



Conhecimento de Futuros Professores em Probabilidades: relacionar acontecimentos disjuntos e complementares

Knowledge of Prospective Teachers on Probability: relating disjoint and complementary events

José António Fernandes¹
Universidade do Minho

Ailton Paulo Oliveira Júnior²
Universidade Federal do ABC

RESUMO

No artigo estuda-se o conhecimento de estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, sobre relações entre acontecimentos disjuntos e complementares a partir dos três objetivos: 1) Estudar o desempenho dos estudantes no reconhecimento da verdade/falsidade das relações enunciadas entre acontecimentos disjuntos e complementares; 2) Caracterizar as justificações apresentadas pelos estudantes para afirmar a verdade/falsidade das relações enunciadas; e 3) Retirar consequências para a formação em Probabilidades dos futuros professores dos primeiros anos. Participaram no estudo 37 estudantes do 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, que frequentavam uma universidade do norte de Portugal. Os dados do estudo são as respostas dadas pelos estudantes a uma tarefa envolvendo relações entre acontecimentos disjuntos e complementares. Em termos de resultados, verificou-se um desempenho razoável dos estudantes em termos da verdade/falsidade das relações, o qual se agravou muito em termos de justificações.

Palavras-chave: Probabilidades; Acontecimentos disjuntos e complementares; Futuros professores; Primeiros anos escolares.

ABSTRACT

The article studies the knowledge of students, prospective primary school teachers, about relationships between disjoint and complementary events from the three objectives: 1) To study the performance of students in recognizing the truth/falsehood of the enunciated relations between disjoint and complementary events; 2) To characterize the justifications presented by the students to affirm the truth/falsehood of the enunciated relations; and 3) To draw consequences for the training in Probability of prospective primary school teachers years. Participated in the study 37 students of the 2nd year of the Degree in Basic Education, who attended a university in the north of Portugal. Study data are the responses given by students to a task involving relationships between disjoint and complementary events. In terms of results, there was a reasonable performance of the students in terms of the truth/falsehood of the relationships, which worsened a lot in terms of justifications.

Keywords: Probability; Disjoint and complementary events; Prospective teachers; Primary school.

¹ Doutor em Educação, área de conhecimento de Metodologia do Ensino da Matemática, pela Universidade do Minho (UMinho). Investigador do Centro de Investigação em Educação (CIEEd) da Universidade do Minho, Braga, Portugal. Endereço para correspondência: Rua 8 de setembro, Lote 6, Ferreiros, 4705-272 Braga, Portugal. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2015-160X>. E-mail: jfernandes@ie.uminho.pt.

² Doutor e Pós-Doutor em Educação, área de Didática, Práticas Escolares e Técnicas de Ensino Universidade Federal do ABC, Professor Associado, Departamento de Matemática, Computação e Cognição, Santo André – São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Doutor Saboia de Medeiros, 53 Apt 14 - Vila Mariana - São Paulo - São Paulo - Brasil/ CEP: 04120-110 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2721-7192>. E-mail: ailton.junior@ufabc.edu.br.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, vários investigadores têm defendido o ensino de temas de Probabilidades e Estatística a crianças dos primeiros anos escolares (BATANERO, 2013), e mesmo na educação infantil (BATANERO; ÁLVAREZ; HERNÁNDEZ; GEA, 2021; NIKIFORIDOU; PANGE, 2010). Essas recomendações repercutiram-se nos programas escolares de matemática de muitos países, com os temas de Probabilidades e Estatística a serem introduzidos nesses programas desde os primeiros anos de escolaridade (e.g., BRASIL, 2018; MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2018a; MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA y DEPORTE, 2014; NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2007).

Em Portugal, o domínio de conteúdo Organização e Tratamento de Dados, que abarca os temas de Probabilidades e Estatística, começa a ser estudado logo no 1.º ano de escolaridade e o seu estudo continua ao longo de todo o ensino básico³ (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2018a). Também no ensino secundário os temas de Probabilidades ou Estatística são abordados em todos os anos escolares (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2018b).

Perante as novas exigências requeridas aos professores dos primeiros anos escolares para ensinar os temas de Probabilidades e Estatística, torna-se necessário aprofundar a sua formação para que eles possam implementar um ensino de qualidade. Contudo, estudos recentes, envolvendo futuros professores dos primeiros anos, mostram que eles têm conhecimentos limitados para ensinar esses temas, designadamente sobre definir diferentes tipos acontecimentos (FERNANDES; BARROS, 2021; FERNANDES, 2022; FISCHBEIN; NELLO; MARINO, 1991) e calcular probabilidades de acontecimentos envolvendo conetivos lógicos (FERNANDES, 2018).

Na presente investigação estuda-se o conhecimento de futuros professores dos primeiros anos sobre relações envolvendo acontecimentos disjuntos e complementares a partir dos três objetivos: 1) Estudar o desempenho dos estudantes no reconhecimento da verdade/falsidade das relações enunciadas entre acontecimentos disjuntos e complementares; 2) Caracterizar as justificações apresentadas pelos estudantes para afirmar a verdade/falsidade das relações enunciadas; e 3) Retirar consequências para a formação em Probabilidades dos futuros

³ Em Portugal, o ensino básico desenvolve-se ao longo dos primeiros nove anos de escolaridade e estrutura-se em três ciclos: 1.º ciclo – do 1.º ano ao 4.º ano; 2.º ciclo – 5.º e 6.º anos e 3.º ciclo – do 7.º ano ao 9.º ano. Segue-se o ensino secundário, que decorre entre o 10.º e o 12.º ano.

professores dos primeiros anos. Trata-se, portanto, de um estudo complementar dos realizados por Fernandes e Barros (2021) e Fernandes (2022, in press), nos quais se pedia, também a futuros professores dos primeiros anos, para classificar, definir ou exemplificar acontecimentos disjuntos (não complementares), acontecimentos complementares e acontecimentos independentes.

