RIDEMA
Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática

Uma sequência didática para o ensino de limite e continuidade

A didactic sequence for teaching limit and continuity

Francisco Eteval da Silva Feitosa[1]
Universidade Federal do Amazonas

Roberta dos Santos Rodrigues[2]
Universidade Federal do Amazonas

RESUMO

O presente artigo trata da análise de uma sequência didática visando o ensino de limite e continuidade de funções de uma variável real a valores reais. A sequência foi realizada por meio remoto com a participação de 20 discentes do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade pública do Amazonas. Para a elaboração de tal sequência foi utilizada a definição de sequência didática proposta por Zabala (1998). Os dados foram coletados a partir de observações, questionários online, filmagens e registro de interações. Considerando a participação e o desempenho dos discentes e as dificuldades intrínsecas do ensino remoto, especialmente de conceitos não elementares do Cálculo, podemos concluir que a sequência didática proposta neste estudo mostrou indícios de que pode contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem de limite e continuidade de funções. Como perspectiva de estudos futuros, vislumbramos a análise da aplicação desta sequência didática no ensino presencial.
Palavras-chave: Educação Matemática; Limite; Continuidade; Cálculo; Sequência Didática.

ABSTRACT

This article deals with the analysis of a didactic sequence designed to teach limit and continuity of functions from a real variable to real values. The sequence was carried out remotely with the participation of 20 students of the Mathematics Degree course at a public university in Amazonas. For the elaboration of such sequence, the definition of didactic sequence proposed by Zabala (1998) was used. Data were collected from observations, online questionnaires, filming and recording of interactions. Considering the participation and performance of students and the intrinsic difficulties of remote teaching, especially of non-elementary concepts of Calculus, we can conclude that the didactic sequence proposed in this study showed evidence that it can contribute to the teaching and learning process of limit and continuity of functions. As a perspective for future studies, we envision the analysis of the application of this didactic sequence in classroom teaching.
Keywords: Mathematics Education; Limit; Continuity; Calculation; Didactic sequence.

[1] Doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Professor Adjunto do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Amazonas (UFAM), Manaus, Amazonas, Brasil. Endereço para correspondência: Av. das Oliveiras, 9, Novo Israel, Manaus, Amazonas, Brasil, CEP: 69039-205. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0913-3427. Lattes: http://lattes.cnpq.br/1820343517767978. E-mail:sfeitosa@ufam.edu.br.

[2] Licencianda em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Endereço para correspondência: Av. Genebra, 4, Quadra 25, Campos Eliseos, Manaus, Amazonas, Brasil, CEP: 69045-380. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9903-7644. Lattes: http://lattes.cnpq.br/8331834229348772. E-mail: roberta10rodrigues@gmail.com .

INTRODUÇÃO

As dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral há tempos é fonte de estudos. Um sistema didático constituído por práticas de ensino e de estudo tradicional (BARBOSA, 2004) e a falta de articulação entre as noções de derivada, integral e continuidade (ANACLETO, 2007) são apenas dois exemplos de trabalhos nessa direção. A busca de soluções para esse quadro perpassa por medidas como o uso de bons livros, oferta de cursos de Matemática Básica e o redirecionamento da disciplina de seu aspecto teórico-formalista para uma abordagem mais aplicada, e, mesmo assim, a reprovação ainda se constitui como um problema crônico, uma verdadeira tradição (DE OLIVEIRA, 2012).

Frente a esse contexto, corroboramos com Robert e Speer (2001) no sentido de que, para enxergarmos sinais de evolução efetiva no processo de ensino e de aprendizagem de Cálculo, se faz necessário tratarmos, de forma significativa, com as questões teóricas e pragmáticas simultaneamente. Nesse sentido, trazemos neste estudo o conceito de Sequência Didática (ZABALA, 1998) na realidade do ensino remoto emergencial de Cálculo.

Assim, pelo exposto, e a partir do contexto das aulas remotas, balizamos o presente estudo na seguinte questão: Que tipos de sequências didáticas, realizadas por meio remoto, podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de limite e continuidade de funções de uma variável real a valores reais?

Dessa forma, este artigo discute resultados da aplicação, com discentes de um curso de Licenciatura em Matemática, de uma sequência didática (ZABALA, 1998) visando o ensino de limite e continuidade de funções de uma variável real a valores reais desenvolvida no primeiro semestre de 2021, por meio remoto, no âmbito da disciplina de Cálculo I.

CONSIDERAÇÕES SOBRE A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Para Zabala (1998), toda prática pedagógica requer uma organização metodológica antes de sua execução. Assim, o termo "Sequência Didática" (SD) é definido como sendo "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos" (ZABALA, 1998, p. 18). Esse pesquisador aponta alguns critérios para a construção, desenvolvimento e avaliação de uma SD, considerando três fases da intervenção reflexiva, descritas como: planejamento, aplicação e avaliação, sendo o objetivo principal dessa metodologia de ensino:

> [...] introduzir nas diferentes formas de intervenção aquelas atividades que possibilitem uma melhora de nossa atuação nas aulas, como resultado de um conhecimento mais profundo das variáveis que intervêm e do papel que cada uma delas tem no processo de aprendizagem dos meninos e meninas. (ZABALA, 1998, p.54).

Portanto, em uma SD é de fundamental importância a inter-relação dos conteúdos e a conexão dos conhecimentos fragmentados de forma mais harmoniosa de modo que "integrem conteúdos teoricamente isolados ou específicos para incrementar seu valor formativo" (ZABALA, 1998, p. 139).

Para Oliveira (2013, p. 39), uma SD é definida como uma metodologia simples que envolve um conjunto de atividades interligadas e que "[...] prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade para trabalhar os conteúdos disciplinares de forma mais integrada para uma melhor dinâmica no processo ensino/aprendizagem".

A partir do exposto, na elaboração da SD deste estudo, levamos em consideração os passos básicos estabelecidos por Oliveira (2013), que são: a escolha do tema, questionamentos para problematização do tema a ser desenvolvido, planejamento dos conteúdos, objetivos a serem alcançados no processo de ensino e aprendizagem, determinação da sequência de atividades, considerando ainda a divisão de grupos, o cronograma, o material didático, a integração entre cada atividade e a avaliação dos resultados.

PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Esta pesquisa se utiliza da abordagem qualitativa que, segundo Creswell (2010, p. 26), "é um meio para explorar e para entender o significado que os indivíduos ou os grupos atribuem a um problema social ou humano". Quanto aos objetivos, trata-se de uma pesquisa descritiva que, "tem como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno ou o estabelecimento de relações entre variáveis" (GIL, 2008, p. 28). Quanto aos

doi 10.34019/2594-4673.

procedimentos, podemos classificar este estudo como uma pesquisa-ação, que, segundo a definição de Thiollent (1985, p. 14):

> É um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos do modo cooperativo ou participativo.

A SD foi desenvolvida na Universidade Federal do Amazonas (UFAM) com 20 discentes da disciplina de Cálculo I que foram convidados a participarem da pesquisa em questão e informados dos objetivos do trabalho. Todos os discentes que cursaram a disciplina concordaram em participar e assinaram um termo de consentimento livre esclarecido.

O Quadro 1 (ver Anexo) evidencia as técnicas de coleta de dados, os instrumentos e os dados produzidos nesta pesquisa. Foram realizados 8 encontros síncronos e 1 assíncrono no período de 12/04/2021 a 31/04/2021, cada um correspondendo a uma etapa da SD. O Quadro 2 (ver Anexo) apresenta os conteúdos abordados em cada etapa e seus respectivos objetivos de ensino. Os encontros síncronos tiveram duração de 2h.

Foram usados como recursos o *Google Meet*, os programas Excel e PowerPoint, o software de geometria dinâmica GeoGebra, o aplicativo *WhatsApp* e aplicativos que permitem escanear documentos em PDF diretamente do celular. O professor fez uso de uma mesa digitalizadora. Os sujeitos do estudo foram 1 pesquisador na função de professor da disciplina, 1 pesquisadora na função de tutora, 3 discentes na função de monitores e 20 discentes divididos em grupos.

Concepção das situações que compõem a SD

Assumiremos que uma situação-problema envolve “a escolha de questões abertas e/ou fechadas numa situação matematizada ou menos matematizada, vinculada a um campo de problemas colocados em um ou vários domínios de saber.” (ALMOULOUD, 2007, p. 174).

A **Etapa 1** é composta por 3 situações-problema e usamos como metodologia de ensino as diferentes fases da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (2002), a saber: situação de ação, situação de formulação, situação de validação e situação de institucionalização. Assim, na elaboração das três situações usadas nesta etapa, realizamos uma

doi 10.34019/2594-4673.

ação descritiva e preditiva, no sentido de estabelecermos os possíveis comportamentos e resoluções dos alunos, de acordo com cada fase da TSD.

