RIDEMA
Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática

Álgebra temprana: La simplificación de ecuaciones

Luis Radford[1]
Universidad Laurentian, Canadá

RESUMEN

Situado dentro del campo de investigación del álgebra temprana (Blanton et al., 2017; Cai & Knuth, 2011; Kieran, 2018; Kilhamn & Säljö, 2019), este artículo se centra en la comprensión de los jóvenes estudiantes de las ideas básicas en torno a la simplificación algebraica de ecuaciones. El artículo busca contribuir al campo de investigación arrojando luz sobre los procesos de producción de significados que sustentan la simplificación de ecuaciones y las operaciones algebraicas involucradas. En la primera parte, se presenta una concepción teórica del pensamiento algebraico. También se describen dos sistemas semióticos no alfanuméricos que fueron diseñados para introducir a los estudiantes a la simplificación algebraica de ecuaciones. En la segunda parte, se analizan dos episodios de estudiantes de tercer grado (8-9 años de edad) que resuelven ecuaciones de tipo ax+b=cx+d.
Palabras-clave: Álgebra temprana; Ecuaciones; Aislar la incógnita; Semiótica.

PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Uno de los problemas más difíciles a los que se han enfrentado los investigadores de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es el de caracterizar el álgebra y aclarar en qué se diferencia de la aritmética. Se han sugerido dos soluciones principales. Una consiste en equiparar el álgebra con el *uso de las letras*. La otra consiste en concebir el álgebra como algo centrado en *operaciones con números* y no en los resultados. Mientras que la primera solución ofrece una concepción muy estrecha del álgebra impidiendo a los profesores reconocer el pensamiento algebraico en actividades basadas en tipos de representaciones matemáticas diferentes de las letras, la segunda ofrece una concepción muy estrecha de la aritmética, que queda degradada a un simple cálculo.

En trabajos anteriores (Radford, 2014) he sugerido tres elementos para caracterizar el pensamiento algebraico:

[1] E-mail: lradford@laurentian.ca

(1) *Indeterminación de las magnitudes*: el pensamiento algebraico implica magnitudes *indeterminadas*. Pueden ser incógnitas, variables, parámetros, etc.

(2) *Denotación*: hay que nombrar o simbolizar las magnitudes o cantidades indeterminadas que intervienen. Esta simbolización puede llevarse a cabo de varias maneras. Pueden utilizarse signos alfanuméricos, pero no necesariamente. La denotación de las magnitudes o cantidades indeterminadas también puede simbolizarse mediante el lenguaje natural, los gestos, signos no convencionales o incluso una mezcla de ellos.

3) *Analiticidad*: el pensamiento algebraico (a) calcula/opera con magnitudes o cantidades indeterminadas *como si fueran conocidas* y (b) trata las relaciones matemáticas que presentan magnitudes determinadas e indeterminadas (ecuaciones, fórmulas, expresiones, etc.) de forma *deductiva*.

SIMPLIFICACIÓN DE ECUACIONES

Partiendo de la concepción del pensamiento algebraico mencionada al final de la sección anterior, en lo que sigue, se presentan algunos resultados de una actividad de enseñanza-aprendizaje en una clase de tercer grado de escuela primaria (estudiantes de 8-9 años). La actividad se basó en el uso de dos sistemas semióticos no alfanuméricos que fueron diseñados para introducir a jóvenes estudiantes a la resolución algebraica de ecuaciones: un *Sistema Semiótico Concreto (SSC*) y un *Sistema Semiótico Icónico* (SSI) a través de los cuales los estudiantes pudieron traducir sencillos problemas (*story-problems*) en ecuaciones lineales.[2]

El SSC se compone de objetos materiales:

a) sobres de papel que contienen cada uno el mismo número desconocido de tarjetas de cartón;

b) tarjetas de cartón, y

c) el signo igual.

[2] He aquí un ejemplo sencillo: “Sylvain y Chantal tienen unas tarjetas de hockey. Chantal tiene tres tarjetas y Sylvain tiene dos. Su madre mete algunas tarjetas en tres sobres y se asegura de poner el mismo número de tarjetas en cada uno de ellos. Le da un sobre a Chantal y dos a Sylvain. Ahora los dos niños tienen el mismo número de tarjetas de hockey. ¿Cuántas tarjetas de hockey hay dentro de cada sobre?” (Radford, 2017, p. 18).