Portanto, no presente estudo acrescenta-se ao estudo de acontecimentos disjuntos e complementares (FERNANDES, 2022, in press) a verificação da validade de relações entre esses acontecimentos. Ora, o conhecimento dessas relações permite estabelecer conexões entre os dois tipos de acontecimentos, promovendo a retenção e compreensão dos estudantes (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

Uma vez apresentado e justificado o estudo, na próxima secção desenvolve-se a contextualização teórica, segue-se a secção de metodologia e a secção de apresentação de resultados. Por fim, nas duas últimas secções realiza-se a discussão dos principais resultados do estudo e expõem-se as conclusões do estudo.

CONTEXTUALIZAÇÃO TEÓRICA

Em termos de conjuntos, um acontecimento probabilístico é um subconjunto do espaço de resultados que pode ser estudado segundo diversas tipologias: acontecimentos certos, possíveis (mas não certos) e impossíveis, acontecimentos disjuntos (incompatíveis ou mutuamente exclusivos), acontecimentos complementares e acontecimentos independentes.

O estudo dos acontecimentos certos, possíveis e impossíveis é introduzido, na generalidade dos países, no início da aprendizagem das Probabilidades, no 3.º ano em Portugal; seguindo-se o estudo dos acontecimentos disjuntos e complementares num momento posterior, no 9.º ano no caso português (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2018a); e, por último, o estudo de acontecimentos independentes, no 12.º ano no caso português (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2018b).

No caso da tipologia de acontecimentos certos, possíveis e impossíveis existem diversas investigações envolvendo a classificação e a formulação desses tipos de acontecimentos. Por exemplo, Fischbein, Nello e Marino (1991) concluíram que a maioria dos alunos do 4.º ao 8.º ano (inclusive), que participaram no estudo, classificaram e definiram corretamente

acontecimentos certos, possíveis e impossíveis nas experiências de lançamento de um dado e de girar uma tómbola de jogo dividida em 90 partes iguais, revelando-se um pouco mais difícil a categoria dos acontecimentos certos e a formulação de acontecimentos comparativamente com a sua classificação. Os autores verificaram, ainda, uma pequena melhoria das respostas com a idade em todos os itens e com o estudo prévio de probabilidades na maioria dos itens.

Também no estudo de Fernandes (2000) se verificou que a grande maioria dos alunos do 8.º e 11.º ano, participantes do estudo, classificaram corretamente acontecimentos certos, possíveis e impossíveis nas experiências de extração de bolas de um saco e de lançamento de um dado, revelando-se mais difícil a identificação de acontecimentos certos e/ou que envolviam conectivos lógicos. O autor verificou também um aumento sistemático das respostas corretas com o ano escolar e com o desempenho em matemática. A dificuldade, resultante da introdução dos conectivos lógicos, acentuou-se quando foi pedido a futuros professores dos primeiros anos para determinarem as probabilidades de acontecimentos envolvendo os conectivos *e* e *ou* (FERNANDES, 2018), tendo-se obtido percentagens de respostas corretas de 43,5% e 17,4%, respetivamente.

No caso dos acontecimentos certos, eles podem ser vistos como um caso limite dos acontecimentos possíveis, pois o acontecimento certo é um acontecimento sempre possível no espaço de resultados. Ignorando isso, vários alunos classificaram os acontecimentos certos em possíveis (mas não certos), ou seja, reconheceram que os acontecimentos se verificavam para alguns casos e classificaram-nos como sendo possíveis (mas não certos), quando realmente se tratava de acontecimentos que se verificavam em todos os casos, portanto acontecimentos certos.

Ainda no estudo de Fernandes (2000), constatou-se que as dificuldades de alunos do 9.º ano, que não tinham estudado ainda probabilidades na escola, aumentaram muito quando lhes foi pedido para diferenciarem acontecimentos quase certos (com probabilidade próxima de 1) de acontecimentos certos e acontecimentos quase impossíveis (com probabilidade próxima de 0) de acontecimentos impossíveis. Nestas situações, muitos alunos consideraram os acontecimentos quase certos com sendo certos e os acontecimentos quase impossíveis como sendo impossíveis. Esta dificuldade também foi observada por Green (1982) em alunos com idade entre os 11 e 16 anos.

Analogamente, no estudo de Fernandes e Barros (2005), em que participaram futuros professores dos primeiros anos escolares, tal como acontece no presente estudo, verificou-se também que os estudantes demonstraram um elevado desempenho na classificação e formulação de acontecimentos (variando a percentagem de respostas corretas entre 78% e 97%), com dificuldades um pouco maiores em formular do que em classificar acontecimentos e em classificar acontecimentos certos em relação a outros tipos de acontecimentos.

Envolvendo também futuros professores dos primeiros anos escolares, Fernandes, Gea e Correia (2016) realizaram um estudo sobre a definição de acontecimentos certos no processo de extração de berlindes de um saco, contendo berlindes vermelhos, verdes e brancos. Neste estudo, os estudantes tiveram muitas dificuldades, as quais aumentaram sistematicamente com a garantia de extrair pelo menos um berlinde de uma cor, dois berlindes de duas cores e um berlinde de cada uma das cores existentes no saco. No caso da garantia de extrair pelo menos um berlinde de cada uma das três cores, os futuros professores do estudo de Fernandes e Barros (2005) sentiram dificuldades semelhantes, os futuros professores do estudo de Ortiz e Mohamend (2014) mostraram um desempenho um pouco superior e os alunos do 5.º ao 7.º ano (10-13 anos), que participaram no estudo de Fischbein e Gazit (1984), tiveram maiores dificuldades ainda.

Em D'Amelio (2004, 2009) e D'Amelio e Diblasi (2006) estudou-se e caracterizaram-se erros em estudantes no que diz respeito aos conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares, indicando que, embora sejam conceitos aparentemente simples, as ideias espontâneas dos alunos dão origem a respostas incorretas. Concluiu-se, ainda, que as dificuldades e confusões são explicados pela falta de referências para enfrentar estes problemas e, em consequência, propor situações adequadas aos objetivos dos cursos introdutórios de Probabilidades e Estatística.

