigo tem como principal objetivo apresentar um recorte-síntese da primeira fase dessa pesquisa, mais especificamente a elaboração, utilização e potencialidades do MA para a implementação prática do método AnM em sala de aula.

A seguir, são apresentadas brevemente a proposta da AnM como método de ensino e, o processo de elaboração do Material de Apoio sobre a AnM, a partir das potencialidades do livro didático e das questões do Enem na perspectiva dessa proposta.

ANÁLISE DE MODELOS COMO UM MÉTODO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

No âmbito da Educação Matemática, principalmente nos trabalhos que envolvem modelos matemáticos, como na *Modelagem Matemática* – MM, em geral há um incentivo ao envolvimento dos estudantes na participação e na tomada de decisões sobre os temas (matemáticos ou não) estudados. Nesse contexto, o termo "análise" aparece como um elemento potencializador de reflexões quando a abordagem pedagógica busca envolver situações aplicadas às áreas de interesse e/ou do cotidiano dos estudantes, mesmo que essas situações demandem conteúdos matemáticos que ainda não tenham sido estudados por eles. Esse tipo de abordagem tem sido denominada *Análise de Modelos* – AnM (SOARES, 2012, 2015; SOARES; JAVARONI, 2013; SOUSA, 2019).

Utilizada, a princípio apenas no ensino superior, a AnM é sugerida como uma abordagem investigativa que faz uso de modelos matemáticos já existentes para introduzir um novo conteúdo de alguma disciplina, como Cálculo Diferencial e Integral, por exemplo.

Essa concepção evidencia uma característica central da AnM que a diferencia da *Aplicação de Modelos* – ApM (SOUSA; LARA, 2021), isto é, o papel *reflexivo* dos modelos matemáticos dentro dos contextos estudados. Assim, tirando o fato de que na AnM não se elabora o modelo, tal característica aponta uma aproximação muito mais estreita desta (AnM) com a MM do que com a ApM, apontam os autores.

Nesse sentido, embora a elaboração do modelo matemático pelos estudantes seja considerada uma etapa central no processo de MM na maioria das concepções, Soares (2015) passa a defender a AnM como uma atividade de *modelagem rudimentar*[3], conforme a

[3] Ao definir a AnM como uma atividade de modelagem rudimentar, Soares (2015) ressalta que o fato de se utilizar o termo "rudimentar" não significa que se trata de uma modelagem ruim, pelo contrário, trata-se de uma MM que oportuniza e incentiva o uso de tecnologia digital, o que só enriquece o processo como um todo.

denominação de Niss (2015). Para tanto, a autora faz uma discussão minuciosa sobre a presença do modelo matemático dentro do processo de MM até chegar a essa concepção (SOARES, 2012; SOARES; JAVARONI, 2013; SOARES, 2015).

Outra perspectiva que sinaliza a AnM no contexto da MM é vista em Biembengut (2016). Ao propor o uso da *Modelação* na Educação Básica, a autora apresenta a atuação do professor na sala de aula em duas direções, *ensinar o conteúdo e a modelar*, e, *ensinar a pesquisar* – fazer modelagem, sinalizando que a AnM estaria inserida na primeira, pois segundo Sousa (2019), esse direcionamento vem ao encontro da perspectiva encontrada em Soares (2012), e, Soares e Javaroni (2013), com relação ao papel reflexivo dos modelos.

Em síntese, destaca Sousa (2019), embora a autora não utilize o termo "Análise de Modelos" de modo explícito para indicar uma abordagem que faz uso de modelos matemáticos prontos em uma perspectiva mais reflexiva, no entanto, a proposta de ensinar o conteúdo e a modelar como direcionamento para implementar a Modelação, aponta uma relação estreita entre ambas (AnM e Modelação).

Com base nessas perspectivas e, levando em conta os relatos dos professores de Matemática da Educação Básica, participantes desta pesquisa, sobre o tema, chegou-se à conclusão de que a AnM pode ser concebida basicamente a partir de três princípios essenciais: 1) *O uso de modelos matemáticos prontos*; 2) *O uso de situações e/ou problemas da realidade*; 3) *O desenvolvimento do conteúdo curricular (e não curricular)*. Portanto, pode ser concebida como "[...] *um método de ensino de Matemática na Educação Básica, que faz uso de modelos matemáticos prontos, partindo sempre de alguma situação-problema da realidade, do cotidiano dos estudantes ou de alguma área do conhecimento, com objetivo de desenvolver o conteúdo curricular e não curricular."* (SOUSA, 2019, p. 149).

De acordo com o autor, essa concepção tem se mostrado eficaz como prática pedagógica, pois potencializa o uso de modelos matemáticos em variados contextos, em situações-problema interessantes para os estudantes, além de oportunizar um modo mais seguro de inicialização, pelo professor, no trabalho com MM em sala de aula sem, contudo, se distanciar da estrutura escolar vigente, principalmente no que diz respeito ao cumprimento do conteúdo curricular programático.

Assim, para implementar a AnM em sala de aula, e visando contribuir com a prática do professor, tanto no planejamento como na execução, Sousa (2019) toma como referência etapas advindas dos métodos *Resolução de Problemas* – RP (VAN DE WALLE, 2009; ALLEVATO; ONUCHIC, 2014) e MM (BASSANEZI, 2002; BURAK, 2004; BARBOSA, 2004; BLUM; LEIß, 2007; BIEMBENGUT, 2016), e propõe um desdobramento do método (AnM), seguindo quatro etapas, conforme especificado no quadro abaixo:

Quadro 1: Etapas do método Análise de Modelos

Etapas	descrição
(1ª etapa) **Apresentação da situação-problema**	Visa a compreensão das situações-problema dentro do contexto apresentado e destaca a presença de modelos matemáticos nesse contexto. Após e/ou durante a apresentação das situações-problema, em diálogo com os estudantes, o professor pode incentivá-los a elencar as variáveis envolvidas. Aqui também é oportunizada aos estudantes uma retomada inicial de conhecimentos prévios, tanto de conteúdo curricular como de conteúdo não curricular.
(2ª etapa) **Exploração e interpretação**	O objetivo é levar os estudantes a relacionar e interpretar os modelos matemáticos dentro do contexto apresentado, de modo que possam compreender o significado das variáveis elencadas. Em conjunto com os estudantes, além do levantamento e elaboração de problemas, o professor também pode propor as primeiras atividades a serem realizadas pelos estudantes. O objetivo é tentar envolvê-los na exploração da situação em estudo e do(s) respectivo(s) modelo(s), além de preparar o "ambiente" para a próxima etapa.
(3ª etapa) **Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução**	Se refere à resolução das questões levantadas, ao mesmo tempo que se desenvolve o novo conteúdo curricular necessário para dar conta destas e de outras questões que por ventura surjam. Esse conteúdo deve ser desenvolvido de modo autônomo pelo professor, que pode ser iniciado a partir de discussões envolvendo os modelos matemáticos relacionados à situação apresentada.
(4ª etapa) **Aplicação**	Visa aplicar os modelos discutidos, tanto no contexto das situações propostas inicialmente como na resolução de novos problemas, em outros contextos. Nessa etapa são sugeridas algumas questões relativas ao conteúdo curricular estudado. Nessas questões, os modelos matemáticos estudados têm papel central em sua resolução e interpretação, oportunizando, de modo geral, a consolidação do conteúdo matemático introduzido, agora aprofundado e ampliado.