10.34019/2594-4673.

Los sobres hacían el papel de incógnitas, mientras que las tarjetas hacían el papel de números concretos (constantes).

El SSI se deriva del SSC: sustituye los objetos concretos por dibujos icónicos {  ,  , =, ↑}. El signo adicional "flecha" sustituye a las *acciones* realizadas en las tarjetas o sobres concretos del SSC durante el proceso de simplificación de ecuaciones. Los estudiantes podrían sustituir la flecha por simples líneas que indiquen que se elimina una tarjeta o un sobre (o grupos de tarjetas o sobres).

La gama de problemas que pueden formularse en lenguaje natural y traducirse al SSC y al SSI es muy limitada, pero es suficiente para facilitar el primer encuentro de los jóvenes estudiantes con el pensamiento algebraico.

La pregunta de investigación que este trabajo pretende abordar es acerca de la identificación de los procesos de producción de significados del profesor y de los estudiantes que sustentan la comprensión de las técnicas algebraicas de aislamiento de la incógnita en las ecuaciones lineales con una incógnita. Siguiendo la metodología de la teoría de la objetivación (Radford, 2021), el análisis de los datos implica una investigación multimodal de la actividad de enseñanza-aprendizaje en la que los estudiantes trabajan en pequeños grupos y participan en discusiones colectivas.

Este proyecto de investigación es de naturaleza longitudinal (ver detalles en Radford, en prensa-1). En segundo grado se empezó a familiarizar a los estudiantes con el procedimiento de aislar la incógnita utilizando el SSC (Radford, 2017). Al inicio de la actividad de enseñanza-aprendizaje que se investiga aquí (que fue la primera actividad de tercer grado sobre ecuaciones), la profesora organizó una discusión general en torno a la ecuación $3 + x = 7$. (Por supuesto, no se utilizó ninguna simbología alfanumérica, en segundo y tercer grado). Los estudiantes discutieron varios procedimientos de resolución: ensayo y error, comparación de términos (más adelante se habla de este método) y el procedimiento de aislar la incógnita. En tercer grado, el procedimiento de aislar la incógnita todavía no era la primera opción que utilizaban espontáneamente los estudiantes.

La profesora tuvo que preguntar, refiriéndose a lo que habían aprendido en segundo grado: "¿Qué queremos decir con aislar? Si les digo que me gustaría aislar el sobre...". " Cyr, uno de los estudiantes, respondió: "¿Significa algo así como ponerlo solo?". Cuando la

10.34019/2594-4673.

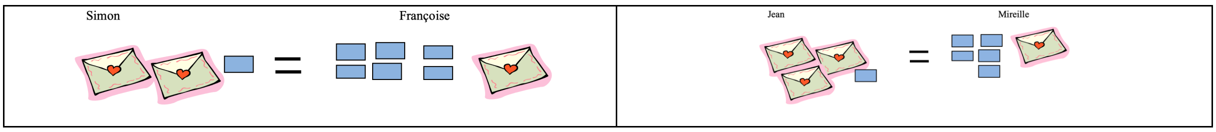
profesora le pidió a Cyr que articulara la idea, éste se dirigió a la pizarra y retiró una tarjeta tras otra de cada lado de la ecuación, mostrando el procedimiento. El procedimiento de aislar la incógnita se *mostró* con acciones en lugar de articularse con palabras. La profesora reformuló las acciones de Cyr: “Si quitas una [tarjeta] de este lado, ¿qué haces?”. Cyr respondió: “Quito otra de allí (el otro lado de la ecuación)”.

El procedimiento de aislar lo desconocido fue un aspecto clave en la sistematización del álgebra llevada a cabo por los matemáticos árabes en los siglos VIII y IX (Al-Khwārizmī y otros; véase Oaks y Alkhateeb, 2007). Implica operaciones con magnitudes o cantidades conocidas y desconocidas para simplificar las ecuaciones. Los matemáticos llamaban a estas operaciones de simplificación *al-gabr* y *al-muqābala,* y es de la primera de ellas de donde toma prestado su nombre nuestro término moderno de álgebra. En el pasaje mencionado arriba, trabajando con Cyr y tematizando las acciones a través del lenguaje, la profesora se esfuerza por que los estudiantes alcancen un nivel de comprensión más profundo de las ideas que sustentan el procedimiento algebraico. En las siguientes secciones, analizo el trabajo de un pequeño grupo, centrado en dos ecuaciones de tipo $ax + b = cx + d$.