No caso dos acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes, Fernandes e Barros (2021) realizaram um estudo, em que também participaram professores dos primeiros anos escolares, em que foi pedido aos estudantes para definirem pares de acontecimentos incompatíveis (não complementares), complementares e independentes na experiência de lançamento de um dado duas vezes consecutivas. Os estudantes revelaram muitas dificuldades nestes tipos de acontecimentos, sendo a percentagem de respostas corretas

de 42% nos acontecimentos disjuntos (não complementares), 13% nos acontecimentos complementares e 23% nos acontecimentos independentes. Verifica-se, assim, que os estudantes sentiram mais dificuldades nos acontecimentos complementares, o que parece plausível em relação aos acontecimentos disjuntos uma vez que para os acontecimentos serem complementares requer-se que sejam disjuntos e que a sua união seja o acontecimento certo, portanto exige-se a verificação de mais uma condição do que no caso dos acontecimentos disjuntos.

Já no estudo de Fernandes (2022), os futuros professores dos primeiros anos escolares foram questionados acerca da classificação, definição e exemplificação de acontecimentos disjuntos, tendo-se verificado que os estudantes sentiram muitas dificuldades em qualquer dos itens da tarefa. De entre esses itens, os estudantes foram mais sucedidos na definição de acontecimentos disjuntos, mas não foram capazes de aplicar essa definição à classificação e exemplificação de acontecimentos; na classificação de acontecimentos em disjuntos e não disjuntos, raramente os estudantes apresentaram justificações corretas e completas; e na exemplificação de acontecimentos disjuntos, muitos estudantes não mencionaram a experiência aleatória subjacente aos acontecimentos.

Também num estudo de Fernandes (in press), em que os futuros professores dos primeiros anos escolares foram questionados acerca da classificação, definição e exemplificação de acontecimentos complementares, se verificou que os estudantes tiveram muitas dificuldades em qualquer dos itens da tarefa. Sistemáticamente, estas dificuldades foram mesmo mais acentuadas do as que foram sentidas pelos mesmos estudantes nos acontecimentos disjuntos do estudo anterior (FERNANDES, 2022).

No Brasil, Oliveira Júnior, Neto e Saito (2022) propuseram uma tarefa envolvendo acontecimentos independentes e disjuntos a estudantes brasileiros do ensino superior, tendo por propósito identificar dificuldades a partir das suas resoluções. Dos resultados do estudo, os autores salientam a dificuldade dos estudantes na interpretação do enunciado do problema, o uso inadequado da linguagem comum (termos e expressões) e a falta de clareza na apresentação dos argumentos para a resolução do problema. Com base nas dificuldades encontradas por esses estudantes, sugere-se trabalhar esses conceitos em sala de aula usando diferentes ferramentas

didáticas, como a criação de ambientes de aprendizagem com base em processos de pesquisa e situações reais.

Silva (2022), também no Brasil, analisou a relevância dos temas que envolvem Probabilidades e Estatística nas provas de primeira e segunda fase, dos anos de 2005 a 2019, da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas junto à Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), bem como caminhos sistemáticos de resolução de problemas. Nesse estudo, entre os assuntos mais abordados, destaca-se o estudo do cálculo de probabilidades envolvendo eventos independentes e disjuntos. Esses conceitos estão indicados especificamente no 7.º e 8.º ano do Ensino Fundamental e no Ensino Médio brasileiro. Ademais, buscou-se oferecer subsídios para que professores de matemática da educação básica possam recorrer aos conteúdos probabilísticos, tendo em vista aproximar os seus alunos da abordagem sistemática própria da matemática na resolução de problemas do mundo real que envolvem incerteza.

Da evidência empírica dos estudos revistos conclui-se que os participantes desses estudos revelaram um melhor desempenho na tipologia dos acontecimentos certos, possíveis e impossíveis do que na tipologia dos acontecimentos disjuntos, complementares, complementares e independentes. Tais resultados corroboram a análise racional dos diferentes tipos de acontecimentos, pois no caso dos acontecimentos certos, possíveis e impossíveis está implicado apenas um acontecimento, enquanto nos outros tipos de acontecimentos estão envolvidos dois acontecimentos. Já entre os acontecimentos disjuntos e complementares destaca-se que quaisquer deles devem verificar que a interseção é o acontecimento impossível, mas os complementares devem verificar ainda que a reunião é o acontecimento certo.

METODOLOGIA

Tal como foi antes referido, neste estudo pretende-se investigar o conhecimento de estudantes, futuros professores dos primeiros nos escolares, sobre relações existentes entre acontecimentos disjuntos e complementares a partir dos três objetivos seguintes: 1) Estudar o desempenho dos estudantes no reconhecimento da verdade/falsidade das relações enunciadas entre acontecimentos disjuntos e complementares; 2) Caracterizar as justificações apresentadas pelos estudantes para afirmar a verdade/falsidade das relações enunciadas; e 3) Retirar consequências para a formação em Probabilidades dos futuros professores dos primeiros anos.

Para a consecução dos objetivos do estudo conduziu-se uma investigação, fundamentalmente, quantitativa e de natureza descritiva, em que se analisa uma realidade preexistente através de métodos rigorosos (MCMILLAN; SCHUMACHER, 2014), neste caso relações envolvendo acontecimentos disjuntos e complementares.

Participaram no estudo 37 estudantes do 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, de uma universidade do norte de Portugal. Estes estudantes tinham uma formação matemática variada à entrada na universidade, obtida no ensino secundário em cursos profissionais, em cursos humanísticos ou em cursos científico-tecnológicos.

Os dados usados no presente estudo foram obtidos através da aplicação de um questionário com várias tarefas sobre diferentes tipos de acontecimentos, designadamente, disjuntos, complementares e independentes. Aqui, trata-se a tarefa em que se pretende relacionar acontecimentos disjuntos e complementares, e que se mostra na Figura 1. Aquando da aplicação do questionário os estudantes tinham frequentado, no ensino superior, a unidade curricular de Probabilidades e Estatística, tendo sido assegurado o anonimato dos respondentes, a restrição das pessoas com acesso aos dados e a salvaguarda da confidencialidade dos participantes em qualquer publicação que viesse a ser feita.

