RIDEMA
Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática

Uma leitura de Produções de Significados na constituição da noção de base em Álgebra Linear

A reading of Meaning Productions in the constitution of the notion of base in Linear Algebra

Amarildo Melchiades da Silva[1]
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Janete Bolite Frant[2]
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)

Viviane Cristina Almada de Oliveira[3]
Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ)

RESUMO

Neste artigo será apresentada uma leitura de processos de produção de significados a partir de registros de trabalhos de sujeitos históricos, reconhecidos como participantes da emergência de noções constitutivas do que atualmente é compreendido como base em Álgebra Linear. O objetivo do artigo é responder à seguinte pergunta: em que contextos e com quais objetos operavam matemáticos que participaram da constituição da noção de base no processo histórico de emergência da Álgebra Linear? Para isso, foram selecionados os matemáticos F. G. Frobenius (1849 – 1917), L. Eüler (1707 – 1783), W. R. Hamilton (1805-1865), H. G. Grassmann (1809 -1877) e G. Peano (1852-1932) como informantes. A leitura da produção de significados dos sujeitos de pesquisa foi fundamentada no Modelo dos Campos Semânticos, proposto por Lins (1993, 2012). O resultado da análise foi a identificação de diferentes significados que podem ser produzidos para a noção de base, com vistas a considerá-los para criar e desenvolver propostas de ensino e entender e intervir em processos de aprendizagem da Álgebra Linear no interior de Licenciaturas em Matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática; Produção de Significados; Base; Álgebra Linear; História da Matemática.

[1] Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Professor Titular do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Juiz de Fora, MG, Brasil. Endereço: Av. Presidente Itamar Franco, 1955/301, São Mateus, Juiz de Fora, MG, Brasil, CEP 36016-321. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-1774-02222. Lattes: http://lattes.cnpq.br/4205648131746032. E-mail: xamcoelho@gmail.com

[2] Doutorado em Educação Matemática pela New York University. Professora Adjunto I da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. Endereço: Rua Ribeiro de Almeida, 21/402, Laranjeiras, RJ, RJ, Brasil, CEP: 22240-060. ORCID Id: https://orcid.org/0000-0003-4748-0112. Lattes: http://lattes.cnpq.br/6448067915827359. E-mail: janetebf@gmail.com

[3] Doutorado em Educação Matemática pela Universidade Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Professora Associado II do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), São João del-Rei, MG, Brasil. Endereço: Praça Frei Orlando, 170 – Centro, São João del-Rei – MG, Brasil, CEP 36307-334. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4488-2290. Lattes: http://lattes.cnpq.br/2888405693131286. E-mail: viviane@ufsj.edu.br

ABSTRACT

In this article, will be present a reading of processes of production of meanings from records of the work of historical subjects, recognized as participants in the emergence of constitutive notions of what is currently understood as a basis in Linear Algebra. The objective of the article is to answer the following question: in what contexts and with what objects did mathematicians operate who participated in the constitution of the notion of base in the historical process of emergence of Linear Algebra? For this, were selected mathematicians F. G. Frobenius (1849 - 1917), L. Euler (1707 - 1783), W. R. Hamilton (1805-1865), H. G. Grassmann (1809 - 1877) and G. Peano (1852-1932) as our informants. The reading of the research subjects' production of meanings was based on the Semantic Fields Model, proposed by Lins (1993, 2012). The result of analysis was the identification of different meanings that can be produced for basis, with a view to considering them to create and develop teaching proposals and to understand and intervene in Linear Algebra learning processes within Degrees in Math.

Keywords: Mathematics Education; Production of Meanings; basis; Linear algebra; History of Mathematics.

INTRODUÇÃO

Este artigo tem como objetivo subsidiar estudos sobre os processos de ensino e de aprendizagem da Álgebra Linear com vistas à formação de professores no interior de Cursos de Licenciatura em Matemática. Para tanto, faremos uma análise documental, norteada pela seguinte questão diretriz: em que contextos e com quais objetos operavam matemáticos que participaram da constituição da noção de base no processo histórico de emergência de noções elementares da Álgebra Linear?

Os termos significado e objeto, assim como a expressão produção de significados, são referenciados pelo Modelo dos Campos Semânticos (LINS, 1993; 2020), um modelo epistemológico em Educação Matemática que será utilizado neste artigo para fundamentar as análises realizadas. Na próxima seção deste texto, serão apresentadas as principais ideias desse referencial que subsidiarão o trabalho aqui desenvolvido.