Situação-problema 1 – O gerente de uma empresa determina que t meses após começar a fabricação de um novo produto o número de unidades fabricadas deve ser P milhares onde $P(t) = \frac{6t^2+5t}{(t+1)^2}$. O que acontece com a produção a longo prazo, ou seja, para valores de t “muito grandes”?

Situação-problema 2 – Para estudar o aprendizado em animais, um estudante de psicologia realizou um experimento em que um rato teve que atravessar várias vezes o mesmo labirinto. Suponha que o tempo (em minutos) que o rato levou para atravessar o labirinto seja dado pela função $T(n) = \frac{7n+5}{n}$, em que n é a enésima tentativa do rato (por exemplo, para 1ª tentativa, $n = 1$, para 3ª tentativa, $n = 3$, e assim por diante). O que acontece com este tempo quando o número de tentativas aumenta indefinidamente?

Nas situações-problema 1 e 2, ao questionarmos o que acontece com a função $P(t) = \frac{6t^2+5t}{(t+1)^2}$ para valores de t “muito grandes” e o que acontece com a função $T(n) = \frac{7n+5}{n}$ quando o número de tentativas aumenta indefinidamente, estimulamos os discentes a ensaiar suas primeiras observações de forma intuitiva e experimental acerca do limite de uma função. Na fase de ação das situações 1 e 2 os discentes devem identificar as variáveis envolvidas e a questão de cada situação. O Quadro 3 (ver Anexo) apresenta um resumo do que se espera dos discentes.

Na formulação é esperado que os discentes tomem como estratégia atribuir valores cada vez maiores para as variáveis independentes. Na validação, os discentes devem executar seu plano, fazendo uso de calculadoras ou algum outro recurso que permita fazer cálculos de modo rápido e a partir disso formular conjecturas intuitivas, apoiadas e mobilizadas na busca de responder à questão de cada situação proposta. A institucionalização é realizada através uso da planilha Excel para obter as Tabelas 1 e 2 (ver Anexo), a partir das quais se pode perceber que, na situação 1, para valores de t “muito grandes”, a produção a longo prazo se aproxima de 6 milhões e, na situação 2, quando o número de tentativas aumenta indefinidamente, o tempo que o rato leva para atravessar o labirinto se aproxima de 7 minutos.

10.34019/2594-4673.

Situação-problema 3 – Analise o comportamento das funções dadas para valores de x próximos do ponto a, em cada um dos casos abaixo. Use a planilha Excel para fazer essa análise. Em seguida, usando o software GeoGebra faça o gráfico de cada uma das funções e analise seu comportamento para valores de x próximos do ponto a. Sua análise a partir do gráfico das funções corresponde a análise feita usando a planilha Excel?

(a) $f(x) = x^2 - x + 2, a = 2;$ (b) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}, a = 2;$ (c) $f(x) = \frac{2senx}{x}, a = 0$

Na situação de ação da situação-problema 3 os discentes devem primeiro compreender o significado da expressão “comportamento das funções dadas para valores de x próximos do ponto a”. Na situação de formulação é esperada que os discentes sigam as orientações dadas no próprio enunciado. Por exemplo, para a função dada no item (a), usar a planilha Excel e obter a Tabela 3 (ver Anexo) e o software GeoGebra para obter o gráfico da Figura 1 (ver Anexo). Na situação de validação os discentes devem compartilhar sua tela enquanto os demais discentes acompanham e realizam a validação em seu caderno. Importante observar que nesta atividade foi exigido do discente que realize duas conversões, uma do registro algébrico para o numérico e outra do registro algébrico para gráfico. A institucionalização se dá pelo diálogo entre discentes e professor para consolidar o novo conhecimento.

Na **Etapa 2** fazemos uso do Quadro 4 (ver Anexo) e questionamos os discentes sobre limites envolvendo esses gráficos. O modo de execução é o seguinte: o professor apresenta um gráfico por vez e pergunta sobre o comportamento do gráfico quando x tende a certo valor p, por valores menores ou por valores maiores do que p, e ao final da atividade os discentes devem enviar um print de sua folha de respostas para o professor por meio do *WhatsApp*.

Nas etapas anteriores foram empregados gráficos e tabelas para fazer conjecturas sobre o valor de limites. Mas esses métodos nem sempre levam a respostas corretas. Dessa forma, na Etapa 3 da SD são apresentadas as propriedades dos limites que permitem calculá-los de forma prática, o teorema do confronto que é bastante útil na determinação dos limites de algumas funções limitadas e o conceito de vizinhança de um ponto. Em um primeiro momento, esta etapa é conduzida pelos monitores que trabalharão com os discentes uma lista de exercícios visando fixar as principais técnicas para o cálculo de limites. Embora nosso foco seja a compreensão conceitual do limite de uma função, sabemos da importância de se conhecer métodos práticos para se calcular limites. Em seguida são apresentadas as propriedades da

10.34019/2594-4673.

soma, da multiplicação por uma constante, do produto e do quociente de funções. Estas propriedades serão aplicadas na resolução de situações matemáticas envolvendo funções em suas representações algébrica e gráfica. O teorema do confronto é apresentado e aplicado em situações matemáticas.

Antes de formalizarmos o conceito de limite usando ε e δ, é necessário que o discente compreenda o significado da solução de inequações do tipo $|x-a|<b$ e a noção de vizinhança de um ponto. As situações 1 e 2 desta etapa visam a favorecer essa compreensão. O Quadro 5 (ver Anexo) apresenta as situações matemáticas propostas que os discentes devem resolver e enviar pelo *WhatsApp*. Como forma de complementariedade, um Formulário Google (Quadro 6 - Anexo) foi pensado com o objetivo de verificar se os discentes conseguiram fixar as representações de uma vizinhança.

Nas etapas anteriores, durante a apropriação da noção intuitiva do conceito de limite de uma função, por parte dos discentes, foram usadas as frases "x está próximo de 2" ou "$f(x)$ se aproxima de 3". Porém, essas são expressões vagas e que não nos permite demonstrar conclusivamente que, por exemplo, $\lim_{x\to 0} \frac{sen x}{x} = 1$. Desse modo, a **Etapa 4** aborda o conceito de ponto de acumulação buscando dar sentido às expressões citadas no parágrafo anterior para então adentrar na definição formal de limite. Um vídeo explicando e exemplificando o conceito de ponto de acumulação foi gravado e enviado pelo Google Sala de Aula para os discentes assistirem em casa antes da aula. A ideia é que o aluno tivesse contato com o conteúdo através do meio virtual de forma assíncrona e ao chegar ao encontro síncrono ele já esteja ciente do assunto a ser desenvolvido e, dessa forma, o momento da aula se torne um local de maior interação professor-aluno, visando sanar dúvidas e questionamentos.

Na **Etapa 5** é apresentada a definição formal de limite de uma função. Fez-se uso do GeoGebra para fornecer uma visualização geométrica dos significados dos ε e δ presentes na definição de limite. Evidente que um curso introdutório de Cálculo não pode ser exigido do discente a completa compreensão dessa definição nem tão pouco calcular limites como $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$ usando a definição. Isso exige habilidades e maturidade acadêmica que discentes iniciantes não possuem. Entretanto, pensamos ser importante determinar limites de algumas funções por meio da definição, pois isso contribui para uma melhor compreensão desta

10.34019/2594-4673.

definição. Desse modo, foram propostas as situações-problema 1 e 2 nesta etapa da SD (Quadro 7 em anexo). Na situação 1 o δ da definição de limite é obtido a partir de uma análise gráfica enquanto na situação 2 é obtido algebricamente.

A **Etapa 6** visa fazer com que os discentes compreendam o conceito de função contínua. A forma como esse conceito é apresentado em alguns livros didáticos pode causar dificuldade na aprendizagem desse conceito, tendo origem no que Brousseau chama de obstáculo de ordem didática, visto que o livro didático depende apenas da escolha realizada pelo professor. O uso de expressões como “o gráfico pode ser desenhado sem remover sua caneta do papel” ou “o gráfico tem um buraco” (STEWART, 2016, p.109) causam conflito nos discentes quando eles se deparam, por exemplo, com funções discretas, que são contínuas em todos os seus pontos, mas seu gráfico não pode ser desenhado sem remover sua caneta do papel e nem faz sentido calcular $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ para uma função discreta, visto que todos os seus pontos são isolados.