La ecuación $\mathbf{2x + 1 = x + 6}$ en el SSC y el SSI

Las dos ecuaciones se presentaron a los estudiantes en el SSI, en la hoja de la tarea que incluía los problemas por resolver. Son traducciones de una historia en la que dos niños tienen cartas y sobres. Cada sobre tiene el mismo número desconocido de tarjetas, y ambos niños tienen en total el mismo número de tarjetas (véase la nota de pie de página 1). El ejercicio de traducir historias de este tipo al SSI se realizó en segundo grado y continuó en tercer grado. En esta sección se presenta el trabajo de un grupo de tres estudiantes en torno a la ecuación $2x + 1 = x + 6$ (Figura 1.1) y en la siguiente sección se presenta el trabajo de ese grupo en torno a la ecuación $3x + 1 = 5 + x$ (figura 1.2).

Figura 1. Las ecuaciones $ax + b = cx + d$ presentadas a los estudiantes en el SSI

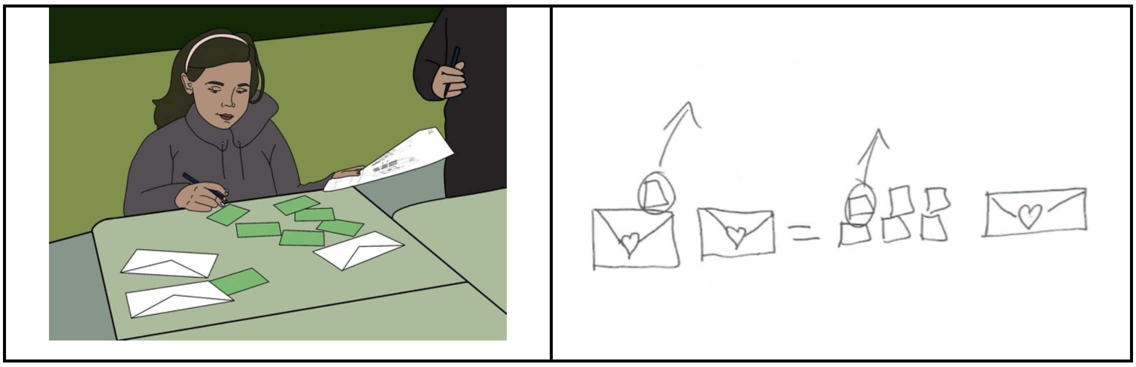


Utilizando un kit de sobres y tarjetas, se pidió a los estudiantes de la clase que hicieran una ecuación y la resolvieran, y que luego dibujaran su procedimiento. La idea era, por tanto, que los estudiantes resolvieran la ecuación primero en el SSC y luego con el SSI.

10.34019/2594-4673.

En el grupo de tres estudiantes que serán el foco de atención en el resto de este artículo (Elsa, Cora y Mia), los estudiantes formaron la ecuación en el SSC (Figura 2.1). A continuación, dibujaron la ecuación en el SSI. Elsa dice: "Hay que quitar eso (*rodeó la tarjeta del lado izquierdo de la ecuación*) para que sólo haya sobres, ¿se recuerdan? (*Luego quita una tarjeta del otro lado)* 1, 1". *(Figura 2.2)*. La respuesta se encuentra por el *método de la comparación* (es decir, los estudiantes comparan lo igual con lo igual y asocian las partes restantes de la ecuación: en este caso, un sobre del lado izquierdo es igual al sobre de la derecha; por lo tanto, el otro sobre es igual a las cinco tarjetas restantes).