Figura 1 – Tarefa proposta aos estudantes

Considere dois acontecimentos, A e B , de uma mesma experiência aleatória. Indique e justifique se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

- a) Se A e B são acontecimentos incompatíveis ou disjuntos, então A e B também são acontecimentos complementares.
- b) Se A e B são acontecimentos complementares, então A e B também são acontecimentos incompatíveis ou disjuntos.
- c) Se A e B são acontecimentos incompatíveis ou disjuntos, então \bar{A} e \bar{B} também são acontecimentos incompatíveis ou disjuntos.
- d) Se A e B são acontecimentos complementares, então \bar{A} e \bar{B} também são acontecimentos complementares.

Fonte: elaboração dos autores.

Na tarefa proposta relacionam-se acontecimentos disjuntos e complementares, e requer-se que os estudantes, perante relações afirmadas entre pares de acontecimentos, declarem a verdade/falsidade dessas relações e que justifiquem as suas respostas. Em cada um dos quatro itens, espera-se que os estudantes deem respostas do tipo ou equivalentes: dados os acontecimentos A e B , em a), a afirmação é falsa porque acontecimentos disjuntos cumprem a

condição $A \cap B = \emptyset$, enquanto acontecimentos complementares devem cumprir, além dessa condição, ainda a condição $A \cup B = U$ (U é o espaço de resultados); em b), a afirmação é verdadeira porque acontecimentos complementares são disjuntos por definição; em c), a afirmação é falsa porque sendo $A \cap B = \emptyset$ não implica que $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$; e, em d), a afirmação é verdadeira porque sendo A e B complementares tem-se $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = U$, donde resulta que $\bar{A} = B$ e $\bar{B} = A$, e, conseqüentemente, $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ e $\bar{A} \cup \bar{B} = U$. Portanto, \bar{A} e \bar{B} são complementares.

Finalmente, em relação ao tratamento e análise de dados, estudaram-se as resoluções dos estudantes relativamente aos tipos de resposta (correta e incorreta) e às justificações dessas respostas. Em ambos os casos, determinaram-se frequências dos tipos de resposta e das justificações das respostas, tendo-se usado tabelas para resumir essa informação. Além disso, tendo em vista proporcionar uma melhor compreensão das respostas dos estudantes e da análise realizada, apresentam-se, ainda, alguns exemplos de respostas dos estudantes, identificados pela letra E (abreviatura de estudante) seguida do número que lhes foi atribuído (de 1 a 37).

ANÁLISES E RESULTADOS

Nesta secção apresentam-se os resultados do estudo a partir dos tipos de resposta, (correta ou incorreta) e das justificações que explicam as respostas.

Tipos de resposta

Analisadas as respostas dos estudantes, na Tabela 1 registam-se as frequências (em %) dos tipos de resposta (correta e incorreta) em cada item da tarefa, incluindo-se também as não respostas.

Tabela 1 – Frequências (em %) dos tipos de resposta nos itens da tarefa

Itens	Tipo de resposta		Não resposta
	Correta	Incorreta	
a) Se A e B são disjuntos, A e B também são complementares.	19 (51)	17 (46)	1 (3)
b) Se A e B são complementares, A e B também são disjuntos.	20 (54)	16 (43)	1 (3)

c) Se A e B são disjuntos, \bar{A} e \bar{B} também são disjuntos.	13 (35)	24 (65)	—
d) Se A e B são complementares, \bar{A} e \bar{B} também são complementares.	26 (70)	11 (30)	—

Fonte: elaboração dos autores.

Observando a Tabela 1 verifica-se que, à exceção do item c), em todos os outros itens mais de metade dos estudantes deram a resposta correta. O item c) revelou-se ser o mais difícil, com apenas cerca de um em cada três estudantes a responder corretamente. Neste caso, os estudantes tiveram dificuldade em reconhecer que sendo dois acontecimentos disjuntos, os seus contrários não são necessariamente disjuntos. Especificamente, quando os acontecimentos não são complementares, os seus contrários não são disjuntos pois se $A \cup B \neq U$, então $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} \neq \emptyset$.

Nos itens a) e b) cerca de metade dos estudantes respondeu corretamente, significando que eles reconheceram que dois acontecimentos disjuntos não são necessariamente complementares, no caso do item a), e que dois acontecimentos complementares são necessariamente disjuntos, no caso do item b).

Por último, o item d) foi aquele em que mais estudantes responderam corretamente, cerca de dois em cada três estudantes, significando que reconheceram que sendo dois acontecimentos complementares, os seus contrários também são complementares. Nesta situação, o acontecimento contrário de cada um dos acontecimentos é o outro acontecimento ($\bar{A} = B$ e $\bar{B} = A$), originando, portanto, os acontecimentos $\bar{A} \cap \bar{B} = B \cap A = A \cap B$ e $\bar{A} \cup \bar{B} = B \cup A = A \cup B$. Portanto, sendo A e B acontecimentos complementares, também \bar{A} e \bar{B} o são. Talvez o maior sucesso dos estudantes neste item se deva ao facto de cada um dos novos acontecimentos coincidir com o outro acontecimento original.

Por fim, de entre os quatro itens da tarefa, verificou-se que apenas um estudante não respondeu aos itens a) e b), concluindo-se que praticamente todos os estudantes responderam a todos os itens.

Embora se tenha obtido um razoável desempenho dos estudantes nos tipos de resposta, verdadeira ou falsa, importa averiguar se as respostas corretas dadas pelos estudantes resultaram de processos resolução e argumentos válidos. Para tal, complementa-se na próxima subsecção

a análise antes efetuada, estudando-se as justificações apresentadas pelos estudantes para explicar as suas respostas.

Justificações das respostas

Uma vez estudadas as resoluções dos estudantes, na Tabela 2 apresentam-se as frequências (em %) dos tipos de justificação apresentadas pelos estudantes para explicar as respostas em cada um dos itens da tarefa.