Desse modo, propomos a atividade descrita no Quadro 8 (ver Anexo). A situação-problema 1 serve como ponto de partida da aula. O professor deve instigar os discentes a tentar encontrar um número δ tal que a condição indicada em cada item seja satisfeita. O objetivo é que os discentes usem, mesmo que de forma intuitiva, estimulados pelos gráficos, a definição formal de continuidade, a saber: “Diremos que $f: \mathrm{X} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a \in \mathrm{X}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pudermos achar $\delta > 0$ tal que, se $x \in \mathrm{X}$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$" (ELON, 2009, p.223). Chamamos a atenção para o item (b) e o item (c) que representam uma função definida por partes e uma função discreta, respectivamente.

Na situação-problema 2 fazemos a relação entre os conceitos de continuidade e limite de uma função. Usamos o fato que, se f é uma função $f: \mathrm{X} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{a} \in \mathrm{X}$ é um ponto de acumulação de X, então f é contínua no ponto $\boldsymbol{a}$ se, e somente se, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Na parte I desta situação, são dados dois gráficos, e o discente deve identificar os pontos nos quais a função representada por cada gráfico é descontínua e explicar o porquê. Para tanto, o professor mostra um gráfico por vez e dá um tempo para os discentes responderem e enviar uma foto de sua resposta por um Formulário eletrônico. Em seguida o professor resolve com a participação dos discentes as partes II e III. O objetivo é estudar a continuidade das funções dadas no ponto indicado. O GeoGebra é utilizado para fazer um esboço dos gráficos e facilitar na compreensão

10.34019/2594-4673.

do conceito estudado. Por fim, pede-se para determine o valor de uma constante k de modo que cada função dada seja contínua.

Na **Etapa 7** o ponto de partida é a atividade do Quadro 9 (ver Anexo), que será realizada no primeiro momento da aula, visando estudar as noções intuitivas dos discentes acerca desses conceitos. O professor apresenta questão por questão e determina um tempo para os discentes responderem e, ao final, enviar uma foto de suas respostas via *WhatsApp*. Pelo fato da grande maioria dos discentes não terem notebook, a tarefa de esboçar o gráfico das funções no GeoGebra ficou a cargo do professor. Após os discentes enviarem suas respostas, o professor corrigiu a atividade introdutória e apresentou a teoria.

Na **Etapa 8** propomos o conjunto de situações-problema descritas nos Quadros 10 e 11 (ver anexo) para serem realizadas de forma síncrona e assíncrona, respectivamente. Na primeira o professor apresenta questão por questão e determina um tempo para os discentes responderem cada questão de forma individual. Ao final, os discentes tiram uma foto da sua folha de respostas e envia por *WhatsApp* para o professor. O professor deve incentivar a discussão entre os discentes para a correção da atividade. Na avaliação assíncrona, o professor envia o PDF para os discentes por *WhatsApp* juntamente com o link do Formulário eletrônico para o envio das respostas pelos discentes. Para a realização desta atividade prevemos um tempo de 4h para ser realizada de forma individual.

ANÁLISES E RESULTADOS

Na **Etapa 1**, os discentes realizaram as situações-problema 1, 2 e 3. A análise das respostas nos permitiu observar que, em relação às situações-problema 1 e 2, cinco discentes (35,7%) identificaram os dados, explicitaram a pergunta e a sua estratégia de resolução e fizeram corretamente os cálculos. Desses discentes, apenas um (7,1%) respondeu às perguntas dos dois problemas, e mesmo assim parcialmente (Figura 3 em Anexo).

Na fase de validação, observamos dificuldades dos discentes na realização de operações com expressões numéricas, mesmo podendo fazer uso da calculadora. Na situação-problema 1, seis discentes (42,8%) fizeram os cálculos corretamente, enquanto na situação-problema 2 esse número foi de 5 discentes (35,7%).

10.34019/2594-4673.

Para a realização da situação-problema 3, a ideia inicial era que os discentes realizassem de forma individual a atividade proposta. Entretanto, isso ficou inviabilizado pelo fato de poucos deles estarem participando da aula por meio de um notebook ou computador. Desse modo, o professor iniciou, ele mesmo, projetando a tela de seu notebook e construiu a tabela da primeira função e, na medida em que atribuía valores para x próximos de 2, pela esquerda e pela direita, questionava aos alunos sobre o comportamento da função e estes tinham que responder apenas na sua folha de resposta. Para as outras duas funções, um dos discentes se prontificou a projetar sua tela e construir as tabelas correspondentes.

Na situação-problema 3 os discentes precisavam estimar os limites das funções, nos pontos indicados, a partir de sua representação gráfica e usando para isso o GeoGebra. Novamente, pelo fato de poucos terem notebook e, além disso, muitos não estarem familiarizados como o GeoGebra, o professor projetou a tela do seu computador e construiu, no GeoGebra, o gráfico de cada uma das funções enquanto os estudantes respondiam a perguntas feitas na sua folha de resposta.

Analisando os percentuais de acerto de cada função da situação-problema 3, tanto a partir da observação da representação numérica, feita com o auxílio do Excel, como da observação da representação gráfica, feita com o auxílio do GeoGebra, percebemos que 85,7% dos discentes, a partir da representação numérica, responderam corretamente sobre o comportamento da função dada por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores de x próximos de 2. Por outro lado, 78,5% a partir da representação gráfica, responderam corretamente o comportamento da função $f(x) = \frac{1}{x} senx$ para valores de x próximos de 0.

Na **etapa 2**, iniciou-se fixando a notação que seria usada na atividade. A formalização do conceito de limite e suas representações ainda não haviam sido introduzidas. Desse modo, este foi o primeiro contato dos discentes com a notação de limite de uma função. O Quadro 12 (ver Anexo) mostra as representações que foram fixadas. Um exemplo foi apresentado aos discentes mostrando como eles deveriam proceder.

Participaram desta atividade 17 discentes e a dinâmica foi: o professor apresentava um gráfico e perguntava sobre o comportamento do gráfico quando x tendia a certos valores p por valores menores ou por valores maiores do que p. Esta atividade exigiu dos alunos que coordenassem ao mesmo tempo três tipos de registros de representações semióticas, pois, eles ouviam na representação em língua natural, visualizavam na representação gráfica e escreviam na representação simbólica. Ao todo foram apresentados nove gráficos (Quadro 4) e ao final da atividade os discentes faziam um print de sua folha de respostas e enviam por meio do *WhatsApp* para o professor (Figura 5 no Anexo).

Após análise das respostas enviadas pelos discentes percebemos que praticamente todos usaram corretamente a representação simbólica de limite. Ao todo foram feitas 42 perguntas e a média de acerto foi de 28 questões (68,4%), sendo que 13 discentes (76,4%) obtiveram 50% ou mais de acertos e, desses, 5 (29%) acertaram mais de 90% das respostas. O Quadro 13 (ver Anexo) apresenta as questões com maior percentual de erros.

A resposta de alguns discentes mostrou que, mesmo sem a formalização de limites envolvendo o infinito, eles possuíam a noção intuitiva do comportamento da função para o limite especificado. A Figura 6 (ver Anexo) é um recorte da resposta de três discentes.

Na **etapa 3**, os discentes não demonstraram dificuldades em compreender as técnicas para o cálculo de limites. Os obstáculos mais perceptíveis foram relativos a conceitos básicos do ensino básico, como fatoração e produtos notáveis, mas que foi sendo superado na medida que os discentes iam avançando na resolução dos exercícios. Ressaltamos que esta atividade foi muito bem conduzida por dois dos três monitores. Quanto à aplicação das propriedades de limite, as questões resolvidas e enviadas pelos discentes mostram que eles assimilaram bem o uso de tais propriedades, como podemos ver na Figura 7 (Anexo) que mostra a solução de um dos discentes.

Quanto à noção de vizinhança de um ponto e suas representações, da **Etapa 4**, as respostas dadas pelos discentes às questões apresentadas no Quadro 5, demonstram que eles compreenderam tal noção e conseguiram realizar conversões entre os diversos registros de representação. Na Figura 8 (Anexo) vemos a resposta de dois discentes, para as situações-problema 1 e 2.

Responderam a questões do Formulário Google, apresentado no Quadro 6, 19 discentes e a pontuação média foi de 7,12 (numa escala de 0 a 10) sendo que 16 discentes (84,2%) obtiveram pontuação superior ou igual a 6,0 e, desses, cinco alcançaram a pontuação máxima. O percentual de acerto nas questões 1 e 2 foi de 89,5% enquanto nas questões 3, 4 e 5 foi de

68,4%. Entendemos que isso se deu devido a questão exigir a coordenação de diferentes registros de representação semiótica.