Figura 2. Resolución de la ecuación $2x + 1 = 6 + x$ en el SSC y el SSI



La profesora llega y pide a los estudiantes que expliquen su procedimiento. Los estudiantes vuelven a construir la ecuación en el SSC. Retiran una tarjeta de cada lado de la ecuación. La profesora dice: "¡Están usando el proceso de aislamiento! . . . ¿Cuántos sobres quieres en un lado?". Desconcertados por la pregunta, los estudiantes se miran entre sí. Hace un momento, Elsa mencionó la idea de tener sobres en un lado. La intervención de la profesora lleva la conversación más allá. Por un lado, la profesora reconoce que los estudiantes están en el proceso de aislar la incógnita. Por otro lado, plantea una pregunta que trata de algo que no ha sido considerado por los estudiantes. Es este aspecto no considerado de la simplificación de la ecuación – una operación matemática que lleva de $2x = x + 5$ a x igual a algo – lo que desconcierta a los estudiantes.

1 Profesora: Quieres saber cuántas cartas hay en UN sobre (*señala el sobre varias veces cuando dice UN*). . . En primer lugar, has hecho esto (*elimina una carta de cada lado*) has quitado una carta. . . Bien, ¿qué pasa ahora? Hay 2 sobres (*señala los sobres de un*

10.34019/2594-4673.

lado de la ecuación), luego (*señala los objetos del otro lado de la ecuación*) 1 sobre y 5 cartas.

2 Cora: Hemos contado todas estas (*señala las tarjetas*). Son 5. Por lo tanto, esto (*señala uno de los sobres*) también debería tener 5 (*véase la figura 3.1*; de izquierda a derecha: la profesora, Mia, Cora y Elsa).

3 Profesora: ¿Cómo lo sabes?

4 Elsa: Vamos a quitar (*elimina 1 sobre del lado izquierdo; véase la figura 3.2*).

5 Profesora: ¿Estás quitando 1 sobre?

6 Elsa y Cora: Sí. (*Elsa también quita un sobre del otro lado; Figura 3.3*).

7 Profesora: ¿Por qué decidiste hacer eso?

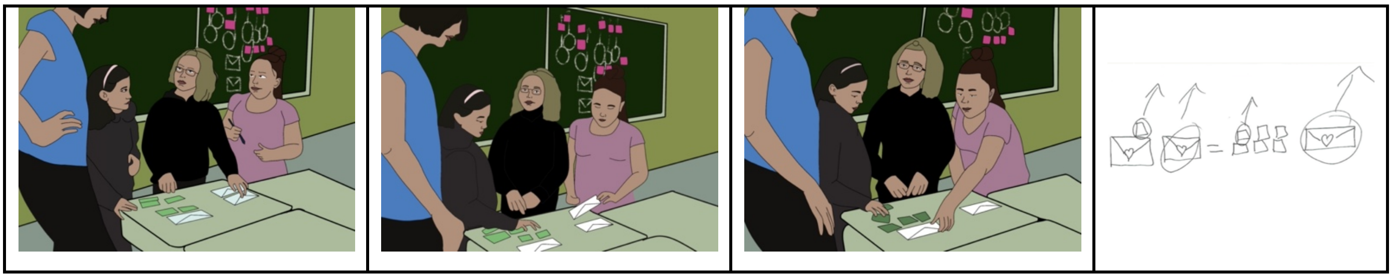
8 Cora: ¡Porque esto (*los lados de la ecuación*) deben ser iguales!

9 Elsa: porque hay que quitar; porque sólo debe quedar 1 sobre (*coge el sobre que queda*).

10 Profesora: ¿Está bien quitar 1 sobre y luego 1 sobre? ¿Sigue siendo igual tu ecuación?

11 Cora: ¡Sí!

Figura 3. Los estudiantes y la profesora discutiendo la ecuación $2x + 1 = x + 6$



En la línea 1, la profesora comienza a simplificar la ecuación como lo hicieron los estudiantes. Dice: "En primer lugar, has hecho esto" y retira una tarjeta de cada lado. A continuación, con un tono alentador, pregunta: "¿Qué pasa ahora?". En la línea 2, Cora recurre al *método de comparación*, pero la articulación verbal de las ideas deja sin explicar importantes relaciones. Estas son las relaciones que la profesora pide en la línea 3. En la línea 4, Elsa empieza a quitar un sobre de cada lado. La profesora quiere asegurarse de que los estudiantes entienden la idea que hay detrás de la operación de "quitar" (en francés, la lengua que se usa en esta escuela, "enlever"). Por eso, en la línea 7 pide que se expliquen las razones. En las líneas 8 y 9 los estudiantes ofrecen dos respuestas. La de Cora se centra en la conservación de la igualdad entre ambos lados de la ecuación; la de Elsa se centra en la idea de acabar con un sobre. En la línea 10, la profesora quiere volver a asegurarse de que hay una comprensión clara de las acciones que se llevan a cabo la simplificación de la ecuación. Cuando la profesora se va, los estudiantes vuelven a la ecuación en el SSI y quitan un sobre de cada lado (Figura 3.4). Hasta ahora, el procedimiento de aislar la incógnita ha requerido la aplicación de una operación clave: *eliminar* cosas iguales de ambos lados de la ecuación. En la siguiente ecuación se requiere una operación matemática adicional. Pasemos a la investigación de esta ecuación por parte de los estudiantes.