Tabela 2 – Frequências (em %) das justificações das respostas nos itens da tarefa

Justificações	Item			
	a)	b)	c)	d)
Alusão à definição de acontecimentos	20 (54)	17 (46)	—	2 (5)
Alusão à relação entre acontecimentos	—	2 (5)	11 (30)	5 (14)
Recorrer a diagrama(s) de Venn	—	—	7 (19)	5 (14)
Recorrer a um exemplo	3 (8)	2 (5)	3 (8)	3 (8)
Justificação irrelevante	5 (14)	4 (11)	6 (16)	10 (27)
Sem justificação	8 (22)	11 (30)	10 (27)	12 (32)

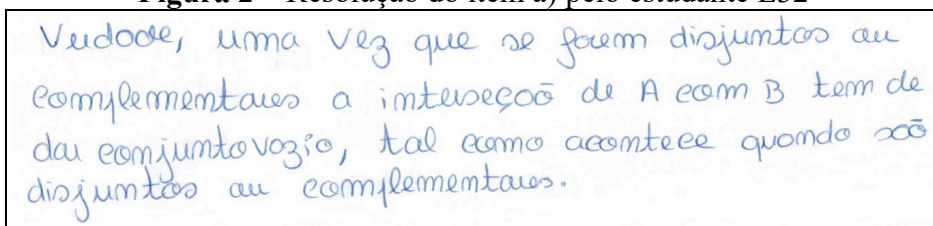
Nota: as percentagens foram calculadas a partir do número total de participantes, ou seja, 37 estudantes.

Fonte: elaboração dos autores.

De seguida analisam-se as justificações apresentadas pelos estudantes em cada um dos itens, apresentando também algumas resoluções dos estudantes a fim de exemplificar essas justificações.

Item a). A justificação “Alusão à definição de acontecimentos” conduziu a respostas corretas (9) e incorretas (11), tratando-se de definições imprecisas e/ou incompletas. No caso das respostas corretas, os estudantes afirmam que nem sempre os acontecimentos disjuntos são complementares (3) ou que se pode não cumprir a condição $A \cup B = U$ (6); no caso das respostas incorretas, os estudantes afirmam que se cumpre a condição $A \cap B = \emptyset$ ou $P(A \cap B) = 0$ (11). Na Figura 2 apresenta-se um exemplo deste tipo de justificação.

Figura 2 – Resolução do item a) pelo estudante E32



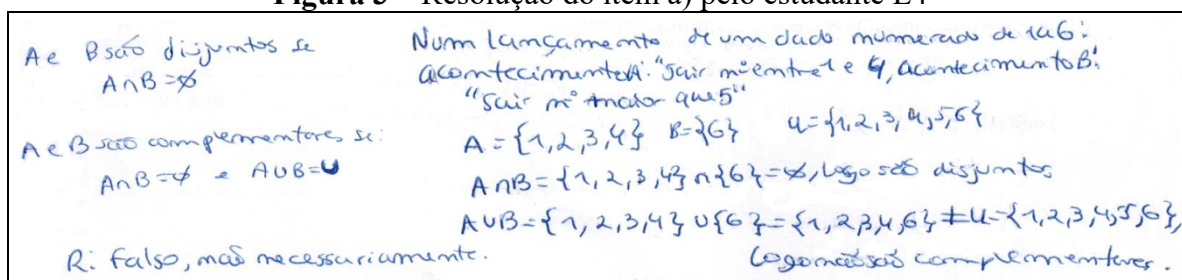
Verdade, uma vez que se forem disjuntos ou complementares a interseção de A com B tem de dar conjunto vazio, tal como acontece quando são disjuntos ou complementares.

Fonte: elaboração dos estudantes.

O estudante E32 reconhece que a interseção de dois os acontecimentos disjuntos ou complementares é um acontecimento impossível, mas ignora que, simultaneamente, a reunião dos acontecimentos complementares é o acontecimento certo. Em consequência, o estudante dá a resposta incorreta.

Também a justificação “Recorrer a um exemplo” originou respostas corretas (1) e incorretas (2). Na Figura 3 regista-se um exemplo deste tipo de justificação.

Figura 3 – Resolução do item a) pelo estudante E4



A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$
A e B são complementares se: $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = U$
R: falso, mas necessariamente.

Num lançamento de um dado numerado de 1 a 6:
o acontecimento A: “sair nº entre 1 e 4”, acontecimento B: “sair nº maior que 5”
 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{6\}$ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{6\} = \emptyset$, logo são disjuntos
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\} \neq U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, logo não são complementares.

Fonte: elaboração dos estudantes.

O estudante E4 considera dois acontecimentos disjuntos (não complementares), da experiência de lançamento de um dado, e verifica que esses acontecimentos não são complementares, obtendo, desse modo, a resposta correta.

Por fim, na “Justificação irrelevante”, que levou a respostas corretas (4) e incorretas (1), os estudantes apresentaram argumentos não pertinentes ou incompreensíveis.

Item b). A justificação “Alusão à definição de acontecimentos” conduziu a respostas corretas (13) e incorretas (4). No caso das respostas corretas, os estudantes referem que se cumprem as condições $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = U$ (9) ou apenas a condição $A \cap B = \emptyset$ (4); enquanto nas respostas incorretas os estudantes consideram que os acontecimentos complementares não cumprem a condição $A \cap B = \emptyset$. Na Figura 4 mostra-se um exemplo de justificação deste tipo.

Figura 4 – Resolução do item b) pelo estudante E9

Verdadeira, porque sendo complementares, $A \cup B = U$ e $A \cap B = \emptyset$ e sendo disjuntos também se verifica que $A \cap B = \emptyset$.

Fonte: elaboração dos estudantes.

O estudante E9 enuncia as duas condições que se devem verificar para que dois acontecimentos sejam complementares e, de seguida, constata que uma dessas condições (a condição $A \cap B = \emptyset$) permite concluir que os acontecimentos também são disjuntos, obtendo, assim, a resposta correta.