Na **Etapa 5** visamos estudar a habilidade dos discentes em obter o δ da definição de limite a partir de uma análise gráfica (situação-problema 1) bem como algebricamente (situação-problema 2). Realizaram a atividade, proposta no Quadro 7, 14 discentes, tendo-se obtido os percentuais de acerto registados no Quadro 14 (ver Anexo). Na Figura 9 (Anexo) apresentamos a solução de um dos discentes para o item (c) da situação-problema 2 da atividade proposta.

A partir do Quadro 14 se percebe que os discentes apresentam mais dificuldade em obter o δ da definição de limite, algebricamente do que a partir de uma análise gráfica. Mesmo assim, consideramos o resultado satisfatório, mediante a complexidade da tarefa para um discente que está cursando Cálculo pela primeira vez. Ressaltamos também o fato de os discentes não terem dificuldades em compreender as desigualdades $0 < |x - a| < \delta$ e $|f(x) - L| < \varepsilon$, visto que foram trabalhadas na etapa 4.

A **Etapa 6** visa a fazer com que os discentes compreendam o conceito de função contínua. Para tanto foi proposta a atividade descrita no Quadro 8. O professor, partindo da situação-problema 1, instigou os discentes a tentar encontrar um número δ tal que a condição indicada em cada item fosse satisfeita. No início, os discentes apresentaram um pouco de dificuldade em perceber a diferença entre a desigualdade $0 < |x - a| < \delta$ que consta na definição de limite e $|x - a| < \delta$ que aparece na definição de continuidade. Após explicação do professor essa dificuldade foi superada e os discentes conseguiram compreender os exemplos da situação-problema 1.

A situação-problema 2 (Quadro 15 – Anexo) visava estabelecer a relação entre os conceitos de continuidade e limite de uma função. Na parte I desta situação-problema foram apresentados dois gráficos, e o discente deveria identificar os pontos nos quais a função representada por cada gráfico é descontínua e explicar o porquê. Para tanto, o professor mostrou um gráfico por vez e deu um tempo para os discentes responderem e enviar uma foto de sua resposta por um Formulário eletrônico. Responderam ao formulário 11 discentes e, numa escala de 0 a 4 pontos, a pontuação média foi de 2,7 pontos.

Na parte II o objetivo foi estudar a continuidade das funções dadas no ponto indicado. Para tanto, o professor fez uso do GeoGebra para obter um esboço dos gráficos e discutir, com a participação ativa dos discentes, a continuidade de cada função e justificar algebricamente cada resposta obtida a partir da análise gráfica. Por fim, na parte III o objetivo foi determinar o valor de uma constante k de modo que cada função dada fosse contínua. Esse tipo de questão exige a compreensão do conceito de continuidade e o GeoGebra teve um papel importante na compreensão da resolução da questão.

A **Etapa 7** tratou do conceito de limites no infinito e como obter as assíntotas horizontais e verticais de uma função. As noções intuitivas dos discentes acerca desses conceitos foram estudadas a parir das suas respostas na atividade do Quadro 9. Responderam a essa atividade 12 discentes e a média de acertos foi de 54,6%, sendo que nove discentes (75%) obtiveram média superior a 50%. Quando consideramos a apenas pontuação desses nove discentes, a média de acertos aumenta para 65,2%.

Consideramos o desempenho dos discentes nessa atividade um bom resultado, visto que eles responderam às questões apenas com seus conhecimentos prévios sobre limites. Um dado que vale a pena ressaltar é que nenhum discente acertou qualquer dos itens (c) e (d) da primeira questão. Creditamos esse resultado pela limitação do software GeoGebra que não permite fazer uma estimativa precisa acerca dos limites considerados.

A **Etapa 8** visou fazer uma verificação de aprendizagem dos conceitos abordados. Para tanto, foi proposto o conjunto de situações-problema descritas no Quadro 10, que foram aplicadas por meio remoto e de forma síncrona. Realizaram esta atividade 15 discentes cuja nota média foi 6,4 (numa escala de 0 a 10) e apenas 4 (quatro) não atingiram 50% de acerto.

Após correção das respostas enviadas pelos discentes, conclui-se que 58% dos discentes conseguiram explicar com suas palavras o significado de equações do tipo $\lim_{x \to a} f(x) = L$. O objetivo das situações-problema 2 e 10 era determinar o limite de uma função a partir da sua representação gráfica, e o percentual médio de acerto foi 82% e 79%, respectivamente, mostrando que os discentes desenvolveram bem esta habilidade.

Os discentes demonstraram que sabem aplicar as propriedades do limite, pois 93% responderam corretamente à questão quando a função é dada algebricamente, como acontece na situação-problema 4, e 67% acertaram quando a função é dada na sua representação gráfica, como acontece na situação-problema 5. Na situação-problema 7, 60% dos discentes conseguiram calcular corretamente o limite de uma função definida por partes. Por outro lado, 53% conseguiram esboçar o gráfico de uma função a partir de certas condições envolvendo limites.

Na situação-problema 8, 47% conseguiram usar o gráfico de uma função para encontrar um número δ que satisfizesse certa condição. A habilidade de identificar pontos de descontinuidade de uma função a partir de sua representação gráfica e justificar, sua resposta, na situação-problema 9, foi demonstrada por 51% discentes. O resultado mais preocupante foi o fato de nenhum discente conseguir acertar a situação-problema 6, na qual se exigia o uso do teorema do confronto. Uma nova aula foi ministrada sobre este tópico.

Ainda visando a avaliação dos discentes, foi proposto um conjunto de 9 situações-problema, descritas no Quadro 11, que foram aplicadas de forma assíncrona. O PDF da avaliação foi disponibilizado aos discentes, os quais tiveram 4 (quatro) horas para resolvê-la e enviar de volta para o professor, via Google Sala de Aula. Realizaram esta atividade 22 discentes, tendo-se obtido uma nota média foi 6,54 (numa escala de 0 a 10) e, destes, apenas quatro não atingiram 50% de acerto ou mais.

Após a correção das avaliações, na situação-problema 1 concluiu-se que 73% dos discentes conseguiram calcular os limites de uma função definida por partes, encontrando primeiro os limites laterais no ponto para depois concluírem se dado limite existia ou não. Na situação-problema 2, que visava analisar o conhecimento dos alunos sobre algumas propriedades do cálculo de limites, obteve-se uma média de 51% de acertos, com apenas 3 e 6 alunos conseguiram chegar à resposta correta nas alternativas (c) e (d), respectivamente, concluindo-se que, apesar de poderem conhecer as propriedades, não atentaram as condições que as tornam válidas.

A situação-problema 3 requer o cálculo de limites elementares, nos quais os alunos demonstraram não terem muita dificuldade, somando uma média de acertos de 80%. Já na situação-problema 4, 57% dos discentes conseguiram calcular os limites no infinito em funções definidas por partes, porém 18% deles deixaram a questão em branco. Tendo em conta que esses mesmos alunos conseguiram resolver pelo menos uma alternativa da situação-problema 1, que também tratava de limites em funções definidas por partes, concluiu-se que a dificuldade deles foi principalmente o cálculo do limite com x tendendo ao infinito, o que ficou evidenciado também após análise das resoluções dos 18% dos discentes que erraram a questão.

As situações-problema 5 e 6 visavam analisar o entendimento dos alunos a respeito da definição precisa de limite, sendo a primeira uma análise gráfica, enquanto na segunda os alunos deveriam provar, pela definição de limite, que o limite dado estava correto. Em ambas as situações-problema, 64% dos alunos conseguiram resolvê-las corretamente.

Nas situações-problema 7 e 8 os discentes deviam identificar pontos de descontinuidade de uma função, representadas graficamente e algebricamente, tendo-se obtido 61% e 45% de respostas corretas, respetivamente. No situação-problema 7 as dificuldades dos discentes resultaram mais por conta de justificativas incompletas do que por respostas erradas, enquanto na situação-problema 8 os principais erros não foram na aplicação das técnicas de limites para achar os pontos de descontinuidade, mas sim erros de matemática básica e falta de atenção dos alunos. Por fim, na situação 9, 55% dos discentes conseguiram explicar de forma correta e coerente a relação que existe entre limites e continuidades.

CONCLUSÕES

Este estudo apresenta resultados quanto à validação de uma SD que visou o ensino de limite e continuidade de funções de uma variável real a valores reais. A sequência didática aqui apresentada foi desenvolvida no primeiro semestre de 2021, no âmbito da disciplina Cálculo I com discentes de um curso de Licenciatura em Matemática.