Fonte: Elaborado a partir de Sousa (2019)

ANÁLISE DE MODELOS E UM MATERIAL DE APOIO

Nesta seção, destaca-se o processo de elaboração do Material de Apoio ao professor sobre o método de ensino AnM, a partir das potencialidades do livro didático e das questões de Matemática do Enem.

Análise de Modelos e o livro didático de Matemática

A presença do livro didático no meio escolar ainda é uma realidade bem presente no contexto brasileiro. Em geral, ele é assumido como um guia que direciona as ações no processo educativo, como um instrumento de destaque que auxilia o trabalho do professor, em seu planejamento, desde a preparação das aulas, passando pela avaliação da aprendizagem dos estudantes, até o momento de uma auto-avaliação no processo de ensinar (FREITAS; ORTIGÃO, 2012).

No caso específico do livro de Matemática esse entendimento não é diferente. Segundo Perrelli et al. (2013), em geral, o livro de Matemática é utilizado "[...] como fonte de consulta e atualização, como apoio na elaboração do planejamento e na preparação de aulas e como elemento presente nas ações desenvolvidas pelos alunos em sala de aula [...]" (p. 253). Destacam que, quase sempre, é no livro didático que o professor faz as únicas leituras acerca dos conteúdos a serem desenvolvidos em sala de aula. É, portanto, a partir desse livro que o professor elabora os resumos dos conteúdos para as aulas, tira exercícios de fixação e aplicação desses conteúdos e encontra imagens ilustrativas de situações que envolvem o conteúdo.

O livro didático de Matemática é ainda identificado "[...] como um apoio importante na gestão do tempo das aulas, na distribuição dos conteúdos ao longo do ano letivo, na orientação da sequência didática e no balizamento da profundidade do tratamento dos conteúdos." (PERRELLI et al., 2013, p. 254). Segundo os autores, para que haja bom aproveitamento desse instrumento, quase sempre, o professor procura adequar os textos ou as situações apresentadas no livro didático à sua própria realidade.

Por outro lado, muitos professores utilizam equivocadamente ou acabam nem utilizando o livro didático "[...] por considerá-lo inadequado à realidade e ao nível de seus alunos." (PERRELLI et al., 2013, p. 254). Essa postura, às vezes, esconde uma certa insegurança ao uso do livro didático, de novos métodos de ensino e do próprio conhecimento de sua área

(Matemática e Ciências Naturais). Alguns professores têm dificuldades com certos conteúdos, e geralmente são deixados de ser abordados, justificando-se que têm “[...] dificuldades em trabalhar com situações-problemas [e] atribuem tais dificuldades às lacunas na sua formação inicial.” (p. 254).

Diante de dificuldades como essas, é pertinente discutir propostas metodológicas de ensino que, entre outros fatores, levem em conta o uso do livro didático em sala de aula como aliado ao professor e aos estudantes, e a AnM, de acordo com Sousa (2019), pode favorecer esse uso. Segundo o autor, alguns desses livros, utilizados nas escolas, já trazem situações contextualizadas tanto nas introduções, nos textos complementares, nos “exercícios de aprendizagem”, e são, geralmente, parte das atividades de resolução de exercícios. É preciso, no entanto, serem mais e melhor explorados pelos professores.

Segundo Perrelli et al. (2013, p. 256): “Os textos básicos e atividades/exercícios propostos são, de modo geral, utilizados pelo professor na condução de suas aulas. Poucos [porém] utilizam os textos complementares, bem como atividades [extras] que retirem o aluno da sala de aula.”. A impressão que se tem é que o professor não consegue trabalhá-los de modo diferenciado, que instigue o interesse dos estudantes. Primeiro porque esses “[...] textos complementares, em geral, não são trabalhados com os alunos e não são cobrados nas avaliações. Eles apenas são indicados como leitura para o aluno fazer em casa.” (p. 254), e segundo, porque o professor geralmente consulta/estuda muito pouco o manual dedicado a ele, que acompanha o livro didático. É o que expressam claramente os autores ao afirmarem: “O manual do professor também raramente é consultado pelo professor.” (p. 254).

Nota-se que, embora tenha havido avanços consideráveis nos processos de produção, reestruturação e distribuição do livro didático nos últimos anos no Brasil, inclusive com influência das tendências pedagógicas advindas da Educação Matemática, ainda assim, traços de um ensino tradicional são percebidos nas propostas metodológicas contidas nesses livros, seja de forma direta ou indireta. Esse, talvez, seja um dos fatores que causa desestímulo nos estudantes, limitando suas potencialidades no aprender. É o que se vê expresso no Guia PNLD 2018 (BRASIL, 2017, p. 39):

> Essa opção [metodológica] não é muito estimulante e limita as possibilidades de o estudante acompanhar o texto didático com suas próprias reflexões e indagações. Além disso, pouco contribui para um trabalho de sala de aula que favoreça a reflexão

> sobre os conteúdos e as discussões de possíveis soluções para as questões propostas, e que possibilite a atribuição de significados aos conhecimentos estudados.

Além desses aspectos, é destacado no documento, que mesmo nos livros de Matemática aprovados/indicados, geralmente há uma quantidade exagerada de exercícios propostos, a maioria deles repetitivos e padronizados de acordo com exemplos resolvidos. Desse modo, além de dificultar o genuíno interesse dos estudantes pela Matemática, não favorecem a reflexão e nem atribuem significados aos conteúdos que eles veem em sala de aula.

O professor, nesse caso, passa a ser mais exigido na escolha dos exercícios mais significativos e abrangentes dos tópicos a serem estudados, uma vez que os estudantes precisam ser incentivados à reflexão e a desenvolver habilidades e competências que os capacite resolver problemas.

Com a AnM, aponta Sousa (2019), o uso do livro didático de Matemática pode favorecer o desenvolvimento dessas habilidades e competência, pois os muitos textos complementares e as atividades extras sugeridos nos mesmos, quase sempre interessantes e instigantes, podem ser melhor explorados e com mais eficiência.

Análise de Modelos e as questões de Matemática do Enem

Outra fonte utilizada na elaboração do MA sobre o método de ensino AnM, foram as provas do Exame Nacional do Ensino Médio – Enem, uma vez que muitas questões desse exame já aparecem nos livros didáticos e podem ser utilizadas em sala de aula na perspectiva da AnM.

Criado em 1998, a princípio voltado para a avaliação do desempenho dos estudantes ao término da Educação Básica, o ENEM visa identificar um conjunto de competências fundamentais e suas respectivas habilidades fundamentais para o pleno exercício da cidadania, conforme os indicadores apontados nos documentos oficiais (BRASIL, 1996, 1998). De acordo com Viggiano e Mattos (2013, p. 420) o ENEM, nessa perspectiva,

> [...] viria em direção distinta do modelo vestibular posto, tornando-se uma forma alternativa de ingresso na educação superior. [...] O exame, inicialmente, tinha como objetivo fornecer informações sobre estratos específicos para ações do poder público e disponibilizar informações aos estudantes, para que eles mesmos avaliassem seu desempenho em comparação com os dados gerais, e não se voltar para avaliação individual.