La ecuación $\mathbf{3x + 1 = 5 + x}$ en el SSC y el SSI

Los estudiantes abordan la ecuación $3x + 1 = 5 + x$. Construyen la ecuación en el SSC y, en lugar de resolverla con la ayuda de materiales concretos, dibujan la ecuación.

Cora empieza por quitar un sobre de cada lado. A continuación, quita una carta de cada lado (Figura 4.1).

12 Elsa: Sólo quitaste 1, pero debe quedar sólo 1 sobre. Esto es un problema. (*Piensan un rato; luego Elsa continúa*). Cuatro [cartas], pero no hay otro sobre aquí (*señala el lado derecho de la ecuación*).

13 Cora: Quedan 4 cartas, son 4, hay que quitar estas cartas (*rodea las 4 cartas que quedan en el lado derecho de la ecuación*) . . . Y aquí (señala *uno de los sobres que quedan en el lado izquierdo de la ecuación)* hay 0 [cartas].

14 Elsa: Sí, pero ¡mira! Si hay 0 [cartas] en el sobre, éste (*señalando el sobre de la derecha de la ecuación*) será 4 y éste (*señalando un sobre de la izquierda*) será 1 [quizás quiso decir 0]. Pero los 2 [sobres] deben tener el mismo exacto (*señala el dibujo)*, los 2 [sobres] deben tener el mismo número [de cartas].

15 Cora: (*Explicando la idea de nuevo*) Quitamos eso (*las 4 cartas*).

16 Elsa: Entonces, hay 0, pero debe haber algunas tarjetas [en el sobre].

17 Cora: ¿Por qué?

18 Elsa: Aquí tienes que quitar esto, aquí quitas esto (*señala con su bolígrafo su dibujo*) y no puedes quitar eso [las 4 cartas del lado derecho], porque no hay otras 4 [cartas] aquí [en el lado izquierdo] que puedas quitar. . .

Aquí, los estudiantes se encuentran en una nueva situación. Mientras que en el problema anterior, quitar el mismo número de tarjetas y sobres era suficiente para aislar la incógnita, en este problema la operación de "quitar" no es suficiente. Acaban teniendo dos sobres en el lado izquierdo de la ecuación y cuatro cartas en el lado derecho. No pueden seguir quitando sobres porque, como señala Elsa en la línea 12, no hay más sobres que quitar en el lado derecho. Y “eso es un problema”. Cora sugiere eliminar las cuatro cartas del lado izquierdo, lo que les llevará a tener cero cartas. Entonces asigna cero cartas a uno de los dos sobres del lado izquierdo, lo que significa que hay cuatro cartas en el otro sobre. Elsa señala dos problemas con la sugerencia de Cora. En primer lugar, argumenta que todos los sobres deben tener el mismo número de cartas (línea 14). En segundo lugar, la simplificación implica eliminar las mismas cosas *en ambos lados* de la ecuación (línea 18). Este requisito o condición no se cumple.

Los estudiantes llegan a un callejón sin salida. “On est en train de se chicaner pour la réponse” [“Estamos teniendo un altercado por la respuesta”]. Intentan llamar a la profesora, pero está ocupada discutiendo con otro grupo. Yo estaba grabando a este grupo; me quité los auriculares y fui a hablar con los estudiantes. Les sugerí que utilizaran el material concreto (sobres y tarjetas). Los estudiantes volvieron a construir la ecuación y procedieron a quitar una tarjeta y un sobre de cada lado.