Nas duas situações em que se fez uso das etapas da TSD foi possível perceber que a maioria dos discentes (64,3%) apresentaram dificuldades para identificar os dados, explicitar a pergunta e explicar suas estratégias de resolução dos problemas. Além disso, demonstraram dificuldade na realização de cálculos como operações numéricas, mesmo com o uso de calculadora. Os discentes conseguiram desenvolver a habilidade de intuir o limite de uma função a partir de sua representação numérica, obtida com o auxílio do Excel, e da sua representação gráfica, obtida através a partir do GeoGebra. Ademais, conseguiram coordenar simultaneamente três tipos de registros de representações do conceito de limite de uma função.

Percebemos que, mesmo antes da formalização do conceito de limites no infinito, os discentes conseguiram desenvolver a noção intuitiva do comportamento da função para esses tipos de limites. E, após a formalização desse conceito, quando solicitados a usar o GeoGebra para obter o gráfico de funções e fazer conjecturas acerca do comportamento da função quando $x \to \pm\infty$, os discentes obtiveram um bom desempenho (75% de aproveitamento). Acreditamos que o uso do GeoGebra foi crucial para esse bom desempenho dos discentes.

Não houve dificuldades na compreensão das técnicas de cálculo de limites nem na aplicação de suas propriedades operatórias. Quanto à noção de vizinhança de um ponto, os discentes conseguiram compreender tal noção, o que facilitou o entendimento do conceito de ponto de acumulação e, consequentemente, uma melhor compreensão da definição formal de limite com ε e δ.

Realizamos duas avaliações de aprendizagem, uma síncrona e outra assíncrona. Na primeira, o questionário era apresentado ao discente, o qual tinha um tempo pré-determinado para responder. Ao final enviavam uma foto de seus cálculos para o professor. A segunda foi enviada em PDF por *WhatsApp*, juntamente com o link de um Formulário eletrônico para os discentes enviarem suas respostas. Ambas as avaliações foram realizadas individualmente.

A nota média na avaliação síncrona foi de 6,4 (numa escala de 0 a 10) e mais da metade demonstraram ter desenvolvido as habilidades de explicar com suas palavras o significado de equações do tipo $\lim_{x \to a} f(x) = L$, determinar o limite de uma função a partir de sua representação gráfica, aplicar as propriedades do limite, tanto quando a função é dada algebricamente como graficamente, calcular corretamente o limite de uma função definida por partes e identificar pontos de descontinuidade de uma função a partir de sua representação gráfica.

As maiores dificuldades verificaram-se em esboçar o gráfico de uma função a partir de certas condições envolvendo limites, usar o gráfico de uma função para encontrar um número δ que satisfizesse certas condições e aplicar o teorema do confronto. As atividades que visavam a desenvolver essas habilidades precisam ser repensadas e aprimoradas.

Na avaliação assíncrona, a nota média foi 6,54 (numa escala de 0 a 10). Os discentes demonstraram saber calcular os limites de uma função definida por partes, efetuar cálculos elementares de limites, compreender a definição formal de limite, explicar de forma correta e coerente a relação que existe entre limites e continuidades. Por outro lado, demonstraram dificuldades para calcular limites envolvendo infinito e, apesar de conhecerem as propriedades dos limites, não atentaram às condições que as tornam válidas.

Pelo exposto, considerando a participação e o desempenho dos discentes e as dificuldades intrínsecas do ensino remoto, especialmente de conceitos não elementares do Cálculo, podemos concluir que a SD proposta neste estudo mostrou indícios de que pode contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem de limite e continuidade de funções. Entretanto, algumas situações precisam ser aperfeiçoadas visando melhorar a aprendizagem dos discentes.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Editora UFPR, 2007.

ANACLETO, G. M. C. **Uma investigação sobre a aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo**. Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

ANTON, H.; DAVIS, S. **Cálculo**: volume 1. Tradução: Claus Ivo Doering. 1. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

BARBOSA, M. A. **O Insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina Cálculo Diferencial e Integral**. Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica, Curitiba, 2004.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics:** Didactique des mathematiques 1970-1990. In: Balacheff, N.; Cooper, M.; Sutherland, R.; Warfield, V. (trans and eds.). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3. ed. Porto alegre: Artmed, 2010.

DE OLIVEIRA, M. C. A.; RAAD, M. R. A existência de uma cultura escolar de reprovação no ensino de Cálculo. **Boletim Gepem**, n. 61, p. 125-137, 2012.

LIMA, E. L. **Curso de Análise.** Rio de Janeiro: Projeto Euclides IMPA, v.2, 2009.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

OLIVEIRA, M. M. **Sequência didática interativa no processo de formação de professores**. Petrópolis: Vozes, 2013.

ROBERT, A.; SPEER, N.. **Research on the teaching and learning of calculus/elementary analysis**. In: The teaching and learning of mathematics at university level. Dordrecht: Springer, 2001. p. 283-299.

STEWART, J.. **Cálculo**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, v. 1, 2016.

THIOLLENT, M.. **Metodologia da Pesquisa-Ação**. São Paulo: Cortez, 1985.

doi 10.34019/2594-4673.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa como ensinar**. Tradução: Ernani F. da F. Rosa. Reimpressão 2010. Porto Alegre: Artmed, 1998.

HISTÓRICO

Submetido: 25 de outubro de 2023.
Aprovado: 14 de maio de 2023.
Publicado: 29 de maio de 2023.

Anexos

Quadro 1 – Estrutura de coleta de dados

Técnica de coleta	Instrumento de coleta	Dados produzidos
Observação	Diário de bordo	Registro cursivo resultantes das observações.
Entrevista	Questionário online (*Gooogle Forms*), *Google Meet*.	Respostas dos sujeitos às questões do estudo.
Filmagem	Modo "Gravar" do *Google Meet*.	Vídeo das atividades desenvolvidas.
Coleta de interações	*Google Meet* e *WhatsApp*	Registro de interações entre discentes e entre pesquisadores e discentes.

Fonte: Elaborado pelos autores

Quadro 2 – Conteúdos abordados e objetivos

Data	Conteúdo abordado	Objetivos
Etapa 1: 12/04/2021 Síncrono	Noção intuitiva de limite a partir das representações numérica e gráfica.	Desenvolver a noção intuitiva de limite de uma função a partir de suas representações numérica e gráfica obtidas a partir da conversão de sua representação algébrica.
Etapa: 14/04/2021 Síncrono	Noção intuitiva de limite a partir da representação gráfica.	Desenvolver a noção intuitiva de limite de uma função a partir da conversão de sua representação algébrica para a representação gráfica
Etapa: 16/04/2021 Síncrono	Cálculos usando propriedades dos limites. Teorema do confronto.	Desenvolver a habilidade de calcular o limite de uma função representada algebricamente ou graficamente usando as propriedades dos limites. Conhecer e aplicar o teorema do confronto.
Etapa 4: 19/04/2021 Síncrono	Vizinhança de um ponto. Ponto de acumulação.	Compreender o conceito de vizinhança de um ponto e suas representações. Compreender o conceito de ponto de acumulação.
Etapa 5: 21/04/2021 Síncrono	Definição formal de limite.	Conhecer o conceito formal de limite de uma função.
Etapa 6: 26/04/2021 Síncrono	Continuidade	Compreender o conceito de continuidade de uma função. Determinar quando uma função é contínua num ponto.
Etapa 7: 28/04/2021 Síncrono	Limites no infinito e assíntotas.	Compreender o conceito de limites no infinito e como obter as assíntotas horizontais e verticais de uma função.
Etapa 8: 30/04/2021 – Síncrono 31/04/2021 - Assíncrono	Avaliação da aprendizagem.	Avaliar a aprendizagem.

Fonte: Elaborado pelos autores

Quadro 3 – Situação de ação das situações-problema 1 e 2

Situação	Variáveis	Questão da situação-problema
Situação-problema 1	t: tempo (em meses) P: número de unidades fabricadas (em milhares) $P(t) = \frac{6t^2+5t}{(t+1)^2}$: função em sua representação algébrica	O que acontece com a produção a longo prazo, ou seja, para valores de t "muito grandes"?
Situação-problema 2	n: enésima tentativa do rato T: tempo (em minutos) que o rato levou para atravessar o labirinto $T(n) = \frac{7n+15}{n}$: função em sua representação algébrica	O que acontece com este tempo quando o número de tentativas aumenta indefinidamente?