Após 10 anos de sua implantação, em 2009, o ENEM é reestruturado e ganha uma nova dimensão. Com a criação do Sistema de Seleção Unificada (SISU), o exame recebe modificações estruturais significativas, deixando de ser um exame com 63 questões, aplicadas em um único dia, para ter 180 questões, aplicadas em dois dias e mantendo a obrigatoriedade da Redação. Essa mudança elevou o número de instituições de Ensino Superior que passou a adotá-lo como meio de avaliação para o ingresso em seus cursos, mesmo não tendo sido de modo uniforme. É o que destaca Viggiano e Mattos (2013, p. 421): "Essa adesão ocorreu de maneira diversificada, podendo o exame ser aplicado como a única forma de avaliação, como a primeira fase desta ou contribuindo com parcela da nota final.".

O novo ENEM passa "[...] a ser um instrumento de política pública para conduzir e alinhar o currículo de Ensino Médio em todo o país." (DANTE, 2016, p. 310), que visa amenizar algumas disparidades causadas pelos concursos vestibulares tradicionais praticados até então pela maioria das instituições de Ensino Superior, pois havia uma diferença muito grande com relação ao nível e forma de abordar os conteúdos curriculares nesses concursos. Dependendo da instituição, o que/como era desenvolvido no Ensino Médio de uma determinada escola em termos curriculares, poderia ser adequado para um bom desempenho dos estudantes naquele vestibular, naquela instituição de Ensino Superior, ou poderia ser totalmente fora de contexto, sem sentido para resolver as situações que ali eram apresentadas.

Assim, o novo Enem se apresenta como "[...] um vestibular unificado criado pelo governo federal e obedecendo a suas diretrizes e seus parâmetros curriculares. [...] tem como fim avaliar o aspecto cognitivo, mas enfatizando a capacidade de autonomia intelectual e o pensamento crítico dos alunos." (p. 310). Há, nessa direção, um favorecimento à mobilidade dos estudantes, no sentido de descentralizar os vestibulares específicos de cada instituição pública de Ensino Superior, possibilitando intercâmbio entre os jovens estudantes em todo o território brasileiro. Além disso, de acordo com Dante (2016, p. 310),

> [...] o Enem se propõe a melhorar a qualidade do Ensino Médio, uma vez que avalia o desenvolvimento de certas competências e habilidades dos alunos, não isoladamente, mas de forma conjunta. Assim, o conteúdo ministrado no Ensino Médio passa a ser determinado pelos professores, coordenadores e diretores e não exclusivamente ditado pelas universidades. Desse modo, é importante que os docentes compreendam e discutam a proposta integralmente, pois a execução desses pressupostos em sala de aula poderá contribuir para uma reorientação nas concepções e nas práticas, já que não se trata de mera revisão de conteúdos a ensinar, mas de redimensionar o papel da escola e seus atores.

É pensando nessa proposta de melhoria, principalmente do ensino de Matemática, que Sousa (2019) aponta o uso mais eficiente das questões do Enem em sala de aula, não somente as que já aparecem nos livros didáticos, mas outras que apresentam situações interessantes em vários contextos, e a AnM como método de ensino, pode servir de ponte entre os pressupostos apresentados na Matriz de Referência do novo Enem (BRASIL, 2009)[4] e a prática em sala de aula ao utilizar questões desse exame, podendo, inclusive, ter papel relevante no sentido de (re)orientar concepções e práticas que visem a melhoria da qualidade do ensino de Matemática.

Elaboração do Material de Apoio

Para a elaboração do *Material de Apoio* – MA sobre o método de ensino AnM na pesquisa de Sousa (2019), foram utilizadas cinco coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovadas no PNLD-2018 (BRASIL, 2017)[5], as quais já apareciam nas três últimas edições do PNLD, isto é, em 2012, 2015 e 2018.

Distribuídas gratuitamente nas escolas públicas de todo o país, essas coleções apresentam, em geral, conteúdos atualizados e contextualizados. Visam integrar e articular os conteúdos a fim de privilegiarem "[...] a exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas" (BRASIL, 2017, p. 14). Essa "[...] integração e articulação de conteúdos atendem a diversas finalidades. Uma delas é possibilitar o desenvolvimento da habilidade de construir, ou selecionar, o modelo matemático adequado à resolução de um problema dado." (BRASIL, 2017, p. 18), o que se harmoniza perfeitamente à proposta do método AnM (SOUSA, 2019).

Também foram utilizadas as questões de Matemática do Enem na elaboração do MA. Para isso, foram analisadas as questões dos exames de 2009 até 2018, pois é a partir de 2009 que há uma reformulação desse exame, quando passa a ser utilizado também como forma de seleção aos cursos de instituições públicas de ensino superior.

---

[4] O foco geral dessa Matriz é a análise e resolução de situações-problema elaboradas com base na interdisciplinaridade e na contextualização. Esse novo ENEM visa avaliar competências específicas de cada área de conhecimento, as quais se desdobram em habilidades que refletem conhecimentos emergentes dentro de eixos cognitivos, comuns a todas as áreas.

[5] São elas: [C1] Matemática: Contexto & Aplicações (DANTE, 2016); [C2] Matemática: ciência e aplicações (IEZZI; et al., 2016); [C3] Matemática para compreender o mundo (SMOLE; DINIZ, 2016); [C4] #Contato matemática (SOUZA; GARCIA, 2016); [C5] Matemática Paiva (PAIVA, 2016).

Ao considerar essas fontes (livros didáticos e questões do Enem), a ideia foi realizar uma busca minuciosa e criteriosa por modelos matemáticos que tratassem das diversas áreas de conhecimento, situações e temas, e servissem como modelos-base para a elaboração do MA, direcionado pelos princípios e etapas do método proposto (AnM). E assim foi feito.

Elaborado principalmente a partir dos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados no PNLD-2018 e das questões do Enem (2009 – 2018), como mencionado anteriormente, esse MA apresenta o desenvolvimento prático das etapas relativas ao método AnM para alguns conteúdos do Ensino Médio. O quadro a seguir, mostra alguns desses conteúdos sugeridos no MA, apresentado em Sousa e Silva (2021).

Quadro 2: Conteúdos do Ensino Médio desenvolvidos na perspectiva do método AnM

CC1 – Função Polinomial do 1º Grau

Situação 1.3: Quanto você calça?

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

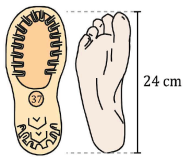
Em geral, a numeração usada na confecção de sapatos depende do comprimento do pé das pessoas. Você sabe como faz o cálculo para determinar o número do sapato em **função** do tamanho do pé? Os fabricantes de calçados brasileiros em geral usam:

Modelo 3

$$N = \frac{5c + 28}{4}$$

onde ***c*** representa o comprimento do pé (em *cm*) e ***N***, o número do calçado.

Figura 1: Tamanho de um pé e o número do sapato correspondente



Fonte: Smole e Diniz (2016a, p. 76).