Na busca em realizar uma leitura plausível sobre como operavam matemáticos que contribuíram na constituição da noção de base, os objetos com os quais cada um deles operava na atividade matemática em que estava envolvido serão por nós apontados, mesmo que não tenha sido feita alusão aos mesmos adotando-se as nomenclaturas hoje usuais, tais como vetor, combinação linear, dependência e independência linear, dimensão e base. Vale observar que, neste momento, não estamos interessados em um estudo histórico exaustivo sobre a gênese da noção de base, pois nossas entradas serão feitas em alguns domínios onde há evidências do surgimento dessa noção considerando o trabalho de produção de alguns matemáticos. Sendo assim, informamos que não desenvolvemos aqui um estudo histórico sobre a emergência da noção de base, nem tão pouco nos ocupamos da apresentação de uma sequência cronológica de fatos históricos. Um estudo dessa natureza pode ser encontrado, por exemplo, em Dorier (1990). O que faremos é uma imersão em alguns textos com discussões históricas de modo a encontrar alguns matemáticos, dos quais se esperam apresentações referenciadas nas culturas matemáticas da época a que pertenciam, de modo a entender em que contexto e com quais objetos operavam e, assim, buscar entender o que poderiam ter dito sobre o que viria a ser a noção de base no século XX.

A relevância de um estudo histórico de caráter epistemológico para tomar decisões a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem foi evidenciada, em particular, na tese de doutorado do educador matemático Romulo Campos Lins, intitulada *A framework for understanding what algebraic thinking is*. Tal trabalho levou Lins a uma caracterização de pensamento algébrico e lançou luz sobre a educação algébrica escolar. Sobre a importância desse estudo, Lins (1994, p. 05) afirma:

> (...) nos textos históricos vamos encontrar informantes muito mais competentes do que podemos esperar de nossos alunos: os que escreveram os textos históricos eram profissionais, de quem se esperava apresentações referenciadas nas culturas matemáticas a que pertenciam, de modo que podemos avaliar com razoável precisão em que consistia esta demanda de precisão, bem como de que forma se conduzia a justificação das afirmações feitas, e é aí que vamos nos encontrar com os mundos (epistemológicos) daqueles a quem queremos entender.

Seguindo essa perspectiva, a metodologia do nosso estudo foi, após uma revisão da literatura de textos históricos, eleger alguns matemáticos que estiveram no processo de elaboração do que viria a se chamar Álgebra Linear, mais especificamente, na emergência da noção de base em espaços de dimensão finita, e compreender os contextos nos quais realizaram suas produções. Identificamos, assim, que tal emergência aconteceu em meio a diferentes assuntos e em momentos distintos.

Começamos pelo desenvolvimento da teoria dos sistemas de equações lineares, cuja importância para os nossos interesses pode ser compreendida com o seguinte comentário de Dorier: “O estudo dos sistemas foi desde o início, um domínio privilegiado. Ele esteve na origem da emergência de todos os primeiros conceitos [da Álgebra Linear] e foi também o quadro de elaboração dos primeiros resultados teóricos mesmo que informais” (DORIER,1990, p. 88, tradução e comentário nossos). Nesse domínio, nosso interesse recai sobre F. G. Frobenius (1849-1917), matemático que esteve no processo final de elaboração da teoria geral de resolução de sistemas de equações lineares.

Nosso segundo informante será Leonhard Eüler (1707-1783), nome importante na teoria das equações diferenciais, que desempenhou um papel relevante ao lado de J. R. d'Alembert (1717 -1783) e J. L. Lagrange (1738-1813). No domínio ao qual designaremos de cálculo vetorial analisaremos os trabalhos de dois contemporâneos: W. R. Hamilton (1805-1865) e H. G. Grassmann (1809-1877). Nossa análise tocará seu fim com Giusseppe Peano (1852-1932) que, apoiando-se na obra de Grassmann, apresentou definições mais gerais dos espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, que são muito próximas das definições axiomáticas atuais.

Com as análises apresentadas, observamos a existência de distintos contextos de desenvolvimento dos estudos e produções dos matemáticos escolhidos, o que pode servir como referência para proposição de situações de ensino nas quais diferentes significados a partir da noção de base podem ser produzidos por estudantes e, desse modo, contribuir para a ampliação das possibilidades de aprendizagem da noção de base, no âmbito da Álgebra Linear.

O QUADRO TEÓRICO PARA A LEITURA HISTÓRICA

O referencial que adotaremos para a nossa análise, como já sinalizamos, é o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), um modelo epistemológico elaborado por Lins (1993, 2012), cujos constructos principais para nossa análise serão descritos a seguir.

O termo significado tem um papel central em nossa discussão e é descrito como sendo aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre um objeto no interior de uma atividade[4]. Dessa perspectiva, um objeto não é pré-existente à atividade; ele é nela constituído, a partir do que o sujeito de fato diz sobre ele. Como observou Lins (2012, p. 29, grifos do autor): "Nós constituímos objetos (instituímos, criamos, inventamos, reinventamos...) produzindo significados. Nós pensamos *com* e *sobre* objetos. São objetos que estruturam nossa cognição (que é, portanto, situada, no sentido técnico do termo)". Por exemplo, em nosso estudo, podemos perguntar: quais objetos foram constituídos por Frobenius ao falar de sistemas homogêneos de equações? Ou, que significados foram

[4] O termo atividade é tomado no MCS no sentido proposto por Leontiev (sd).

doi 10.34019/2594-4673.

produzidos por Hamilton ao constituir em objeto quatérnios? Ou ainda, que significados foram produzidos por Eüler para equações diferenciais lineares e quais objetos foram constituídos por ele associados à noção de base de soluções de uma equação diferencial?