Fonte: Elaborado pelos autores

Tabela 1 – Representação numérica da função da situação 1

t	$P(t)$
5	4,861111
15	5,566406
130	5,946623
250	5,972127
500	5,986032
8000	5,999125

Fonte: Elaborado pelos autores

Tabela 2 – Representação numérica da função da situação 2

n	$T(n)$
10	8,5
20	7,75
50	7,3
100	7,15
1000	7,015
2000	7,0075

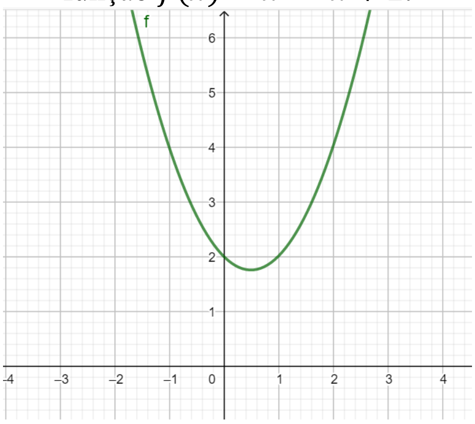
Fonte: Elaborado pelos autores

Tabela 3 – Representação numérica da função $f(x) = x^2 - x + 2$.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	2	3	8
1,5	2,75	2,5	5,75
1,7	3,19	2,3	4,99
1,8	3,44	2,2	4,64
1,9	3,71	2,1	4,31
1,99	3,9701	2,01	4,0301
1,999	3,997001	2,001	4,003001
1,9999	3,9997	2,0001	4,0003

Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 1 – Representação gráfica da função $f(x) = x^2 - x + 2$.



Fonte: Elaborado pelos autores

10.34019/2594-4673.

Quadro 4 – Gráficos usados na etapa 2.

Gráfico 1	Gráfico 2	Gráfico 3

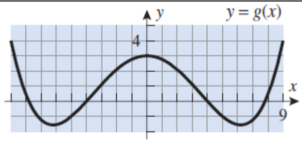
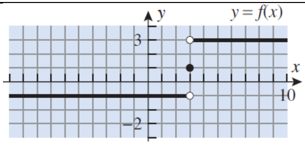
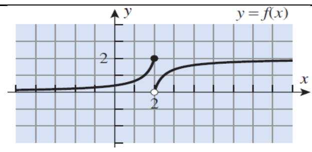

		

Gráfico 4	**Gráfico 5**	**Gráfico 6**

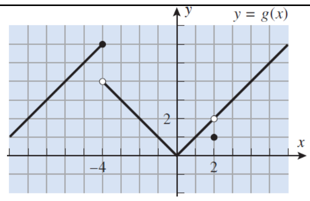
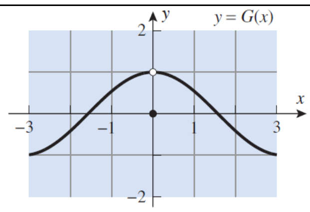
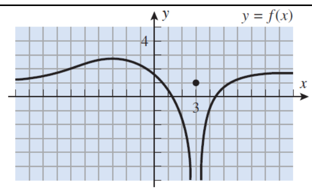
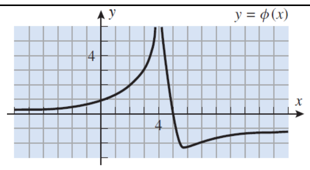
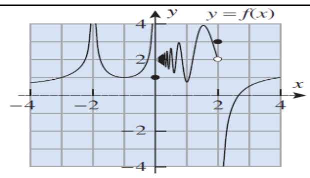
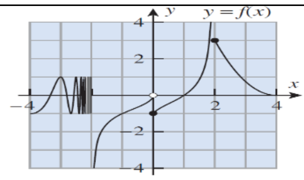

		

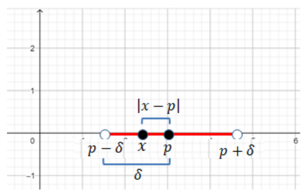
Gráfico 7	**Gráfico 8**	**Gráfico 9**
		

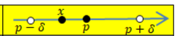
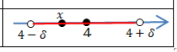
Fonte: Anton e Davis (2014, p. 77)

Quadro 5 – Situações 1 e 2 propostas.

Situação 1 - Considere um número p qualquer. Todo intervalo aberto com centro no ponto p e raio r é um conjunto denominado vizinhança de p e representada por $V_\delta\ (p)$. Determine a $V_\delta\ (2)$ considerando: (a) O conjunto $\mathbb{N}$; (b) O conjunto $\mathbb{Z}$; (c) O conjunto $\mathbb{R}$. Represente cada conjunto na reta numérica.

Situação 2 –Seja $x \in \mathbb{R}$. Quando $x \in V_\delta(p)$ com $x \neq p$, representamos esse fato de três maneiras: (1) $0 < |x - p| < \delta$; (2) $p - \delta < x < p + \delta$; (3) Graficamente. Desse modo, complete a tabela abaixo.



$x \in V_\delta(p)$ com $x \neq p$	$0 < \lvert x - p\rvert < \delta$	$p - \delta < x < p + \delta$	
$x \in V_\delta(3)$ com $x \neq p$			
	$0 < \lvert x - 1\rvert < \delta$		
		$-6 - \delta < x < -6 + \delta$	
			

Fonte: Elaborado pelos autores

Quadro 6 – Questões do *Google Forms*.

(1) Considere um número real x que pertence a uma vizinhança de centro 3 e raio 2 com x diferente de 3. Isso pode ser representando por:

(A) $x \in V_2(3)$ com $x \neq 3$

(B) $x \in V_3(2)$ com $x \neq 3$

(C) $x \in V_3(3)$ com $x \neq 2$

(2) O que significa a representação $x \in V_5(-2)$ com $x \neq -2$:

(A) x que pertence a uma vizinhança de centro 5 e raio -2, com x diferente de 5.

(B) x que pertence a uma vizinhança de centro -2 e raio 5, com x diferente de -2.

(C) x que pertence a uma vizinhança de centro -5 e raio 2, com x diferente de 5.

(3) O que significa a representação $0 < |x - 7| < \delta$:

(A) $x \in V_\delta(-7)$ com $x \neq -7$

(B) $x \in V_7(\delta)$ com $x \neq \delta$

(C) $x \in V_\delta(7)$ com $x \neq 7$

(4) O que significa a representação $-6 - \delta < x < -6 + \delta$:

(A) x que pertence a uma vizinhança de centro -6 e raio δ, com x diferente de -6.

(B) x que pertence a uma vizinhança de centro 6 e raio δ, com x diferente de -6.

(C) x que pertence a uma vizinhança de centro δ e raio 6, com x diferente de δ.

10.34019/2594-4673.

(5) Considere as seguintes representações:

(1) $x \in V_2(4)$ com $x \neq 4$

(2) $-4 - \delta < x < -4 + \delta$:

(3) $0 < |x - 4| < \delta$:

Quais são equivalentes:

(A) 1 e 2

(B) 1 e 3

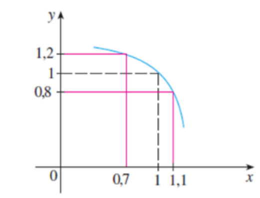
(C) 2 e 3

Fonte: Elaborado pelos autores

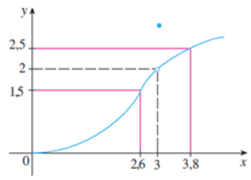
Quadro 7 – Atividades para encontrar o δ da definição de limite

Situação-problema 1 - Use o gráfico dado de f para encontrar um número δ tal que:

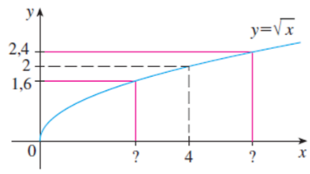
(a) Se $|x - 1| < \delta$ então $|f(x) - 1| < 0{,}2$



(b) Se $0 < |x - 3| < \delta$ então $|f(x) - 2| < 0{,}5$



(c) Se $0 < |x - 4| < \delta$ então $|f(x) - 2| < 0{,}4$



Situação-problema 2 – Considere as funções f funções reais de uma variável real. Demonstre cada afirmação usando a definição de limite:

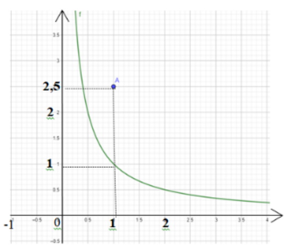
(a) $\operatorname{Lim}_{x \to -1} (7x + 5) = -2$; (b) $\lim_{x \to -2} \left(\frac{x}{2} + 3\right) = 2$; (c) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{2+4x}{3}\right) = 2$; (d) $\lim_{x \to 10} \left(3 - \frac{4}{5}x\right) = -5$

Fonte: Stewart (2016, p. 107).

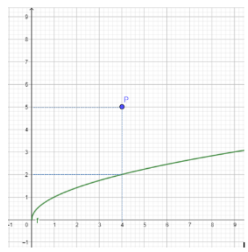
Quadro 8 – Situações didáticas da atividade proposta na Etapa 6.