19 Elsa: Todavía quedan 2 sobres (*ver Figura 4.2*).

20 Mia: Entonces, hay 2 (*señalando 2 cartas)* aquí (*señalando 1 de los sobres*) y 2 (*señalando las 2 cartas restantes*) aquí (*señalando el otro sobre; ver Figura 4.3*).

21 Cora: ¡Debe haber un sobre!

22 Elsa: (*Retira 1 sobre y mueve las cartas al otro lado de la ecuación; véase la figura 4.4*)

Figura 4. Discutiendo la solución de $3x + 1 = 5 + x$ en el SSC

En la línea 20, Mia sugiere una idea. Sin embargo, la idea no es tomada en consideración por los demás estudiantes. Quizá porque la idea no se enmarca en el tipo de acciones que los estudiantes reconocen como legítimas para resolver la ecuación. Sin embargo, vemos en la figura 4.4 que Elsa, desesperada, retira un sobre y transfiere las tarjetas al otro lado de la

doi 10.34019/2594-4673.

ecuación, colocándolas debajo del sobre, rompiendo dos veces la regla de “hacer lo mismo en ambos lados”. Al no encontrar una forma convincente de proceder, Elsa (al igual que Cora en la línea 13) se sale de los límites de lo algebraicamente pensable que han establecido hasta ahora. La situación vuelve a ser muy tensa, como vimos en la línea 18. Elsa dice que siguen discutiendo y se ríe. Cora dice: “De acuerdo, lo haremos de nuevo”. Quitan una carta y un sobre de cada lado de la ecuación.

23 Elsa: Hay 4 [cartas]. Sólo nos debe quedar 1 sobre. Por lo tanto, debemos quitar 1 [sobre]; no tenemos elección (*quita el sobre*).

24 Cora: Sí, pero si quitamos 1... debemos quitar algo más (señala el *otro lado de la ecuación*).

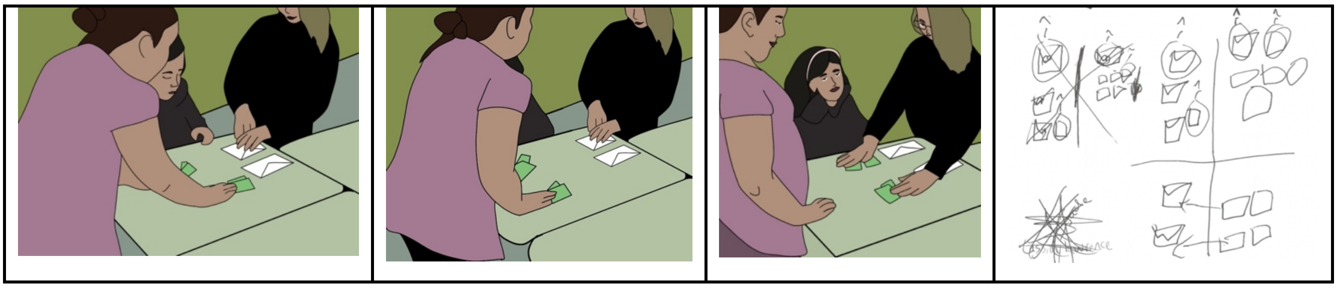
Discuten un rato y vuelven a la ecuación simplificada ($2x = 4$). Después de mirar atentamente las 4 tarjetas y los 2 sobres, Elsa dice que tiene una idea:

25 Elsa: Espera, espera. Esta es mi idea. Porque tenemos 2 [cartas] aquí (*con cada mano, coge 2 cartas del manojo de 4 cartas; luego, mueve lentamente las 2 manos que sostienen 2 cartas cada una y las pone delante de cada uno de los sobres; véase la figura 5.1. Cuando las cartas llegan a su destino, dice*) 2 en cada sobre.

Inmediatamente comienza de nuevo la explicación: desliza los 4 sobres como antes, en un lado de la ecuación. Dice:

26 Elsa: Separa esto [las 4 cartas] en 2 (*mientras dice esto, separa los sobres; véase la figura 5.2. Luego las desliza delante de cada sobre*); hay 2 en cada sobre.

Figura 5. Encontrar (de nuevo) cómo resolver la ecuación $2x = 4$



A la demostración de Elsa le sigue la reacción de Mia:

27 Mia: Esto es lo que dije antes, pero tú, tú estabas . . .

28 Elsa: (*completando la frase de Mia*) ... ¡altercado!

29 Mia: . ...dijiste, no, no...

doi 10.34019/2594-4673.