Assim, "dizer que um sujeito produziu significados é dizer que ele produziu ações enunciativas a respeito de um objeto no interior de uma atividade" (SILVA, 2003, p. 9). No caso dos matemáticos considerados neste estudo, entendemos a atividade de cada um deles como a atividade de pesquisa em que estavam imersos produzindo conhecimento sobre seus temas de estudo.

Nessa direção é importante que apresentemos a noção de conhecimento, proposto por Lins (1993, p. 86, grifos do autor) nos seguintes termos:

> *Conhecimento* é entendido como uma *crença* - algo que o sujeito acredita e expressa, e que caracteriza-se, portanto, como uma *afirmação* – junto com o que o sujeito considera ser *uma justificação* para sua *crença-afirmação*.

Dito em outras palavras, um conhecimento consiste naquilo que o sujeito enuncia, algo em que acredita (a crença-afirmação) junto com aquilo que o sujeito entende como lhe autorizando a dizer o que diz (a justificação). Assim, a consequência mais importante dessa formulação para a discussão que segue é a de afirmar que, da perspectiva do MCS, o conhecimento é do domínio da enunciação e não do enunciado. Decorre daí que a Matemática – em particular a Álgebra Linear – é entendida como um texto e não conhecimento. Podemos explicar essa perspectiva teórica dizendo que para Lins não há conhecimento em um livro de matemática – e, portanto, numa teoria matemática – o conhecimento é produzido quando alguém de dispõe a produzir significados, a falar, a partir da leitura daquele livro. Será com essa perspectiva teórica que serão lidos os textos históricos.

Nessa direção, em nossa análise, consideraremos os textos analisados como sendo constituídas por um autor – aquele que escreveu o texto –, que chega para nós como como o resíduo de uma enunciação para o qual, como leitores, nos constituiremos, ao fazer a leitura, em autores produzindo significado para aquele texto.

No processo de produção de significados e no processo de produção de conhecimento focaremos em três elementos em nossa análise epistemológica: na constituição dos objetos, na maneira de operar de cada um dos sujeitos em cada contexto e na lógica das operações associada às suas operações. Dito de uma forma simples, as *operaçõe***s** são entendidas como sendo o que o sujeito faz com os objetos e a *lógica das operações* diz respeito ao que garante que ele pode fazer aquela operação.

Segundo Lins e Giménez (1997, p.114), "toda operação é realizada segundo uma lógica", sendo assim, é essencial a investigação dessas lógicas se queremos entender do que os sujeitos estão dizendo. E a lógica das operações se refere exatamente a um conjunto de afirmações, aquilo que pode ser feito com os objetos. O contexto de nossa análise, apresentada a seguir, será um ambiente propício para discutir essas ideias.

DIFERENTES CONTEXTOS E OBJETOS: POSSÍVEIS SIGNIFICADOS PARA BASE

Frobenius e os Sistemas de Equações Lineares Numéricas

A resolução de sistemas de várias equações a várias incógnitas já era conhecida desde os babilônios. No século XVII, as técnicas práticas de resolução por eliminação e substituição eram largamente utilizadas para resolver sistemas lineares numéricos, em sua maioria aqueles que possuíam o mesmo número de equações e incógnitas. Porém, uma teoria geral de resolução de sistemas lineares só iria emergir a partir do século XVIII.

No processo desse desenvolvimento, rumo a uma teoria geral, os determinantes tiveram uma posição central pois permitiram dar fórmulas explícitas à resolução de sistemas lineares. A importância dos determinantes reside, ainda, no fato de que durante muito tempo os principais resultados da Álgebra Linear estiveram reunidos em torno dessa teoria. Sua gênese é descrita do seguinte modo por Boyer (1974, p. 376):

> A história dos determinantes é estranhamente confusa, com pedaços do assunto aparecendo esporadicamente na China, em trabalhos de Leibniz, numa regra de Cramer, e alguns resultados simétricos de Lagrange. Só no séc. XIX é que um desenvolvimento continuado teve lugar iniciado em grande parte, ao menos no continente europeu, por Cauchy e Jacobi.

A solução de sistemas de equações lineares em duas, três e quatro variáveis pelo método de determinantes foi criada por Colin Maclaurin (1698-1746); provavelmente em 1729 e publicada postumamente em 1748 numa obra intitulada *Treatise of Algebra*. Nesse trabalho aparece, pela primeira vez, a regra de Cramer. O matemático suíço Gabriel Cramer (1704-52) publicou-a independentemente, em 1750, em sua *Introduction à L'analyse Des Lignes Courbes Algébriques,* com uma notação mais próxima à atual, o

doi 10.34019/2594-4673.

que talvez seja responsável pela opção do mundo matemático pelo nome consagrado na regra.