Situação-problema 1 – Use o gráfico dado de f para tentar encontrar um número δ tal que:

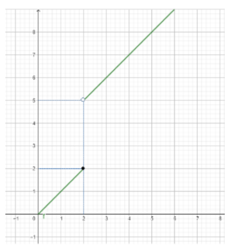
(a)Se $|x - 1| < \delta$, então $|f(x) - 2{,}5| < 0{,}1$.



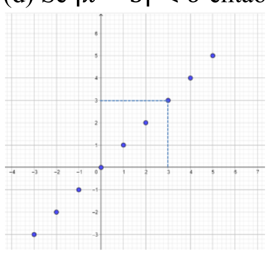
(c) Se $|x - 4| < \delta$, então $|f(x) - 5| < 0{,}2$.



(b) Se $|x - 2| < \delta$, então $|f(x) - 2| < 0{,}1$.



(d) Se $|x - 3| < \delta$ então $|f(x) - 3| < 0{,}1$.

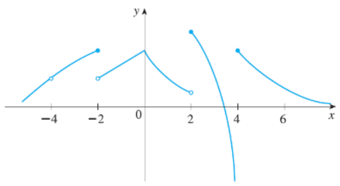


Situação-problema 2 – Seja f uma função $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Então f é contínua no ponto $\boldsymbol{a}$ se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

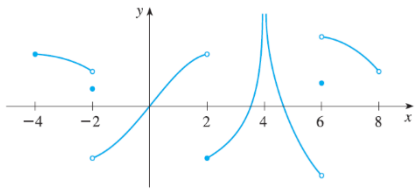
doi 10.34019/2594-4673.

(I) Desse modo, dados os gráficos de f, identifique pontos nos quais f é descontínua e explique por quê?

(a)



(b)



(II) Estude a continuidade das funções abaixo no ponto indicado. Use o GeoGebra para fazer um esboço dos gráficos.

(a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $a = -2$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} \text{ se } x \neq -2 \\ 1, \text{se } x = -2 \end{cases}$, $a = -2$.

(c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 \text{ se } x \leq 4 \\ 7 + \frac{16}{x}, \text{se } x > 4 \end{cases}$, $a = 4$.

(d) $f(x) = \begin{cases} e^x \text{ se } x < 0 \\ x^2, \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, $a = 0$.

(III) Determine o valor de k de modo que cada função dada seja contínua.

(a) $f(x) = \begin{cases} 7x - 2 \text{ se } x \leq 1 \\ kx^2, \text{se } x > 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 \text{se } x \geq -3 \\ \frac{k}{x^2}, \text{se } x < -3 \end{cases}$

Fonte: Stewart (2016, p. 117)

Quadro 9 – Atividade introdutória 1 acerca de limites no infinito

(1) Obtenha, com o apoio do GeoGebra, a representação gráfica das funções abaixo e determine o que acontece com $f(x)$ quando tomamos x suficientemente grande (representamos isso por $x \to +\infty$) ou quando tomamos x é suficientemente grande em valor absoluto, mas negativo (representamos isso por x→ $-\infty$).

(a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

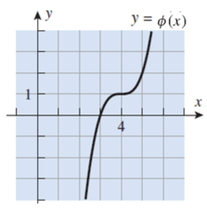
(b) $(x) = \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) $f(x) = \frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

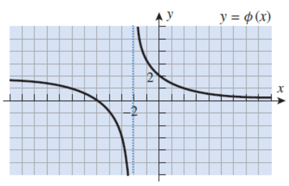
(d) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(2) Para a função ϕ do gráfico abaixo, encontre $\lim_{x\to\infty} \phi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \phi(x)$.

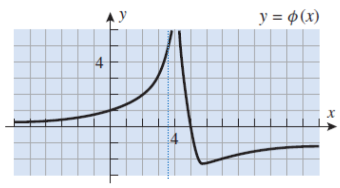
(a)



(b)



(c)



Fonte: Elaborado pelos autores

doi 10.34019/2594-4673.

Quadro 10 – Atividade síncrona de verificação de aprendizagem

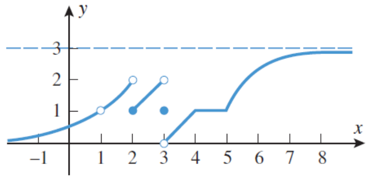
Situação-problema - Explique com suas palavras o significado das equações:

(a) $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$ (b) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$ (c) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$ (c) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3$

Situação-problema 2 - Para a função f cujo gráfico está na figura abaixo, encontre o limite, se existir.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 2} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (d) $\lim_{x\to 4} f(x)$ (e) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

(f) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ (g) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (h) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (i) $\lim_{x\to 3} f(x)$



Fonte: Anton e Davis (2014, p. 128)

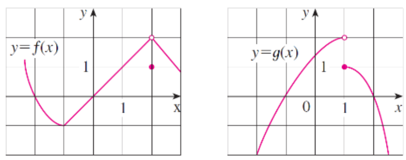
Situação-problema 3 - Esboce o gráfico de uma função f que satisfaça a todas as condições seguintes:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3,\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = -3,\ \ f(2) = 3$$

Situação-problema 4 – Dado que $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$, $\lim_{x\to 3} g(x) = -1$ e $\lim_{x\to 3} h(x) = 2$, determine:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{f(x) + 4g(x)^2}{\sqrt{h(x)}}\right)$$

Situação-problema 5 – Os gráficos de f e g são dados abaixo. Use-os para calcular o limite $\lim_{x\to 1}[f(x) + g(x)]$. Caso não exista, explique por quê.



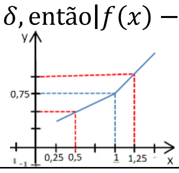
Fonte: Stewart (2016, p. 98)

Situação-problema 6 – Se $4x - 9 \le h(x) \le x - 2 - 4x + 7$ para $x \ge 0$, encontre $\lim_{x\to 3} h(x)$.

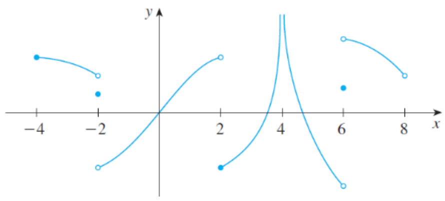
Situação-problema 7– Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, se\ x < 1 \\ (x-1)^2, se\ x \ge 1 \end{cases}$. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Situação-problema 8 – Use o gráfico dado de f para encontrar um número δ tal que

se $|x - 1| < \delta$, então $|f(x) - 0{,}75| < 0{,}1$



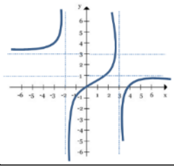
Situação-problema 9 – Identifique os pontos de descontinuidade da função g observando o seu gráfico.



Fonte: Stewart (2016, p. 117)

Situação-problema 10 – Para a função f, cujo gráfico é dado a seguir, determine:

(a) $\lim_{x\to -2} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ (d) $\lim_{x\to \infty} f(x)$ (e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$



Fonte: Elaborado pelos autores

Quadro 11 – Atividade assíncrona de verificação de aprendizagem

Situação-problema 1 - Seja $g(t) = \begin{cases} t-2, & se\ t<0 \\ t^2, & se\ 0 \le t \le 2 \\ 2t, & se\ t>2 \end{cases}$. Encontre: (a) $\lim_{t\to 0} g(t)$ (b) $\lim_{t\to 1} g(t)$ (c) $\lim_{t\to 2} g(t)$.

Situação-problema 2 - Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta.

(a) Se existirem $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$, então também existe $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$.

(b) Se $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ e existir $\lim_{x\to a} f(x)$, então não existe $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

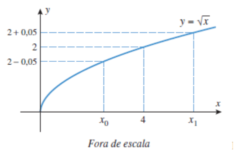
(c) Se existirem $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$, e ambos forem iguais, então $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

(d) Se existir $\lim_{x\to a} f(x)$, então também existe $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}$.

Situação-problema 3 - Encontre os limites, caso existam: (a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x}{x+1}$ (b) $\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$.

Situação-problema 4 – Seja $f(x) = \begin{cases} 2x^2+5, se\ x<0 \\ \frac{3-5x^3}{1+4x+x^3}\ se\ x \ge 0 \end{cases}$. Determine: (a) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ (b) $\lim_{x\to \infty} f(x)$

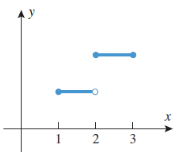
Situação-problema 5 – Dado o gráfico abaixo, encontre um número $\delta > 0$, tal que se $0 < |x-4| < \delta$, implica que $|\sqrt{x}-2| < 0{,}05$.