Identificando Variáveis a partir da **Situação 1.3**

- A fórmula acima (Modelo 3) indica uma **função** que relaciona duas grandezas. Quais essas grandezas?
- Que variável representa cada uma dessas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões/problemas a partir da **Situação 1.3**

- A Figura 1 acima mostra o desenho de um sapato com numeração 37 e o pé correspondente, 24 *cm*. Esses valores dão certo na fórmula (Modelo 3)?
- E pra você, dá certo a fórmula (Modelo 3)?
- Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, como seria a representação *gráfica* dessa fórmula (Modelo 3)?
- Pessoas que calçam uma mesma numeração de sapato, significa que elas têm o mesmo comprimento do pé? Como justificar?
- Essa fórmula (Modelo 3) é a única maneira de calcular a numeração do calçado em função do comprimento do pé? Como encontrar essa (ou outra) fórmula? etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.3**

1) Quanto você calça? (Expresse o número real N do seu calçado).

2) Com uma régua, faça a medição do comprimento c de seu pé e registre.

3) Faça uma tabela contendo pares de números (c, N) fornecidos por seus colegas.

4) Represente graficamente (plano cartesiano) os dados da tabela e ligue os pontos.

5) Pessoas que calçam um mesmo número de sapato, têm sempre o mesmo comprimento do pé? Explique. etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da **Situação 1.3**

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Questionar o que caracteriza esse tipo de função e qual sua forma geométrica e algébrica geral.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da **Situação 1.3**

1) De acordo com a Figura 1, um pé de comprimento 24 *cm* corresponde a um sapato de numeração 37. Esses valores dão certo na fórmula (Modelo 3)? Justifique.

2) Verifique se os valores c e N do seu próprio pé dão certo na fórmula (Modelo 3).

a) Pela fórmula, qual deveria ser o valor de N (**exato**) do seu calçado?
b) Qual o valor real (**arredondado**) do calçado?

3) Se duas pessoas calçam 43, qual a possibilidade do comprimento de seus pés?

4) Repita a questão anterior, considerado a numeração do seu próprio calçado.

5) Em uma planilha (Excel), utilize os dados da tabela (questão 3 da Tarefa 1) para expressar um gráfico de dispersão que represente a numeração do calçado em função do comprimento do pé da sua turma. Exiba a fórmula referente a esses dados.

a) Ao comparar essa fórmula com o Modelo 3, que similaridades e diferenças você percebe? (Descreva suas percepções).
b) As duas fórmulas podem ser utilizadas para calcular a numeração de um calçado em função do comprimento do pé da pessoa. Para um determinado comprimento do pé, as duas fórmulas resultam a mesma numeração? Exemplifique. Por que isso acontece? Etc.

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

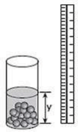
Situação 1.5: Eureka! Eureka!

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

Você sabe o que significa essa expressão? Sabe quem saiu gritando essa expressão pelas ruas da cidade? Essa é uma famosa exclamação atribuída ao matemático e cientista grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), quando descobriu como resolver um complexo problema apresentado pelo rei Hierão. Em síntese, o rei queria saber o volume de ouro em sua coroa e Arquimedes teria que medir esse volume sem a derreter. A descoberta da solução do problema ocorreu quando Arquimedes entrou numa banheira com água e observou que o nível da água subia quando ele entrava. Concluiu então que para medir o volume da coroa bastava mergulhar a coroa em água e calcular o volume de água deslocado, que deveria ser equivalente. Ao perceber a descoberta, conta-se que ele saiu nu, correndo pelas ruas da cidade e gritando eufórico: "Eureka! Eureka!", que em grego significa "Achei! Achei!". Essa grande descoberta ficou conhecida como *Princípio de Arquimedes*.[2] (Pesquise mais[3]).

Para ilustrar esse principio, foi realizado o seguinte experimento: Colocou-se certa quantidade de bolinhas de vidro idênticas em um copo cilíndrico com água até certo nível e mediu-se o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir, onde é indicado alguns resultados do experimento.

Modelo 5



número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Fonte: ENEM 2009 – Q. 159 (prova azul).

Identificando Variáveis a partir da **Situação 1.5**

- A tabela acima (Modelo 5) indica a relação entre duas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis podem representar essas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões/problemas a partir da **Situação 1.5**

- Variando uniformemente o número de bolinhas de vidro dentro do copo, a variação do nível da água também é uniforme? O que isso significa?
- O nível da água y depende (está em função) do número de bolas x colocadas dentro do copo. Que forma gráfica indica essa função (representação geométrica)?
- Como seria uma fórmula $y = f(x)$ para esse fenômeno (representação algébrica)?

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da **Situação 1.5**

1) Observando a tabela (Modelo 5), ao variar o número de bolinhas de vidro dentro do copo de 5 para 10 e, de 10 para 15, quais as variações correspondentes do nível da água? O que você percebe?

2) Se forem colocadas mais cinco bolinhas dentro do copo (passa a ter 20 bolinhas), qual será o nível da água? Por quê?

3) Se forem colocadas mais outras dez bolinhas dentro do copo, passando a ter 30 bolinhas, qual será o nível da água? Por quê?

4) Represente esses pontos em um sistema de coordenadas (Plano Cartesiano). Que tipo de gráfico você acha que pode ser formado quando se liga esses pontos? Etc.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da **Situação 1.5**

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Questionar o que caracteriza esse tipo de função e qual sua forma geométrica e algébrica geral.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da **Situação 1.5**

1) De acordo com o que foi estudado, o Modelo 5 pode ser representado por uma fórmula do tipo $y = mx + n$ (função do 1º grau). Por que podemos concluir isso? Explique.

2) Expresse essa fórmula (Modelo 3) e responda os itens:

a) Usando a fórmula, qual o nível da água quando tem 20, 23 e 34 bolinhas dentro do copo?
b) Usando a fórmula, qual o nível da água quando não tem nenhuma bolinha dentro do copo? O que isso significa?
c) O que representa o valor de m nessa fórmula?
d) O que representa o valor de n nessa fórmula?

3) Assim como fez Arquimedes para calcular o volume da coroa do rei Hierão, você pode calcular, por exemplo, o volume das bolinhas do experimento apresentado. Como você faria isso? (Descreva um modo de fazer esse cálculo). Que informações precisamos ter para poder calcular esse volume? Explique. Etc.

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

CC2 – Função Polinomial do 2º Grau

Situação 2.2: Como construir um galinheiro e aproveitar melhor o espaço?

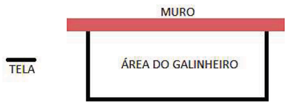
1ª Etapa: Apresentação da situação-problema

(IEZZI et al., 2016a, adaptado). Na comunidade Perema (14 km de Santarém na Av. Curuá-Uma (PA-370)), um pequeno criador de galinhas resolve construir um galinheiro retangular no seu terreno. Dispondo apenas de 30 m de tela, o homem decide aproveitar um muro desse terreno como uma das laterais do galinheiro conforme a figura abaixo:

Figura 3: Pensando no projeto "O galinheiro"

Esse projeto pode ser simplificado pelo desenho a seguir (Modelo 2):

Modelo 8



Fonte: http://edumatecno.blogspot.com/2013/04/desenvolvendo-uma-atividade-de.html.