Por esta época, surgiu um problema que, segundo Dorier (1990), foi um dos primeiros problemas onde apareceu a noção de dependência e independência linear – o paradoxo de Cramer.

Os matemáticos do século XVII deram grande importância ao estudo de interseções de curvas algébricas[5], sendo o cálculo do número de interseções entre duas dessas curvas, um problema que se pôs imediatamente. O estudo de curvas de grau superior a dois teve seu desenvolvimento no século XVIII e veio a ser conhecido como a teoria de curvas planas superiores. O primeiro estudo extenso sobre o assunto foi feito por Isaac Newton (1642-1727) em seu *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis*, em 1704. James Stirling (1692-1770), em seu *Linea Tertii Ordinis Neutonianae* (1707), mostrou que uma curva algébrica de grau n (em x e y) é determinada por $n \cdot (n+3)/2$ pontos.

Em 1720, Maclaurin publicou dois tratados sobre curvas: Geometria Orgânica e *De Linearum Geometricarum Proprietatibus*. Na primeira obra ele estendeu os resultados de Newton e Stirling sobre cônicas, cúbicas e curvas algébricas de grau superior. Nesse tratado encontramos uma proposição frequentemente conhecida como teorema de Bézout – uma curva de ordem m corta uma curva de ordem n em geral em $m \cdot n$ pontos. Tratando deste teorema, Maclaurin observou uma dificuldade que é usualmente conhecida como paradoxo de Cramer, em honra de um descobridor posterior, a saber: uma curva de ordem n em geral é determinada, como Stirling tinha indicado, por $n \cdot (n+3)/2$ pontos. Assim, uma cônica é univocamente determinada por cinco pontos e uma cúbica deveria ser determinada por nove pontos. Porém, $n \cdot (n+3)/2$ pontos nem sempre determinam uma curva de ordem n. A resposta para o paradoxo só apareceu um século depois, quando foi explicado na obra de Plücher (1801-1868) (BOYER, 1974).

Nosso interesse, neste paradoxo, reside no fato de que ele leva a questões de resolução de sistemas lineares e à noção de dependência linear de equações.

Em seu livro de 1750, intitulado *Introduction À L'analyse des Courbes Algébriques* (o mesmo no qual ele introduziu os determinantes), Cramer estuda em

---

[5] São as curvas cujas equações são dadas por $f(x, y) = 0$ onde f é um polinômio em x e y.

detalhes o caso $n = 2$. O paradoxo surge quando $n \geq 3$. Cramer fala disso em seu livro e parece ter submetido o problema a L. Eüler (1707-1783) que escreveu, no mesmo ano, um artigo intitulado *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes*. Neste artigo ele inicia apresentando os dois teoremas – o Teorema de Bézout e o paradoxo de Cramer – e analisa o paradoxo para n = 3, 4, 5 antes de concluir que a mesma contradição ocorre para todas as ordens superiores. Então ele esclarece a falha dizendo:

> (...) Pensando bem no estado desta proposição, onde $n \cdot (n+3)/2$ pontos dados não bastam para determinar a curva de ordem n, que pode ser tirada por estes pontos, ou o que daria no mesmo, que $n \cdot (n+3)/2$ equações não bastam para determinar tantos coeficientes (...) (DORIER, 1990, p. 27).

Ele ilustra esta consideração através da análise de uma, duas e três retas e suas posições relativas. Ele então analisa o caso no qual duas equações lineares com duas variáveis têm solução única; caso sejam diferentes ou que uma não seja múltipla da outra. Ele examina em seguida o caso de três equações, mostrando que além do caso onde uma equação está contida na outra, pode ocorrer o caso em que uma esteja contida nas duas outras. Sobre este fato, Dorier (1990, p. 28) diz: "vemos aqui a noção de dependência linear fundar-se passo a passo; a passagem de duas a três equações é neste sentido fundamental".

Eüler examina, ainda, o caso de quatro equações, dando depois a seguinte regra geral:

> Quando consideramos que para determinar n quantidades desconhecidas, basta ter n equações que exprimam suas relações mutuais acrescendo nisso a restrição de que todas as equações sejam diferentes entre si, ou não tenha nenhuma que seja contida nas outras ou proporcionais às outras (DORIER, 1990, p. 28).

A respeito desse resultado Dorier (1990, p. 28) observa: "com esta proposição um pouco lacônica, o conceito de dependência linear é ainda imperfeitamente lançado (...)". Ele observa, ainda, que para a época este foi um progresso decisivo por tocarem em uma problemática – o conceito de equações dependentes – mostrando que as condições que elas determinavam sobre as incógnitas eram menos numerosas do que parecia.

Veremos a seguir que a noção de dependência linear de equações é um conceito que se afirmará depois de Eüler e será empregado como consideramos atualmente.