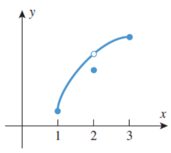
Situação-problema 6 – Use a definição de limite para provar que o limite dado está correto: $\lim_{x\to -1}(7x+5) = -2$.

Situação-problema 7– Em cada gráfico dado, indique quais pontos em que a função não é contínua e justifique.

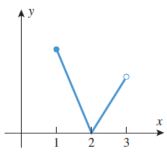
(a)



(b)



(c)

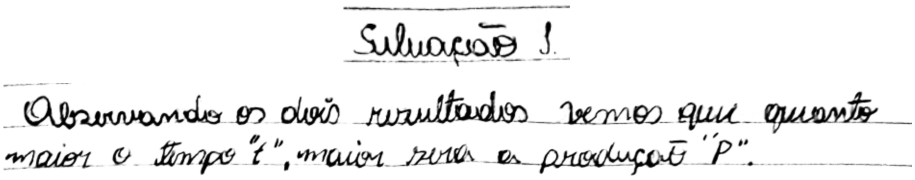


Situação-problema 8 – Encontre os pontos x, se houver, nos quais f não é contínua: $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & se\ x \le 4 \\ 7+\frac{16}{x}, & se\ x>4 \end{cases}$

Situação-problema 9 – Que relação há entre os conceitos de limite e continuidade?

Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 3: Respostas para as situações 1 de um dos discentes

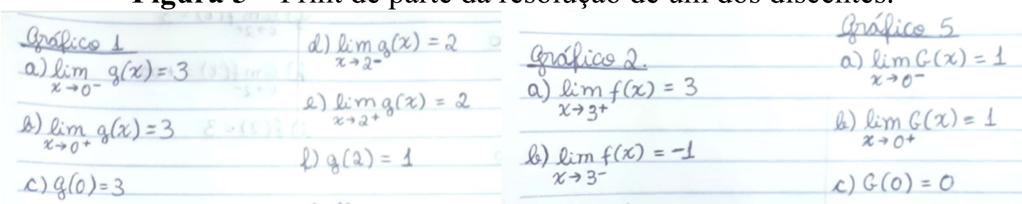


Fonte: Próprios autores

Representação em língua natural	Representação simbólica
O limite de f quando x tende a p	$\lim_{x \to p} f(x)$
O limite de f quando x tende a p pela direita / O limite de f quando x tende a p por valores maiores do que p.	$\lim_{x \to p^+} f(x)$
O limite de f quando x tende a p pela esquerda / O limite de f quando x tende a p por valores menores do que p.	$\lim_{x \to p^-} f(x)$

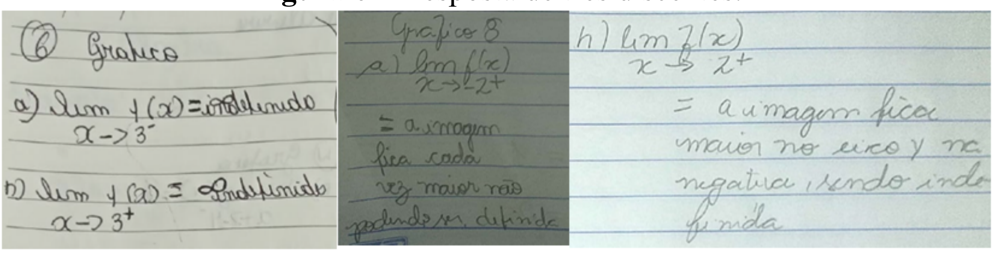
Quadro 12 – Representação dos limites em língua natural e simbólica

Figura 5 – Print de parte da resolução de um dos discentes.



Fonte: Elaborado pelos autores.

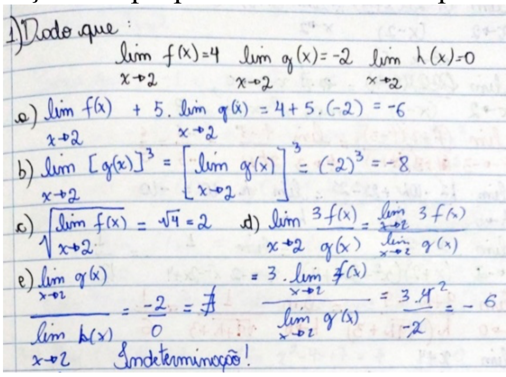
Figura 6 – Resposta de três discentes.



Fonte: Dados da pesquisa.

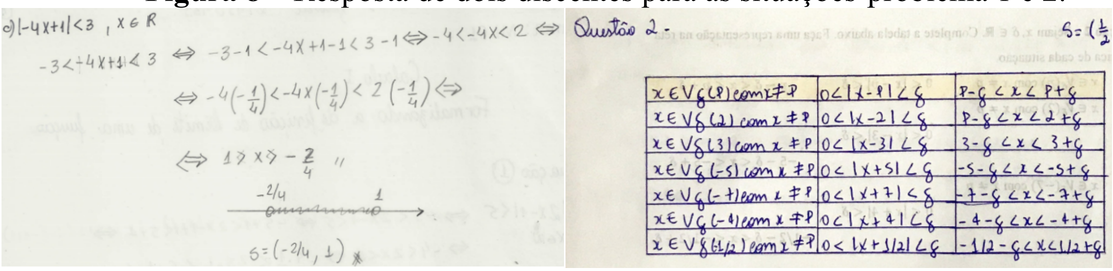
10.34019/2594-4673.

Figura 7 – Aplicação das propriedades de limites por um dos discentes.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8 – Resposta de dois discentes para as situações-problema 1 e 2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 13 – Questões com maior percentual de erros

Gráfico	**Item**	**Acertos**
Gráfico 6	(a) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$	9 (52,9%) 7(41,1%)
Gráfico 8	(h) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$	6 (35,2%)
Gráfico 9	(a) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$	2(11,7%) 6(35,2%)

Fonte: Dados da pesquisa

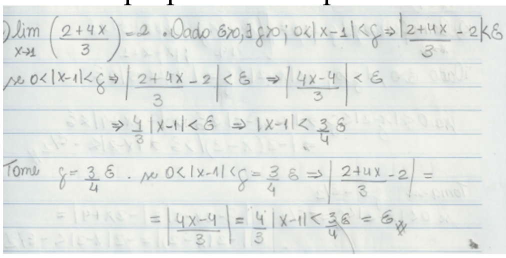
Quadro 14 – Percentual de acerto na atividade proposta no Quadro 4

	Situação-problema 1 - Use o gráfico dado de f para encontrar um número δ tal que:			**Situação-problema 2** – Considere as funções f funções reais de uma variável real. Demonstre cada afirmação usando a definição de limite:			
	(a)	(b)	(c)	(a)	(c)	(d)	
Percentual de acertos	71,4%	71,4%	64,2%	50%	42,8%	50%	35,7%

Fonte: Dados da pesquisa

10.34019/2594-4673.

Figura 9 – Resposta de um dos discentes, para o item (c) da situação-problema 2 da atividade proposta na Etapa 5.


$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2+4x}{3}\right)=2$. Dado $\varepsilon>0, \exists \delta>0;\ 0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{2+4x}{3}-2\right|<\varepsilon$

se $0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{2+4x}{3}-2\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{4x-4}{3}\right|<\varepsilon$

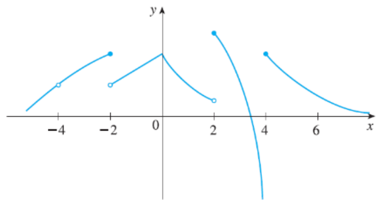
$\Rightarrow \frac{4}{3}|x-1|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|<\frac{3}{4}\varepsilon$

Tome $\delta=\frac{3}{4}\varepsilon$. se $0<|x-1|<\delta=\frac{3}{4}\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2+4x}{3}-2\right| =$

$= \left|\frac{4x-4}{3}\right| = \frac{4}{3}|x-1| < \frac{3\varepsilon}{4} = \varepsilon$

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 15 – Percentual de acerto da situação-problema 2 proposta no Quadro 8

Situação-problema 2 – Seja f uma função $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Então f é contínua no ponto $\boldsymbol{a}$ se, e somente se, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Desse modo, dado o gráfico de f, identifique pontos nos quais f é descontínua e explique por quê? 				
Ponto e justificativa	Ponto: -4 Just.: f não está definida	Ponto: -2 Just.: limites laterais diferentes	Ponto: 2 Just.: limites laterais diferentes	Ponto: 4 Just.: limites laterais diferentes
Percentual de acertos	81,8%	72,2%	54,5%	63,6%

Fonte: Dados da pesquisa

10.34019/2594-4673.