30 Elsa: ¡Lo siento, Mia!

Cora vuelve a hacer la ecuación y repasa los pasos para aislar la incógnita. Cuando llega a la ecuación $2x = 4$ dice:

31 Cora: Vamos a separar... (*y desliza las 2 tarjetas hacia un sobre y las 2 tarjetas hacia el otro sobre; véase la figura 5.3*).

Mia tiene razón al argumentar que sugirió mucho antes (línea 20, figura 4.3) que cada sobre tiene dos tarjetas. Sin embargo, su sugerencia no se articuló en términos de separación de tarjetas. En el caso de Elsa, la solución aparece primero de forma encarnada: "Espera, espera. Esta es mi idea. Porque tenemos 2 [tarjetas] aquí . . . 2 en cada sobre". Las pocas palabras pronunciadas van acompañadas de un complejo conjunto de acciones de agarre de objetos y deslizamiento que quedan sin calificarse lingüísticamente. La articulación lingüística aparece cuando vuelve a iniciar el proceso de resolución del problema. Dice: "Separa esto [las 4 cartas] en 2; hay 2 en cada sobre".

Aunque la importancia de la dimensión cinestésica que acompañaba al procedimiento de resolución del problema no desaparece, la articulación temática en el lenguaje es mucho más sofisticada. La nueva operación matemática se llama "separar". Esta nueva operación es precursora de lo que más tarde se conocerá como la operación algebraica de la división. Los matemáticos árabes tenían un término para esta idea de separar: *al-radd*, que quiere decir la disminución del coeficiente de la incógnita a 1.

En investigaciones anteriores hemos encontrado que en el momento preciso de aprender algo, los estudiantes sufren un proceso en el que el pensamiento matemático se reorganiza; lo que antes requería muchas palabras y acciones se reorganiza y se contrae: los estudiantes filtran lo necesario de lo innecesario y su actividad semiótica se contrae. Hay una contracción *semiótica* (Radford, 2021). Aquí vemos el proceso contrario: en la línea 26 Elsa añade acciones y palabras para significar la operación emergente. Hay una *expansión semiótica* que le permite a ella y a sus compañeros notar mejor la operación y dotarla de significado.

Los estudiantes siguieron resolviendo con sus manos la ecuación en el SSC varias veces. Parece que, para comprender, no les bastaba con ver y que era necesario sentir con las manos y el cuerpo. Luego, dibujaron su solución en el SSI. La nueva operación requiere un signo para ser expresada. La figura 5.4 muestra que los estudiantes eligieron una flecha, que recuerda la

10.34019/2594-4673.

acción de deslizar que hace que las dos tarjetas se correspondan con cada sobre. El signo es un icono de la acción.

OBSERVACIONES FINALES

Este artículo abordó el tema de las ecuaciones en el álgebra temprana. Se ha centrado en el modo en que los estudiantes de tercer grado encuentran algunas de las ideas algebraicas clave que sustentan la simplificación de las ecuaciones. En la primera parte, se sugirió que la caracterización del álgebra (a) como cálculo con letras o (b) como centrada en operaciones estructurales con números más que en sus resultados son ambas insatisfactorias. En el primer caso, la caracterización se queda corta al limitar el alcance del álgebra en sus formas posibles de denotación semiótica; en el segundo caso falla al restar importancia a las complejidades del pensamiento aritmético (que se reduce a cálculos triviales). Basado en consideraciones histórico-epistemológicas (Radford, 1995; 2001), se ha sugerido en este artículo una concepción del álgebra que subraya la autenticidad de denotar magnitudes o cantidades desconocidas de diversas maneras y que enfatiza la naturaleza analítica-deductiva que subyace a las indagaciones algebraicas. Si se sabe que las ecuaciones de segundo grado tienen como máximo dos soluciones, no es porque las soluciones se han adivinado, sino porque se han *deducido*.

Partiendo de estas premisas, la actividad de enseñanza-aprendizaje del tercer grado se organizó didácticamente en torno al uso de dos sistemas semióticos diseñados para el efecto: el SSC y el SSI. Los fragmentos analizados aquí comenzaron con una discusión general en el aula en torno a diferentes métodos para resolver la ecuación $3 + x = 7$. De acuerdo con la definición de álgebra sugerida en la primera sección de este trabajo, la solución de ecuaciones $ax + b = c$ no incluye la operación de la incógnita. En consecuencia, al resolver esas ecuaciones los estudiantes no han entrado todavía en el terreno del álgebra (Filloy y Rojano, 1987).