Por volta de 1860, a resolução de sistemas não quadrados ou de determinante nulo – que não podem ser resolvidos pela regra de Cramer – começam a ser estudados sistematicamente[6].

Em 1861, o matemático inglês H. J. S. Smith (1826-1883) enuncia, por meio de determinantes, as condições para que um sistema de quatro equações e duas incógnitas admita uma solução. Já em 1862, o italiano N. Trudi (1811-1884) mostra que em um sistema $n \times n$, se o determinante é nulo assim como os determinantes obtidos substituindo os coeficientes correspondentes a uma variável pelos termos constantes (isto é, o numerador do quociente que define a variável em um sistema de Cramer), então os $(n-1)$ determinantes assim formados por cada uma das outras variáveis são nulos. Ele mostra igualmente que então uma das equações se deduz das outras por combinação linear.

O matemático inglês C. L. Dodgson (1832-1894), mais conhecido sob o pseudônimo de Lewis Carrol, utilizado por ele para assinar *Alice In Wonderland*, é um dos primeiros a fazer um estudo exaustivo da resolução de sistemas $n \times m$, em sua obra *An Elementary Treatise On Determinants,* publicada em Londres em 1864. Entre os principais resultados que ele demonstra temos alguns teoremas sobre sistemas homogêneos; um deles é o que segue:

> Em um sistema homogêneo de n equações a $n-r$ incógnitas, cuja matriz não aumentada é evanescente; tem $(n-r)$-*upla* solução onde dois componentes ou menos não são nulos e $r+1$ equações são dependentes das restantes. Reciprocamente se o sistema tem uma solução não nula, a matriz não aumentada é evanescente (Prop. X, cor. xix) (DORIER, 1990, p. 24).

Sobre essa proposição Dorier (1990, p. 24) chama a atenção, entre outras coisas, para o fato de estar aí, em fase de construção, "a expressão de uma condição de dependência linear de $(n-r)$ vetores em um espaço de dimensão n".

O segundo teorema é: "Um sistema homogêneo de n equações a $n + r$ incógnitas tem sempre $(n-r)$-*upla* soluções onde pelo menos dois componentes não são nulos" (Prop. XII) (DORIER, 1990, p. 25).

Dorier comenta que, na linguagem atual de espaços vetoriais, este teorema pode ser enunciado da seguinte maneira: $n+r$ vetores de um espaço vetorial de dimensão n

[6] A sequência de resultados que apresentaremos a seguir poder ser encontrada em Dorier (1990; p. 23-27).

são sempre dependentes. Ele conclui, então, que sob essa forma, este resultado é a chave para o Teorema da Invariância que afirma que todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita possuem o mesmo número de vetores (DORIER, 1990).

Com relação à teoria geral dos sistemas lineares, na obra supracitada, Dogson não tinha deixado muita coisa a ser feita pelos seus sucessores. A eles caberia refinar a formulação dada por ele e reagrupar os casos em proposições mais compactas. E, com o artigo de Eugéne Rouché (1832-1910), intitulado *Notes sur les equations linéares,* de 1880, a teoria de resolução de sistemas lineares toca o seu fim; falta apenas avançar às noções de posto de um sistema e de dimensão do conjunto solução que, serão os fundamentos da noção de espaço vetorial de dimensão finita (DORIER, 1990).

Este empreendimento foi desenvolvido, em grande parte, pelos trabalhos de Frobenius. Em seu artigo intitulado *Ueber das Pfaffsche problem*, publicado em 1875, ele introduz a noção de independência linear das soluções que ele indica indiferentemente, apesar da ambiguidade, através de duas palavras *unabhangig* (independência) e *verschieden* (distinto). O primeiro termo foi empregado para independência linear de equações. A definição dada por ele é a seguinte:

> Das soluções $A_1(x), \cdots, A_n(x)$, (x = 1, ⋯, k) são ditas independentes ou distintas, se $c_1 A_a(1) + \cdots + c_k A_a(k)$ não pode se anular para a = 1, ⋯, n sem que c_1, ⋯, c_k sejam todos nulos, em outros termos, quando as k fórmulas lineares $A_1(x)u_1 + \cdots + A_k(x)u_k$ são independentes (DORIER, 1990, p. 26).

Sobre esse trecho, Dorier (1990, p. 26) comenta:

> Esta definição é uma inovação, ela relaciona a ideia de dependência linear desde muito tempo utilizada para as formas lineares (ou as equações, o que dá no mesmo) à utilização dos 'vetores de dimensão n' indicadas pelas coordenadas, como Cayley as introduziu, uns trinta anos antes.