Na justificação “Alusão à relação entre acontecimentos”, os estudantes (2) afirmam apenas que os acontecimentos complementares não são necessariamente disjuntos. Já na justificação “Recorrer a um exemplo”, os estudantes (2), na experiência de lançamento de um dado, definem dois acontecimentos complementares e concluem que esses acontecimentos não são disjuntos. Na Figura 5 mostra-se um exemplo deste último tipo de justificação.

Figura 5 – Resolução do item b) pelo estudante E35

Falsa
Exemplo: Numma experiência aleatória, com dados numerados de 1 a 6:
 $A = \{1, 2, 3\}$ $A \cap B = \emptyset$ São complementares
 $B = \{4, 5, 6\}$ $A \cup B = U$ mas não são disjuntos

Fonte: elaboração dos estudantes.

O estudante E35 define os conjuntos correspondentes aos acontecimentos “obter um número inferior 4” e “obter um número superior a 3”, na experiência de lançamento de um dado, e constata que são acontecimentos complementares. Sem dar qualquer outra explicação, conclui que os acontecimentos não são disjuntos e, portanto, dá a resposta incorreta.

Por último, a “Justificação irrelevante” levou os estudantes a responderem de forma correta (3) ou incorreta (1).

Item c). A justificação “Alusão à relação entre acontecimentos” conduziu a respostas corretas (2) e incorretas (9). No caso das respostas corretas, os estudantes limitam-se a afirmar a falsidade da afirmação, e no caso das respostas incorretas observam que $\bar{A} = B$ e $\bar{B} = A$ e concluem que os acontecimentos são disjuntos. Na Figura 6 regista-se um exemplo deste tipo de justificação.

Figura 6 – Resolução do item c) pelo estudante E13

Verdade, pois o contrário de A vai ser igual a B e o contrário de B vai ser igual a A . Então, se A e B são acontecimentos disjuntos \bar{A} e \bar{B} também o são.

Fonte: elaboração dos estudantes.

O estudante E13, sem o declarar, atribui aos acontecimentos A e B propriedades de acontecimentos complementares e conclui que os contrários desses acontecimentos são disjuntos. Assim, ao não considerar acontecimentos disjuntos (não complementares), ele obtém a resposta incorreta.

Já na justificação “Recorrer a diagrama(s) de Venn”, todos os estudantes (7) responderam corretamente. Na justificação “Recorrer a um exemplo”, responderam de forma correta (1) ou incorreta (2), dependendo do facto de definirem dois acontecimentos disjuntos (não complementares) ou complementares na experiência de lançamento de um dado, respetivamente. Na Figura 7 regista-se um exemplo deste último tipo de justificação.

Figura 7 – Resolução do item c) pelo estudante E12

A afirmação é verdadeira porque se, $A = \{1, 3, 5\}$ e $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$
 $B = \{2, 4, 6\}$ e $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$ então se nós
os contrários vão ser incompatíveis, porque $\bar{B} = A$ e $\bar{A} = B$

Fonte: elaboração dos estudantes.

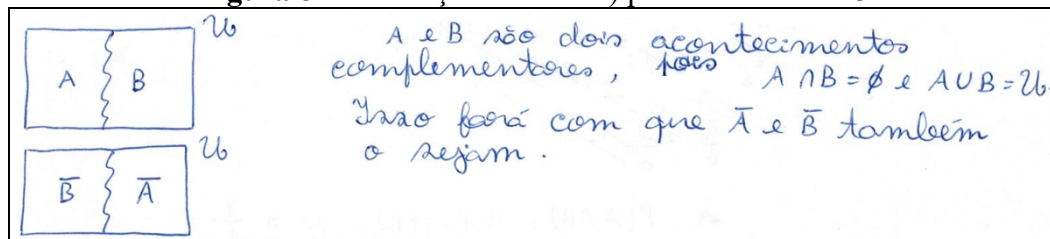
O estudante E12, sem o declarar, considera os acontecimentos “obter face ímpar” e “obter face para”, na experiência de lançamento de um dado, determina os acontecimentos contrários e conclui que eles são disjuntos. Tal como o estudante E13 (ver Figura 6), ao não considerar acontecimentos disjuntos (não complementares), ele chega à resposta incorreta, sendo que este estudante recorreu a um exemplo concreto e aquele usou um exemplo genérico.

Finalmente, a “Justificação irrelevante” conduziu os estudantes a responderem de forma correta (1) ou incorreta (5).

Item d). Na justificação “Alusão à definição de acontecimentos”, os estudantes (2) definiram incorretamente acontecimentos complementares, o que os levou a responder também incorretamente, enquanto na justificação “Alusão à relação entre acontecimentos”, os estudantes (5) afirmaram que $\bar{A} = B$ e $\bar{B} = A$ e responderam corretamente. Já na justificação

“Recorrer a diagrama(s) de Venn”, os estudantes responderam corretamente (5) e incorretamente (1), consoante consideraram acontecimentos complementares e disjuntos (não complementares), respetivamente. Na Figura 8 exemplifica-se uma justificação desse tipo.

Figura 8 – Resolução do item d) pelo estudante E23

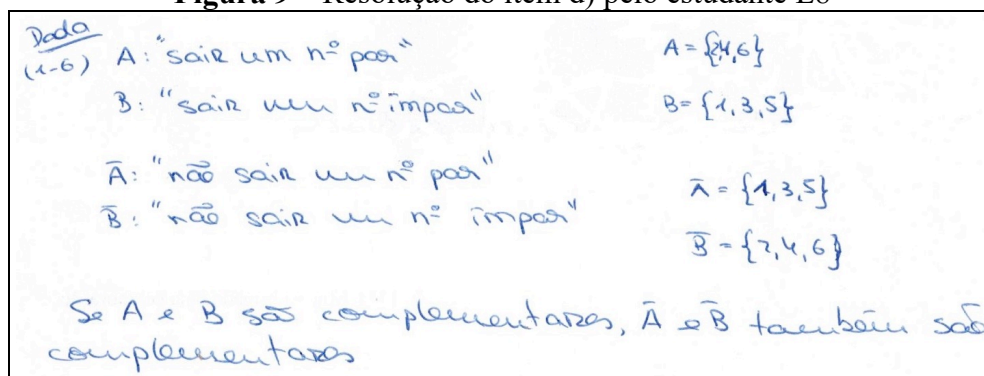


Fonte: elaboração dos estudantes.