Identificando Variáveis a partir da **Situação 2.2**

- O galinheiro idealizado acima (Modelo 8) indica três grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis você indicaria pra representar cada uma dessas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.2**

- De quantas maneiras é possível cercar esse galinheiro?
- A área obtida é sempre a mesma? É possível o galinheiro ter uma área de 112 m^2? Por quê? E 125 m^2? Por quê?
- Caso seja possível o galinheiro ter alguma dessas áreas (112 m^2 ou 125 m^2), quais seriam as dimensões x e z?
- Quais as dimensões (x e z) que dão a maior área possível para esse galinheiro? Qual será essa área? Etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

<u>Tarefa 1</u>: Ações exploratórias a partir da **Situação 2.2**

1) Esboce algumas possibilidades de como cercar o galinheiro. Encontrar as áreas em cada caso.

2) Ao considerar os três lados do galinheiro que serão cercados, representando os lados iguais por x (metros) e o outro lado por z (metros), evidencie a expressão matemática da área do galinheiro $y = f(x)$.

3) Tente encontrar as dimensões do galinheiro pra que este tenha uma área de $112\ m^2$(por tentativas). Fazer o mesmo para tentar obter uma área de $120\ m^2$.

4) A partir das ideias apresentadas no item 1), tente obter (por tentativas) a área máxima do galinheiro. Etc.

<u>3ª Etapa</u>: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da **Situação 2.2**

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Em relação ao item 4) da tarefa (Tarefa 1), evidenciar a necessidade de conhecer o vértice da parábola.
- Questionar o que caracteriza esse tipo de função e sua forma algébrica geral.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

<u>Tarefa 2</u>: Ações exploratórias a partir da **Situação 2.2**

1) Verifique se é possível o galinheiro ter uma área de $120\ m^2$ ou $125\ m^2$ (resolver equações do 2º grau e discutir as raízes). Explique.

2) Caso seja possível, calcule em cada situação, as dimensões x e z estabelecidas anteriormente.

3) Encontre as dimensões (x e z) que dão a maior área possível para esse galinheiro, utilizando para isso, os conhecimentos sobre o vértice da parábola.

4) Calcule essa área máxima. Etc.

<u>4ª Etapa</u>: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Situação 2.3: Você já foi à praia de Alter-do-Chão?

<u>1ª Etapa</u>: Apresentação da situação-problema

(ENEM – 2015, adaptado). A praia de Alter-do-Chão (Figura 2) está entre as dez mais bonitas do Brasil. Localizada no oeste do Pará, é a primeira entre os dez lugares com as praias mais bonitas do Brasil, chamado de "Caribe brasileiro" pelo jornal inglês *The Guardian*. O jornal também aponta o lugar como o mais bonito do mundo com praias de águas doces. Perfeita para relaxar, a natureza foi bem generosa com a vila de pescadores, que pertence à cidade de Santarém. O cenário é paradisíaco (figura abaixo) e guarda uma beleza única, já que suas praias são às margens do Rio Tapajós.

Figura 4: Praia de Alter-do-Chão

Fonte: https://br.pinterest.com/pin/59391288811206351/?nic=1.

Uma excursão à vila pode ser feita em pequenas embarcações, navegando as águas verde-azuladas do Rio Tapajós, saindo da orla de Santarém (à 38 km da vila aproximadamente).

Modelo 9 "Seu" Antônio é dono de uma dessas embarcações, cuja capacidade máxima é de 40 passageiros, e cobra para uma excursão (ida e volta) até a vila e arredores, $R\$$ 60,00 de cada passageiro. Uma condição colocada por ele é que se não atingir a capacidade máxima da embarcação, cada passageiro deve pagar mais $R\$$ 2,00 por lugar vago.

Identificando Variáveis a partir da **Situação 2.3**

- O modelo implícito acima (Modelo 9) indica a presença de algumas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis você indicaria para representa cada uma dessas grandezas?

<u>2ª Etapa</u>: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da **Situação 2.3**

- Como seria uma expressão matemática que permite calcular o valor a ser arrecadado em função do número de lugares vagos?
- Para as pessoas que vão numa excursão dessa, o ideal é que todos os lugares sejam ocupados, mas para o dono da embarcação seria bom que não. Sendo assim, quantos lugares deveriam ser vagos para que o "Seu" Antônio tenha a maior arrecadação possível? Qual seria esse valor? etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

<u>Tarefa 1</u>: Ações exploratórias a partir da **Situação 2.3**

1) Tente encontrar uma expressão matemática $y = f(x)$ que permite calcular o valor a ser arrecadado em função do número de lugares vagos.

2) Para as pessoas que vão numa excursão dessa, o ideal é que todos os lugares sejam ocupados, mas para o dono da embarcação seria bom que não. Sendo assim, a partir da expressão matemática encontrada no item 1), tente calcular (por tentativas) o número ideal de lugares vagos para que "Seu" Antônio tenha a maior arrecadação possível. Tente achar esse valor (evidenciar a necessidade de conhecer o vértice da parábola). Etc.

<u>Observação</u>: Para orientar os estudantes no item 1) e, consequentemente, no restante da Tarefa 1, o professor pode construir junto com eles o quadro a seguir (Quadro 1):

Quadro 1: Expressão matemática $y = f(x)$ do Valor Total arrecadado por "Seu" Antônio

Nº de Lugares Vagos	Valor Individual	Valor Total
0	60	$40 \cdot 60$
1	$60 + 2 \cdot \mathbf{1}$	$(40 - \mathbf{1}) \cdot (60 + 2 \cdot \mathbf{1})$
2	$60 + 2 \cdot \mathbf{2}$	$(40 - \mathbf{2}) \cdot (60 + 2 \cdot \mathbf{2})$
3	....	....
4	....	....
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{x}$	....	....

Fonte: Elaborado pelo autor.

<u>3ª Etapa</u>: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da **Situação 2.3**

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Em relação aos itens 2) e 3) da tarefa (Tarefa 1), evidenciar a necessidade de conhecer o vértice da parábola.
- Questionar o que caracteriza esse tipo de função e sua forma algébrica geral.
- Evidenciar a necessidade do novo conteúdo.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

<u>Tarefa 2</u>: Ações exploratórias a partir da **Situação 2.3**

1) Identifique os coeficientes a, b e c da função $y = -2x^2 + 20x + 2400$ e interpretá-los dentro do contexto da situação.

2) Verifique se é possível o seu Antônio arrecadar $R\$$ 2500,00 ou $R\$$ 3000,00 nessa excursão, utilizando para isso, os conhecimentos sobre resolução da equação do 2º grau e discussão de suas raízes. Caso seja possível, calcule em cada arrecadação, o número de lugares vagos.

3) Calcule o número de lugares vagos para que o "Seu" Antônio tenha a maior arrecadação possível, utilizando os conhecimentos sobre o vértice da parábola nos problemas de otimização (Máx. e Mín.). Calcule esse valor máximo. Etc.