Neste mesmo artigo, Frobenius demonstra vários resultados sobre sistemas homogêneos; por exemplo, ele prova que: "Um sistema homogêneo de m equações independentes a n incógnitas $(m > n)$ admite $(n - m)$ soluções independentes e que este é o máximo de soluções independentes que um tal sistema pode admitir; isto quer dizer que $(n - m) + 1$ soluções são sempre dependentes" (DORIER, 1990, p. 26). Ele diz depois que "a solução geral da equação é uma combinação linear qualquer destas $(n - m)$ soluções independentes" (DORIER, 1990, p. 26).

Ainda, segundo Dorier (1990), a demonstração de Frobenius:

> (...) fica muito formal e se apoia sobre existência de $(n-m)$-*uplas* que podem completar as linhas da matriz dos coeficientes do sistema, de maneira a obter um determinante $n \times m$ que não se anula. Os cofatores de cada uma das linhas assim acrescentadas formam $(n-m)$ soluções independentes (p. 26).

A noção de posto de uma matriz foi introduzida por Frobenius, em 1879, também em conexão com determinantes, no artigo intitulado *Ueber Homogene Totale Differentialg Leichungen* (KLINE, 1990).

Frobenius, como observa Dorier, parecia saber todos os resultados sobre a teoria dos determinantes que ele utilizava para demonstrar seus resultados sobre a resolução de sistemas de equações lineares homogêneas, além de utilizar o conceito de dependência e independência linear de soluções do sistema linear homogêneo, consideradas como n-uplas, em uma linguagem totalmente moderna em 1875. Como ilustração desse fato apresentamos o seguinte resultado de Frobenius encontrado em Muir (1930, p. 122, tradução nossa) que afirma que:

> (...) se r equações da forma $a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = 0$, com r variando de 1 a r, são independentes, e tem s soluções independentes $(b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n})$, $(b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n})$, $\cdots$, $(b_{s1}, b_{s2}, \cdots, b_{sn})$ então as r-linhas menores de ordem a são proporcionais para as complementares s-linhas de ordem b.

Em 1905, Frobenius volta a falar sobre a maior parte de seu artigo de 1875 em um artigo intitulado *Zur Theorie der linearem Yleichungen*, tendo agora à sua disposição os conceitos de posto e matriz, o que facilita o seu trabalho.

Da nossa leitura, a partir da perspectiva do MCS, o que procuramos evidenciar, observando, em linhas muito gerais, o processo histórico de emergência de uma teoria de sistemas de equações lineares e identificando a participação de Frobenius no final desse processo, é considerar que ele, como matemático, constituiu objetos tais como determinantes, sistemas homogêneos, soluções de sistemas homogêneos, soluções independentes, posto, matriz. Esses objetos o permitiram operar de maneira que, ao contrário de outros matemáticos, presentes neste domínio, ele pôde falar de, por exemplo, independência linear de soluções de um sistema homogêneo e não só a independência linear de equação do sistema, além de operar também com a solução de um sistema linear a partir de n-uplas. Como vimos, ele produziu significados sobre o máximo de soluções independentes que um sistema homogêneo podia admitir, além de considerar o fato de que a solução geral do sistema é uma combinação linear qualquer das soluções

10.34019/2594-4673.

independentes. Segundo a lógica advinda da sua maneira de operar com esses objetos, isso permitiria que ele produzisse significados, em linguagem atual, para base de um sistema de equações lineares homogêneo. Dito em outras palavras, para chegar à noção de base de soluções de um sistema homogêneo, ele conhecia a noção de combinação linear de soluções de um sistema linear, de independência linear de soluções e de número máximo de soluções independentes.

Passaremos agora, para um outro domínio matemático, em que as noções elementares da Álgebra Linear surgem relacionadas à emergência da noção de base como parte do estudo das equações diferenciais lineares.

Eüler e as Equações Diferenciais Lineares

Os precursores no estudo da resolução de equações diferenciais lineares de ordem *n* foram d'Alembert, Lagrange e Eüler.

Em 1748, Eüler publicou um importante tratado intitulado *Introductio in analysin infinitorum* em dois volumes. Nessa obra ele define função de uma quantidade variável a partir das definições de quantidade constante e variável, apresentada no artigo de Rüthing (1984, p. 72) nos seguintes termos:

> 1.Uma quantidade constante é uma quantidade determinada que mantém o mesmo valor permanentemente.
> 2. Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada ou universal que abrange em si mesma todos os valores determinados.
> 4. Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer maneira por esta quantidade variável e números ou quantidades constantes.

Eüler havia sido aluno de João Bernoulli, que publicou, em 1718, um artigo contendo a seguinte definição de função: "Chamamos aqui de função de uma grandeza variável, uma quantidade composta de qualquer maneira que seja desta variável e de constantes" (RÜTING, 1984, p. 72, tradução nossa). Como observamos na definição anteriormente dada por Eüler, ele substitui o termo "quantidade", proposto pelo seu professor, por "expressão analítica". A identificação de função como sua expressão analítica haveria de vigorar pelos séculos XVII e XIX e suas limitações e incoerências foram sendo percebidas.