Sin embargo, la investigación de la ecuación $3 + x = 7$ proporcionó a los estudiantes la oportunidad de seguir familiarizándose con el procedimiento de aislar la incógnita que encontraron en el segundo grado. En este sentido, la ecuación $3 + x = 7$ se concibió más bien como un paso propedéutico para abordar ecuaciones del tipo $ax + b = cx + d$

10.34019/2594-4673.

algebraicamente, algo que los estudiantes hicieron en la segunda parte de la actividad de enseñanza-aprendizaje.

Podemos ver en las figuras 3.2 y 3.3 el momento en el que Elsa aplica la operación de *al-muquabāla* o eliminación que se aplicó previamente a las constantes en la resolución de la ecuación $3 + x = 7$ a la ecuación $2x + 1 = x + 6$. La operación de "quitar" adquiere ahora un significado nuevo y más desarrollado. Requiere ver la incógnita y la ecuación bajo una nueva luz. Es este nuevo aspecto de la actividad matemática el que lleva a la profesora, en la línea 10, a plantear dos preguntas fundamentales: "¿Está bien quitar 1 sobre y luego 1 sobre? ¿Sigue siendo igual la ecuación?".

En términos más generales, la actividad de enseñanza y aprendizaje basada en el SSC y el SSI dio cabida a procesos de creación de significado a partir de los cuales los estudiantes de tercer grado generaron, en su trabajo con la profesora, dos importantes ideas algebraicas que sustentan la simplificación de ecuaciones: "quitar" (eliminar términos iguales de ambos lados de la ecuación) y "separar" (es decir, reducir el coeficiente de la incógnita a 1), esas ideas operativas que los matemáticos árabes denominaban *al-gabr* / *al-muqābala y al-radd,* respectivamente (Oaks y Alkhateeb, 2007).

El surgimiento de estas operaciones sensuales y encarnadas sirvió como bloques fundacionales para el encuentro de los estudiantes con el simbolismo alfanumérico algebraico, que ocurrió un año después, cuando estaban en el cuarto grado de la escuela primaria.

RECONOCIMIENTOS

Este artículo es una traducción de (Radford, en prensa-2). Es resultado de un programa de investigación subvencionado por el Consejo de Investigación de Ciencias Sociales y Humanidades de Canadá / Le conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH).

REFERENCIAS

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(2), 181 - 202. https://doi.org/DOI 10.1007/s10649-016-9745-0

Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early algebraization*. Springer. Doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Kieran, C. (2018). *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. Springer. doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_6-5

Kilhamn, C., & Säljö, R. (2019). *Encountering algebra*. Springer. doi.org/10.1007/978-3-030-17577-1

Oaks, J., & Alkhateeb, H. (2007). Simplifying equations in Arabic algebra. *Historia Mathematica*, *34*, 45-61. https://doi.org/10.1016/j.hm.2006.02.006

Radford, L. (1995). Before the other unknowns were invented: Didactic inquiries on the methods and problems of mediaeval Italian algebra. *For the Learning of Mathematics*, *15*(3), 28-38.

Radford, L. (2001). The historical origins of algebraic thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 13-63). Kluwer.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Radford, L. (2017). La fenomenología del significado. En Costa dos Santos, M. J., & F. Vieira Alves (Eds.), *Docêncai, cognição e aprendizagem: Contextos diversos* (pp. 15-29). Editora CRV. http://luisradford.ca/publications/

Radford, L. (2021). *Teoria da objetivação: uma perspectiva Vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática*. (Tradução de B. Morey e S. Gobara). Livraria da Física.

Radford, L. (en prensa-1). Introducing equations in early algebra. *ZDM – Mathematics Education.*

Radford, L. (en prensa-2). Early algebra: Simplifying equations. In *Proceedings of CERME 2022*. CERME.

HISTÓRICO

Submetido: 15 de setembro de 2022.

Aprovado: 10 de novembro de 2022.

Publicado: 09 de dezembro de 2022.