O estudante E23 representa os acontecimentos complementares A e B e os acontecimentos \bar{A} e \bar{B} em diagramas de Venn separados, assume implicitamente que $A = \bar{B}$ e $B = \bar{A}$ e conclui que os acontecimentos \bar{A} e \bar{B} também são complementares.

Na justificação “Recorrer a um exemplo” os estudantes, a partir da experiência de lançamento de um dado, obtêm a resposta correta (2) e a resposta incorreta (1), consoante definem acontecimentos complementares e disjuntos (não complementares), respetivamente. Na Figura 9 mostra-se um exemplo deste tipo de justificação.

Figura 9 – Resolução do item d) pelo estudante E8



Fonte: elaboração dos estudantes.

O estudante E8 define os acontecimentos “obter uma face par” e “obter uma face ímpar”, na experiência de lançamento de um dado, de seguida define os acontecimentos contrários e conclui que eles também são complementares. Deste modo, o estudante obtém a resposta correta.

Por último, a “Justificação irrelevante” conduziu os estudantes à resposta correta (6) ou incorreta (4).

Finalmente, em todos os quatro itens verifica-se uma elevada percentagem de estudantes que não apresentaram qualquer justificação, variando essa percentagem entre 22% (mínimo) e 32% (máximo). Comparativamente com qualquer tipo de justificação, na globalidade dos quatro itens, foi maior a percentagem de estudantes que omitiram a justificação.

DISCUSSÃO

Em termos dos tipos de resposta, verificou-se que em cada item, em média, se obteve uma percentagem de 53% de respostas corretas, de 46% de respostas incorretas e 1% de não respostas. Portanto, podemos dizer que o desempenho dos estudantes foi razoável porque mais de metade respondeu corretamente. De entre os quatro itens, os estudantes tiveram mais dificuldades em reconhecer que sendo disjuntos dois acontecimentos, os seus contrários podem não ser disjuntos (item c), e tiveram menos dificuldades em reconhecer que sendo dois acontecimentos complementares, os seus contrários também são complementares (item d). No item d), o facto de cada acontecimento contrário coincidir com um dos acontecimentos dados, poderá explicar o melhor desempenho dos estudantes neste item, enquanto no item c) isso pode não acontecer.

Outra possível explicação para o diferente desempenho nos itens c) e d) pode ter origem na crença dos estudantes de que dois acontecimentos e os seus contrários são acontecimentos do mesmo tipo, isto é, ambos disjuntos ou ambos complementares. Em consequência, tal como aconteceu, no item c), porque a crença não é válida, a maioria dos estudantes deu a resposta incorreta, enquanto no item d), porque a crença é válida, a maioria dos estudantes deu a resposta correta.

Já as justificações das respostas são mais problemáticas, destacando-se a “Justificação irrelevante” e “Sem justificação”, com uma média, por item, de 17% e 28%, respetivamente. Assim, perfazendo, em média, um total de 45% por item, constata-se que pouco menos de metade dos estudantes apresentaram justificações sem relação com o que se pretendia, incompreensíveis ou não apresentaram qualquer justificação. No caso das respostas corretas, verificou-se que em cada item, em média, 21% dessas respostas estão associadas a justificações

irrelevantes ou sem justificação. Além disso, excluindo a “Justificação irrelevante”, os restantes tipos de justificação, que foram usados, em média, em 54% dos casos por item, muitos apresentam limitações quer em relação às definições e relações dos acontecimentos, quer em relação à prova baseada num exemplo ou em diagrama(s) de Venn. Sobretudo, a justificação com base num exemplo é problemática porque não permite validar uma propriedade genérica a partir de um exemplo específico.

Considerando os estudos revistos anteriormente, no âmbito do contexto teórico, conclui-se que os participantes foram mais sucedidos na tipologia dos acontecimentos certos, possíveis e impossíveis (FERNANDES; BARROS, 2005; FERNANDES, 2000; FISCHBEIN; NELLO; MARINO., 1991), tanto na vertente de classificação como de formulação, do que na tipologia de acontecimentos disjuntos, complementares e independentes, seja na vertente de definir os acontecimentos (FERNANDES; BARROS, 2021), seja na vertente de relacionar acontecimentos disjuntos e complementares, como aconteceu no presente estudo. Tal com neste estudo, também Fernandes (2018) constatou que os futuros professores dos primeiros anos consideraram como sendo incompatíveis acontecimentos não disjuntos.

Restringindo o estudo aos acontecimentos disjuntos e complementares, verificou-se que os futuros professores dos primeiros anos tiveram um melhor desempenho nos primeiros do que nos segundos, seja na classificação, definição ou exemplificação dos acontecimentos (FERNANDES, 2022, in press). Já nas relações envolvendo acontecimentos disjuntos e complementares, conclui-se que o desempenho dos futuros professores dos primeiros anos é análogo àquele que se verificou no estudo dos acontecimentos complementares.

Por outro lado, a exploração da tipologia de acontecimentos disjuntos e complementares bem com das suas relações envolvem também aspetos lógicos, designadamente a operação de implicação ou inclusão (os acontecimentos complementares são disjuntos) e de negação (o complementar de um acontecimento). No estudo de Fernandes (2018), futuros professores dos primeiros anos sentiram muitas dificuldades em responder corretamente a três itens envolvendo os conetivos *e* e *ou* e a probabilidade condicional, tendo-se obtido por item, em média, 26,8% de respostas corretas.

CONCLUSÕES

A metodologia de pesquisa neste estudo permitiu analisar as produções realizadas pelos estudantes diante de um problema de Probabilidades. Especificamente, nesta pesquisa, o objeto estudado refere-se a relações envolvendo acontecimentos disjuntos e complementares, em que se solicita aos estudantes provas da verdade ou falsidade dessas relações.