Em *Comentarii de Petesburgo* (1760-1763) Eüler estuda a equação diferencial que d'Alembert chamou de equação de Riccati, dada por: $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$.

10.34019/2594-4673.

Ele foi o primeiro a chamar a atenção para o fato de que quando se conhece uma solução particular $v = f(x)$ então a substituição $y = v + 1/z$ transforma a equação de Riccati numa equação diferencial linear em z, de modo que se pode encontrar a solução geral. Ele observa ainda que, se duas soluções particulares são conhecidas, então uma solução geral pode ser expressa em termos de uma simples quadratura.

Nas obras *Institutiones calculi differentialis* (1755) e *Instituitiones calculi integralis* (1768-74), em três volumes, encontramos não só o cálculo diferencial e integral elementar mas também uma teoria de equações diferenciais entre outros assuntos. Desses tratados remontam os métodos de resolução usados atualmente nos cursos introdutórios sobre equações diferenciais: o uso de fatores integrantes, os métodos sistemáticos para resolver equações lineares de ordem superior a coeficientes constantes; aparecendo ainda a distinção entre equações lineares homogêneas e não homogêneas, entre outras contribuições de Eüler ao assunto.

No campo de estudo das equações diferenciais o nome de Eüler está ligado a um tipo de equação linear a coeficientes variáveis, a saber, a equação $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y^{(0)} = f(x)$ (na qual expoentes entre parênteses indicam ordens de derivação). Vale observar que esta equação se reduz, pela substituição $x = e^z$, a uma equação linear a coeficientes constantes.

Lagrange foi o inventor do método de variação de parâmetros na resolução de equações diferenciais lineares não homogêneas. Isto é, se $c_1 u_1 + c_2 u_2$ é a solução geral de $y" + a_1 y' + a_2 y = 0$ (em que u_1 e u_2 são funções de x) ele substituía os parâmetros c_1 e c_2 por variáveis a determinar v_1 e v_2 (funções de x) e determinava-as de modo que $v_1 u_1 + v_2 u_2$ fosse uma solução de $y" + a_1 y' + a_2 y = f(x)$.

d'Alembert "é o primeiro e único que considera útil indicar que a solução geral da equação não homogênea é a soma de uma solução particular e da solução geral da equação homogênea correspondente (...)" (BOURBAKI, 1976, p. 88, tradução nossa). Esse comentário é encontrado em Bourbaki (1976) que, se referindo a Eüler, d'Alembert e a Lagrange, conclui:

> (...) além disso, quando esses autores enunciavam que a solução geral de uma equação linear homogênea de ordem n é combinação linear de n soluções particulares não acrescentam que estas devem ser linearmente independentes, e não fazem nenhum esforço para explicitar esta última noção (...) (BOURBAKI, 1976, p. 88, tradução nossa).

Outro comentário neste sentido é feito por Dorier (1990); ele diz:

> (...) antes mesmo de considerar combinações lineares de equações, Euler foi levado a considerar combinações lineares de soluções de uma equação diferencial. Mas como d'Alembert ou Lagrange, que lhe seguiram neste caminho, se ele mostra que obtemos uma solução fazendo qualquer combinação linear, ele não se preocupa com a independência linear das soluções. Em particular estes autores não podem chegar à ideia de base de soluções (p. 29, tradução nossa).

Segundo Dorier (1990), A. L. Cauchy (1789-1857) é o primeiro a ter esclarecido o caminho nesse domínio, associando a condição de dependência das soluções à condição de resolubilidade de um sistema exprimindo que uma solução e suas $(n-1)$ derivadas sucessivas tomam valores determinados. J. M. H. Wronsky (1776-1853) introduzirá, em 1815, o determinante que leva o seu nome e que é o do sistema proposto. A condição de resolubilidade volta assim à não anulação do determinante.

É importante notar que, nas palavras de Dorier (1990):

> (...) o parentesco entre sistemas de equações lineares numéricas e diferenciais pode ser distinguido por muitos matemáticos, tanto é verdade que os dois domínios estiveram muito em moda nos séculos XVIII e XIX. As aproximações ficaram, no entanto, limitadas ao emprego, pelos dois domínios, dos determinantes. Estes jogaram papel de interface em uma dialética que permitiu fazer progredir as duas teorias em paralelo sem que tivessem realmente comunicação direta (p. 26, tradução nossa).

Pelo que expusemos acima, vemos que Eüler, constituiu objetos como funções (como expressão analítica), equação diferencial linear homogênea e não homogênea, solução geral e soluções particulares de uma equação diferencial, com os quais ele operava. A lógica das operações que efetuava com as equações diferenciais envolvia, como indicamos anteriormente, substituições de variáveis, ou o uso de fatores integrantes como métodos para resolver equações lineares de ordem superior a coeficientes constantes.

Pelos comentários encontrados em Dorier e Bourbaki e explicitados acima, entendemos que ele possivelmente conhecia propriedades, tais como: que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é combinação linear de n soluções particulares. Porém, concordamos com esses mesmos autores quando eles dizem que a não constituição da noção de independência linear por Eüler nos sugere que ele não chegou à constituição da noção de base de soluções de uma equação diferencial linear.