<u>4ª Etapa</u>: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Juiz de Fora, v. 7, n. 1, p. 1-21, Jan. – Dez., e-ISSN: 2594-4673, 2023

10.34019/2594-4673.

CC3 – Função Exponencial

Situação 3.3: Como está sua radiação hoje?

1ª Etapa: Apresentação das situações-problema

(DANTE, 2016a; IEZZI et al., 2016a; ENEM – 2013, Q. 166, adaptado). Estudos mostram que a radiação de celulares pode ser prejudicial à saúde[1]. Você sabia que o corpo humano também emite radiação? Que possui radioatividade? (sugerir pesquisa sobre o assunto). A radioatividade é um fenômeno que ocorre em núcleos de átomos instáveis por emitirem partículas e radiações. Os átomos radioativos estão presentes no meio ambiente (atmosfera, rochas, cavidades subterrâneas, hidrosfera etc.), alimentos e seres vivos. O núcleo de um átomo com excesso de energia tende a se estabilizar emitindo um grupo de partículas (radiação alfa ou beta) ou ondas eletromagnéticas (radiações gama). Em cada emissão de uma das partículas, há variação do número de prótons e nêutrons no núcleo e, deste modo, um elemento químico se transforma em outro, chamado **decaimento radioativo**.

Considerando uma grande quantidade de átomos de um mesmo elemento químico radioativo, espera-se certo número de emissões por unidade de tempo. Essa "taxa de emissões" é a atividade da amostra. Cada elemento radioativo se transmuta (desintegra) a uma velocidade que lhe é característica. Veja o caso do césio-137. Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população.

Figura 7 - Acidente Radioativo em Goiânia (1987)

Técnicos orientando o carregamento de lixo radioativo depois do acidente com o césio-137. Goiânia-GO. Fotografia de 1987.

Fonte: Dante (2016a, p. 174).

Considerando que M_0 era a quantidade inicial dessa amostra e sabendo que a taxa de desintegração, obtida experimentalmente, é $0{,}023$, então a quantidade restante de massa do césio-137, após t anos, pode ser expressa pela expressão matemática:

Modelo 13 $$M(t) = M_0(2,7)^{-0,023t}$$

Identificando Variáveis a partir da Situação 3.3

- O modelo acima (Modelo 13) indica algumas grandezas. Quais são elas?
- Que variáveis são utilizadas para representar essas grandezas?

2ª Etapa: Exploração e interpretação

Possíveis questões a partir da Situação 3.3

- Que tipo de função é essa?
- Ainda há radiação sendo emitida naquela localidade (Goiânia) hoje em dia?
- Sabe-se que o lugar onde ocorreu o acidente só poderá ser habitado novamente quando a quantidade de massa radioativa de césio-137 se reduzir, por desintegração, a 3% da quantidade inicial, quanto tempo isso vai demorar (contando a partir da data do acidente, isto é, 1987)? Em que ano será? etc.

Sugestão de primeiras Ações Exploratórias ...

Tarefa 1: Ações exploratórias a partir da Situação 3.3

1) Depois de 5 anos do acidente, que quantidade de radiação era emitida naquela localidade? E depois de 10 anos? E depois de 15 anos? E hoje em dia?

2) Sabe-se que a **meia-vida** de um elemento radioativo é o intervalo de tempo necessário que a massa radioativa leva para reduzir à metade (50%) da quantidade inicial. Para estimar a meia-vida do césio-137, que estratégia você usaria? Etc.

Observação: Para auxiliar a realização do item 2) da Tarefa 1, dependendo do desempenho dos estudantes, o professor pode sugerir que eles calculem e registrem as quantidades de massa radioativa remanescentes após 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 e 50 anos.

3ª Etapa: Desenvolvimento do conteúdo curricular e Resolução

Sugestão de Discussões em torno da Situação 3.3

- Oportunizar aos estudantes que apresentem as estratégias de desenvolvimento da tarefa (Tarefa 1).
- Discutir as facilidades e dificuldades na realização da tarefa (Tarefa 1).
- Retomando o item 2) da Tarefa 1, evidenciar a necessidade de aprofundamento para resolver esse tipo de problema.
- Em diálogo com os estudantes, o professor retoma o processo de decaimento radioativo representado pelo modelo $M(t) = M_0 \cdot (2,7)^{-0,023t}$, e questiona que tipo de função é essa, o que a caracteriza e qual sua forma algébrica geral.
- Etc.

Nesse momento, o professor tem autonomia para desenvolver, em diálogo com os estudantes, o **conteúdo curricular** que evidencie o modelo geral em estudo e dê conta dos questionamentos levantados. Além disso, outras situações que se utilizam do modelo geral apresentado, podem ser evidenciadas e discutidas no grupo.

Sugestão de outras Ações Exploratórias ...

Tarefa 2: Ações Exploratórias a partir da Situação 3.3

1) Usando uma calculadora científica e fazendo aproximações, calcule em quanto tempo a massa radioativa de césio-137 será reduzida para 32%.

2) Usando uma calculadora científica e fazendo aproximações, calcule em quanto tempo a massa radioativa de césio-137 será reduzida para 10%.

3) Usando uma calculadora científica e fazendo aproximações, calcule em quanto tempo a massa radioativa de césio-137 será reduzida para 5%.

4) Usando uma calculadora científica e fazendo aproximações, estime em que ano o local onde ocorreu o acidente poderá ser habitado novamente com segurança, sabendo que isso só ocorrerá quando a quantidade massa radioativa de césio-137 se reduzir, por desintegração, a 3% da quantidade inicial. Etc.

4ª Etapa: Aplicação

Questões de Aplicação são sugeridas no final da seção.

Fonte: Sousa e Silva (2021).

ASPECTOS METODOLÓGICOS

A etapa de aplicação do método de ensino AnM, foi realizada por um grupo de 12 professores do Ensino Médio de escolas públicas, na cidade de Santarém/PA. Para isso, foi proposta uma ação de extensão vinculada ao grupo de pesquisa GEPEIMAZ[6]/UFOPA, com uma carga horária total de 30 horas.

Primeiramente os professores participaram de um minicurso (16h) sobre o método (AnM), ministrado pelo pesquisador. Em seguida, os professores aplicaram o método na escola onde atuavam (12h), finalizando com um encontro de encerramento para avaliação (2h), onde puderam dar seus depoimentos sobre a experiencia vivenciada em sala de aula.

Além disso, os professores responderam um questionário, cujas respostas, junto com os depoimentos, evidenciaram suas opiniões acerca das potencialidades e viabilidade do método (AnM) para o ensino de Matemática na Educação Básica, em especial no Ensino Médio, bem como sobre as contribuições que o MA utilizado durante essa prática em sala de aula.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Ao final das ações (minicurso e aplicação prática do método AnM), os professores e estudantes que participaram da prática na escola[7], apontaram que a AnM tem potencial e pode ser viável como método para ensinar Matemática na Educação Básica, em especial no Ensino Médio, pois: estimula o interesse dos estudantes e incentiva sua participação nas aulas, oportunizando interação (estudantes e estudantes, estudantes e professor) e trabalho em grupo; aborda o conteúdo curricular diferente do modo tradicional, partindo sempre de alguma situação-problema da realidade e/ou do cotidiano dos estudantes; enfatiza a elaboração e resolução de problemas; torna a aprendizagem mais significativa; incentiva os estudantes a questionar e fazer perguntas; oportuniza pensamento crítico-reflexivo dos estudantes dentro da sociedade em que vivem; incentiva a investigação e a pesquisa; oportuniza o protagonismo dos estudantes e a descoberta (SOUSA, 2019).