O presente estudo mostra que um desempenho razoável dos estudantes na escolha da resposta correta, do tipo verdadeiro ou falso, não é necessariamente acompanhado por justificativas adequadas, pois, em cada item, em média, quase metade dos estudantes apresentaram justificativas irrelevantes ou não apresentaram qualquer justificativa.

Ora, este resultado implica que seja dada maior atenção, na formação destes futuros professores, à formulação de justificativas adequadas. Mesmo não se tratando de argumentos formais, é necessário que esses argumentos, embora de natureza mais informal, justifiquem cabalmente a verdade ou falsidade das proposições e propriedades.

Ademais, com base em estudos realizados por D'Amelio (2004, 2009), D'Amelio e Diblasi (2006), Fernandes (2022, in press) e Oliveira Júnior, Carvalho e Sato (2022), em que participaram estudantes do ensino superior argentinos, portugueses e brasileiros, respectivamente, consideramos que os resultados obtidos nesses estudos são aderentes ao que o presente estudo indica, ou seja, que se têm evidenciado dificuldades e confusões nos conceitos de acontecimentos disjuntos e complementares. Portanto, a falta de uma base teórica adequada para explorar esses conceitos deve ser colmatada através de um planejamento adequado que se ajuste aos objetivos dos cursos introdutórios de Probabilidades e Estatística.

Mais concretamente, a exploração das relações entre acontecimentos disjuntos e complementares, tal como aconteceu no presente estudo, certamente contribuirá para que os estudantes elaborem uma adequada caracterização destes tipos de acontecimentos. No estudo dessas relações entre os acontecimentos revela-se quais atributos se verificam e quais falham, além de que o estudo das relações entre conceitos se assume como aprendizagem significativa (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980; SKEMP, 1993).

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D.; NOVAK, J.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BATANERO, C. La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación? In: FERNANDES, J. A.; CORREIA, P. F.; MARTINHO, M. H.; VISEU, F. (Eds.). **ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA**, Braga, 2013. **Proceedings...** Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 2013. p. 9-21.

BATANERO, C.; ÁLVAREZ, R. A.; HERNÁNDEZ, L. A. S.; GEA, M. M. S. El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. **PNA Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática**, Granada, v. 15, n. 4, p. 267-288, 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

D'AMELIO, A. T. Eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes: concepciones y dificultades. In: MORENO, L. D. (Ed.). **Acta of 17th Latinoamericana de Matemática Educativa**, México, 2004. p. 137-142.

D'AMELIO, A. T. Undergraduate student difficulties with independent and mutually exclusive events concepts. **The Mathematics Enthusiast**, v. 6, n. 1, p. 47-56, 2009.

D'AMELIO, A. T.; DIBLASI, A. Analysis of didactic suggested distinguishing disjunctive events and independent events. In: ROSSMAN, A.; CHANCE, B. (Eds.). **Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics**, Salvador, Brazil, 2006.

FERNANDES, J. A. Classificação, definição e formulação de acontecimentos complementares em Probabilidades por futuros professores dos primeiros anos. **Góndola, Enseñ Aprend Cienc**, Bogotá, in press.

FERNANDES, J. A. Classificação, definição e formulação de acontecimentos disjuntos por futuros professores dos primeiros anos escolares. **Revista de Educación Estadística**, Talca, v. 1, n. 1, p. 1-18, 2022.

FERNANDES, J. A. **Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade**. Tese (Doutoramento em Educação – Metodologia do Ensino da Matemática), Universidade do Minho, Braga, 2000.

FERNANDES, J. A. Probabilidade de acontecimentos envolvendo aspetos lógicos. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 60, p. 172-190, 2018.

FERNANDES, J. A.; BARROS, P. M. Definir acontecimentos incompatíveis, complementares e independentes. **Indagatio Didactica**, Aveiro, v. 13, n. 1, p. 31-42, 2021.

FERNANDES, J. A.; BARROS, P. M. Dificuldades de futuros professores do 1.º e 2.º ciclos em estocástica. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (CIBEM), 5, 2005, Porto. **Anais...** Porto: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2005.

FERNANDES, J. A.; GEA, M. M.; CORREIA, P. F. Definição de acontecimentos certos na extração de berlindes de um saco. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 18, n. 1, p. 83-100, 2016.

FISCHBEIN, E.; Gazit, A. Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 15, n. 1, p. 1-24, 1984.

FISCHBEIN, E.; NELLO; M. S.; MARINO, M. S. Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, n. 6, p. 523-549, 1991.

GREEN., D. R. **Probability concepts in 11-16 year old pupils**. Centre for Advancement of Mathematical Education in Technology, Loughborough University of Technology, 1982.

MCMILLAN, J.; SCHUMACHER, S. **Research in education: evidence-based inquiry**. 7. ed. Harlow: Pearson, 2014.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Aprendizagens Essenciais de Matemática: Ensino Secundário**. Lisboa: Autor, 2018b.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Aprendizagens Essenciais de Matemática: Ensino Básico**. Lisboa: Autor, 2018a.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE. **Real Decreto 126/2014**, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Madrid: Autor, 2014.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Princípios e normas para a Matemática escolar**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 2007.

NIKIFORIDOU, Z.; PANGE, J. The notions of chance and probabilities in preschoolers. **Early Childhood Education Journal**, Abingdon, v. 38, n 4, p. 305-311, 2010.

OLIVEIRA JÚNIOR, A. P.; BARROS NETO, D. F.; SAITO, S. Evaluar conceptos de eventos independientes y mutuamente excluyentes en el pensamiento del estudiantado de la educación superior. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 24, n. 5, p. 27-53, 2022.

ORTIZ, J. J.; MOHAMEND, N. Conocimiento de futuros profesores sobre espacio muestral. **Quadrante**, Lisboa, v. 23, n. 2, 5-22, 2014.

SILVA, J. A. **Uma análise das questões de probabilidade e estatística na Olimpíada Brasileira De Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)**. 2022, 142f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, Ceará, 2022.

SKEMP, R. R. **The psychology of learning mathematics**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1993.

HISTÓRICO

Submetido: 14 de setembro de 2022.

Aprovado: 10 de abril de 2023.

Publicado: 28 de maio de 2023.