Em relação ao MA, de acordo com o autor, os 12 professores apontam que esse material teve papel relevante tanto no planejamento como na execução da prática do método AnM em sala de aula. Essa opinião é percebida tanto nas respostas do questionário aplicado a eles após a prática na escola, como também em suas falas no término das atividades, na avaliação feita no último encontro da ação de extensão.

[6] Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Interdisciplinaridade na Amazônia.
[7] Os estudantes (259) também responderam um questionário semelhante ao respondido pelos professores.

O Quadro 2 a seguir explicita essa opinião (respostas do questionário) quanto à estrutura e conteúdo proposto no MA, ao mesmo tempo que apontam as primeiras sugestões.

Quadro 2: Opinião dos professores sobre o Material de Apoio

Prof.	Organização e Visual	Situações propostas	Possíveis questões	Modelos apresentados
A	*"Bom."*	*"Bom, só precisa adequar à realidade de cada escola."*	*"Bom."*	*"Gostei. Irei utilizar em conteúdos futuros."*
B	*"Boa."*	*"Boas. Apresentar situações mais próximas dos alunos."*	*"Boas."*	*"Bons."*
C	*"Boa."*	*"São bastante interessantes."*	*"Mostra um leque bem grande de opções."*	*"Estão bem organizados."*
D	*"Muito boa."*	*"Ótimas."*	*"Coloca questões da realidade do município."*	*"Ótimos."*
E	*"Excelente."*	*"Excelentes. Aumentar a quantidade de situações-problemas voltadas à nossa região."*	*"Excelentes."*	*"Bem elaborados."*
F	*"Muito bem organizado e elaborado. Ações bem divididas e claras."*	*"Contextualizadas e atrativas. Ótimas para apresentar aos alunos."*	*"São bem elaboradas e respondem a uma linha de pensamento para entender o conteúdo."*	*"Correspondem aos temas abordados."*
G	*"Ao invés das atividades estarem separadas por fases, seria melhor por conteúdo."*	*"Ok!"*	*"Ok!"*	*"Ok!"*
H	*"Poderia apresentar mais imagens e material palpável na hora da aplicação."*	*"Muito interessantes. Fazem parte do cotidiano dos alunos."*	*"Estão de acordo com a situação-problema e apresentam coerência e uma sequência com nível de dificuldade"*	*"Bem elaborados e podem ser muito mais explorados tornando a atividade bem mais diversificada."*
I	*"Boa, porém separaria as etapas por situações-problemas."*	*"Excelentes."*	*"Penso que está bom, pois depende muito do nível da turma para avançar nesse item"*	*"Muito bons."*
J	*"Acredito que não sobrecarrega o texto e estimula a leitura."*	*"Adequadas aos conteúdos e níveis."*	*"Permitem a reflexão e discussão"*	*"Despertam o interesse."*
K	*"Muito boa."*	*"Muito boas."*	*"Muito boas."*	*"Muito bons."*
L	*"Boa. O aluno gosta muito de imagem e facilita o entendimento."*	*"Boas, porém deveriam diversificar mais."*	*"Boas. Levam o entendimento integrado à busca de outros conhecimentos"*	*"Bons e bem contextualizados."*

Fonte: Sousa (2019).

É perceptível nesse quadro (Quadro 2) que a avaliação feita pelos professores indica potencial do MA apresentado para auxiliar professores na implementação prática na sala de aula. Basta observar que os quatro elementos do MA destacados no questionário, são classificados pelos participantes, de modo geral, como **bons**, **muito bons**, **ótimos** e **excelentes**. Isso evidencia, não só o potencial de um MA desse tipo (destacado acima), mas também a contribuição que o mesmo pode trazer ao processo educativo, seja no ensino, seja na aprendizagem.

Como forma evidente dessa opinião, destaca-se que a organização e o visual do MA utilizado no minicurso e na prática em sala de aula, segundo os professores, *"[...] não sobrecarrega o texto e estimula a leitura."* (**J**). As situações propostas são bem *"interessantes"* (**C**, **H**), *"Contextualizadas e atraentes."* (**F**) e *"Fazem parte do cotidiano dos alunos."* (**H**). Já as questões sugeridas em cada situação proposta, abrem um *"[...] leque bem grande de opções."* (**C**) e *"Permitem a reflexão e discussão."* (**J**) de temas voltados à *"[...] realidade do município."* (**D**) e *"Levam o entendimento integrado à busca de outros conhecimentos."* (**L**). Além disso, destaca o professor **F**, essas questões direcionam as discussões em uma *"[...] linha de pensamento para [o estudante] entender o conteúdo."*. Por fim, os professores enfatizam que os modelos apresentados são *"bem elaborados"* e *"organizados"* (**C**, **E**, **H**), adequados *"[...] aos temas abordados."* (**F**), *"[...] bem contextualizados."* (**L**) e *"[...] despertam o interesse [dos estudantes]."* (**J**).

Contudo, os professores também apontam algumas sugestões como forma de melhoria do MA. O professor **H** destaca, por exemplo, que na organização e visual, o MA *"Poderia apresentar mais imagens e material palpável na hora da aplicação."* (**H**), pois como afirma **L**, *"O aluno gosta muito de imagens e facilita o entendimento."*. Em relação às situações propostas, os professores sugerem que poderiam ser melhor adequadas *"[...] à realidade de cada escola."* (**A**), ser *"[...] mais próximas dos alunos."* (**B**) e *"[...] voltadas à nossa região."* (**E**).

Percebe-se aí a preocupação deles em discutir e explorar mais questões relacionadas a assuntos/temas da realidade dos estudantes, seja da escola, do município ou da região onde vivem. É o que indica o professor **H**, em sua fala no último encontro da ação de extensão, quando afirma: *"Poderiam ser elaboradas mais questões envolvendo situações-problema da* *nossa região [...]”*. Por fim, o professor **H** ainda destaca que os modelos apresentados poderiam *“[...] ser muito mais explorados, tornando a atividade bem mais diversificada.”*.

Uma síntese dessas sugestões pode ser expressa por: apresentar uma situação de cada vez e desenvolver o processo de AnM (as etapas) para cada uma; descrever as etapas do método dentro de uma sequência mais detalhada (passo a passo) da aula ou da sequência de aulas; explicitar as competências e habilidades esperadas dos estudantes em relação àquele conteúdo específico; como o material é de apoio ao professor, descrever as ações (como sugestões) dos professores em cada momento do processo etc. Em complemento a isso, destaca-se ainda a ideia dos professores **B** e **H**, que sugerem a produção (publicação) de um livro a partir do MA, ideia essa, reforçada pelos outros professores.

Em última análise, Sousa (2019) aponta que o contato dos professores com esse MA, embora precisando de ajustes, teve papel central na segurança e inspiração deles quanto a implementação prática do método AnM na sala de aula. É o que expressam os professores **E** e **K** ao afirmarem, respectivamente, que *“Com o Material de Apoio, ajudou a tirar o medo de não saber [implementar o método AnM]”* e mais, *“Com o Material de Apoio tivemos inspiração para elaborar e perceber situações do cotidiano dos alunos e explorar bem uma questão.”*. Concluindo, o professor **J** relatou que, durante o processo da ação pedagógica, teve *“inspiração com o Material de Apoio”* na produção de um artigo que já estava escrevendo junto com outros colegas de sua escola (**K**, **L**).

Assim, levando em conta a opinião dos professores, foram feitos alguns ajustes no MA, principalmente em relação à organização e visual, que culminou com a publicação de um primeiro volume do novo MA, onde é apresentado o desenvolvimento prático do método AnM de alguns conteúdos específicos do Ensino Médio (1º ano), seguindo suas etapas (SOUSA; SILVA, 2021).

Para tanto, como a proposta inicial da pesquisa realizada em Sousa (2019) era tomar o livro didático de Matemática do Ensino Médio e as questões do Enem como principais fontes na elaboração das situações propostas, foi preciso fazer algumas adaptações para adequá-las à realidade dos estudantes e da região onde vivem, inclusive a “criação” de novas situações. Com esses ajustes, destaca Sousa (2019), o novo MA passa a ser melhor aproveitado pelo(a) professor(a) e pelos estudantes na prática em sala de aula, no processo educativo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao iniciar este artigo, destacou-se a reflexão do filósofo Will Durant (1996) sobre o conceito de *excelência*, definida por ele como uma arte que se obtém com muito treinamento e insistência na busca pela melhoria da qualidade de uma ação, fazendo dessa ação, um hábito.

Dessa forma, ao propor um MA (SOUSA, 2019; SOUSA; SILVA, 2021) na perspectiva apontada neste texto, infere-se que o mesmo pode servir de inspiração e auxílio no processo de busca por essa excelência em relação à prática pedagógica do professor, no hábito de busca constante pela melhoria da qualidade tanto do ensino como da aprendizagem de Matemática na Educação Básica, no contexto educacional brasileiro.

Portanto, diante de tudo que foi exposto e sugerido no texto, conclui-se que o MA elaborado com base no método de ensino AnM, além de contribuir para sua implementação prática em sala de aula, pode servir como importante aliado ao professor, inspirando-o na elaboração e/ou adaptação de seu próprio material a partir de várias fontes, em especial das situações e modelos matemáticos encontrados no livro didático e nas questões do Enem.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Paco Editorial. Jundiaí. 2014.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como? **Veritati**, Salvador, n. 4, pp. 73-80, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BENASSI, M. T.; SOUZA, Y. M. R.; BASQUEIRA, A. P.; AZZI, R. G. Ensino de Matemática no Ensino Fundamental II: as avaliações padronizadas e os resultados brasileiros. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 2, n. 1, 2015.

BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das Propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, pp. 7-32, 2009.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

BLUM, W.; LEIß, D. Understanding how students' and teachers deal with modelling problems. In: Haines, C.; Galbraith, P.; Blum, W.; Khan, S. (Eds.). **Mathematical modelling**: Education, engineering and economic - ICTMA 12, p. 222-231. Chichester: Horwood, 2007.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, Lei nº. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de Referência para o ENEM 2009**. Brasília: INEP/MEC, 2009.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática 3º e 4º ciclos: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. **PNLD 2018**: matemática – guia de livros didáticos – Ensino Médio/ Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica – SEB – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2017. 122 p.

BURAK, D. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: Encontro Paranaense da Modelagem na Educação Matemática, I, Londrina, 2004. **Anais...** Londrina: UEL, pp. 1-11, 2004.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações** (Ensino Médio). 3. ed. São Paulo: Ática, 2016. Vol. 1.

DURANT, W. **A história da filosofia**. Tradução de Luis Carlos do Nascimento Silva, 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 1996.

FREITAS, I. C.; ORTIGÃO, M. I. R. O PNLD está chegando: e agora, como escolher o livro didático de Matemática? In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, V, 2012, Petrópolis, RJ. **Anais...** Petrópolis: SBEM, 2012.

NISS, M. Prescriptive modelling - challenges and opportunities. In: STILLMAN, G. A; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive inuences. Cham: Springer, 2015. pp. 67-80.

PERRELLI, M. A. S.; LIMA, A. A.; BELMAR, C. C. A escolha e o uso do livro didático pelos professores das áreas de Ciências Naturais e Matemática: as pesquisas que abordam essa temática. **Série-Estudos** – Periódico do Programa de Pós-Graduação em Educação da UCDB. Campo Grande, MS, n. 35, pp. 241-261, jan./jun. 2013.

SANTOS, J. B. P.; TOLENTINO-NETO, L. C. B. O que os dados do SAEB nos dizem sobre o desempenho dos estudantes em Matemática? **Educação Matemática Pesquisa**, v. 17, n. 2, pp. 309-333, 2015.

doi 10.34019/2594-4673.

SOARES, D. S. Model Analysis with Digital Technologies: a “hybrid approach”. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive inuences. Cham: Springer, p. 453-463, 2015.

SOARES, D. S. **Uma abordagem pedagógica baseada na Análise de Modelos para alunos de Biologia**: qual o papel do software? 2012. 341f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

SOARES, D. S.; JAVARONI, S. L. Análise de Modelos: possibilidades de trabalho com Modelos Matemáticos em sala de aula. In: BORBA, M. C. & CHIARA, A. (Org.) **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**, São Paulo-SP, Editora Livraria da Física, 2013, pp. 195-219.

SOUSA, E. S. **Análise de Modelos**: um método de ensino de Matemática na Educação Básica. (Tese de doutorado em Educação em Ciências e Matemática). Porto Alegre: PUCRS, 2019.

SOUSA, E. S.; LARA, I. C. M. Percepções de um grupo de professores de matemática da educação básica em relação à estratégia de ensino aplicação de modelos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 23, n. 1, pp. 31-57, 2021.

SOUSA, E. S.; SILVA, F. R. A. **Análise de Modelos**: Atividades de Matemática para Sala de Aula (Ensino Médio). Belém: RFB Editora, 2021. Volume 1.

SZPACENKOPF, M.; FERREIRA, P. Enem 2015: Rio tem maior queda na nota de Matemática em relação a 2011. **O Globo**, 2016. Disponível em: https://oglobo.globo.com/sociedade/educacao/enem-e-vestibular/enem-2015-rio-tem-maior-queda-na-nota-de-matematica-em-relacao-2011-20243780.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre, RS: Artmed, 2009.

VIGGIANO, E.; MATTOS, C. O desempenho de estudantes no Enem 2010 em diferentes regiões brasileiras. **Revista brasileira de Estudos Pedagógicos**. Brasília, v. 94, n. 237, pp. 417-438, 2013.

HISTÓRICO
Submetido: 31 de janeiro de 2023.
Aprovado: 21 de novembro de 2023.
Publicado: 22 de novembro de 2023.