10.34019/2594-4673.

Por outro lado, a favor de Eüler, podemos sugerir que ele viu necessidade, em seus estudos, de chegar a uma noção de base de soluções de uma equação diferencial.

Hamilton e os Quatérnios

No início do século XIX, a álgebra era considerada, como atualmente no ensino médio e no início do curso superior, como aritmética simbólica. O primeiro a vislumbrar a álgebra numa visão moderna, como o estudo das estruturas algébricas foi George Peacock (1791-1858). Ele foi um dos primeiros a estudar seriamente os princípios fundamentais da álgebra. Em 1830, ele publicou uma obra intitulada *Treatise on Algebra* onde ele procurou dar um tratamento lógico à álgebra. Outros contemporâneos de Peacock levaram avante seus estudos aproximando as noções de álgebra à concepção atualmente aceita.

Nesse processo de emancipação da álgebra como um campo de estudos puramente hipotético-dedutivo formal, encontramos o matemático irlandês William Rowan Hamilton e o matemático alemão Hermann Günther Grassmann. Eles publicaram resultados de grande alcance e que abriram as comportas para a álgebra abstrata.

É importante observar que, no início do século XIX, era inconcebível que pudesse existir uma álgebra diferente da álgebra comum da aritmética onde, por exemplo, a lei comutativa da multiplicação pudesse ser violada. Isto é, parecia impossível, aos matemáticos da época, uma álgebra lógica onde $a \times b$ fosse diferente de $b \times a$. A derrubada desse dogma foi consequência do trabalho de Hamilton, quando em 1843 foi forçado, por considerações físicas, a inventar uma álgebra onde a lei comutativa da multiplicação era violada. Apesar desse tema não ser de nosso interesse central, voltaremos a tocar no assunto mais à frente.

Em 1837, Hamilton publicou um longo e importante ensaio intitulado *Theory of Conjugate Functions or algebraic couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of pure time*. No entendimento de alguns pesquisadores (CROWE, 1967; SMITH, 1959; GRANGER, 1974), Hamilton entendia a álgebra como a ciência do tempo puro.

Este ensaio é dividido em três seções. A terceira seção contém seu *Theory of Conjugate functions or Algebraic Couples*, cuja maior parte foi escrita em 1833 e onde ele introduziu uma álgebra formal de pares de números complexos cujas regras de

10.34019/2594-4673.

combinação são precisamente as que hoje são dadas para números complexos (CROWE, 1967). Ele mostrou que um par ordenado (a,b) era equivalente a um número complexo da forma $a+bi$, e deduziu ainda que se $a+bi$ e $c+di$ são dois números complexos, então $(a,b)\pm(c,d)=(a\pm c,b\pm d)$; $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$; $\frac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$.

A regra para a multiplicação era interpretada por Hamilton como uma operação envolvendo rotações.

Para Eves (1995, p. 549) o grande feito de Hamilton ocorreu ao representar o símbolo i pelo par $(0,1)$ e obter $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$, pois assim "eliminou-se a aura mística que cercava os números complexos, pois não há nada místico num par ordenado de números reais".

Hamilton percebia que os seus pares ordenados podiam ser pensados como entidades orientadas no plano e tentou estender a ideia a três dimensões passando do número complexo binário $a+bi$ às triplas ordenadas $a+bi+cj$. A operação de adição não oferecia dificuldade, mas durante dez anos, ele lutou com a multiplicação de n-uplas para n maior que dois, chegando então à construção dos quatérnios, em 1843. Recordemos que um quatérnio é um número da forma $a+bi+cj+dk$, sendo a é a parte real, chamada a parte escalar do quatérnio, e o restante, a parte vetorial. Os três coeficientes da parte vetorial são as coordenadas cartesianas retangulares de um ponto P enquanto i,j e k são chamadas unidades qualitativas que geometricamente são dirigidas ao longo dos três eixos.

Hamilton havia observado que sua dificuldade desaparecia se usasse quádruplas em vez de triplas e se abandonasse a lei comutativa para a multiplicação. Estava mais ou menos claro considerando que para quádruplas de números $a+bi+cj+dk$ se deveria tomar $i^2=j^2=k^2=-1$; então ele observou que deveria tomar $i\cdot j=k$, mas $j\cdot i=-k$, e, semelhantemente, $j\cdot k=i=-k\cdot j$ e $k\cdot i=j=-i\cdot k$. Daí, no resto, as leis de operações seriam as da álgebra ordinária.

As suas investigações sobre os quatérnios foram publicadas em dois livros, as *Lectures on Quaternions* (1853) e o póstumo *Elements of Quaternions* (1866). A parte mais conhecida do cálculo dos quatérnios foi a teoria dos vetores (o nome é devido a Hamilton). No primeiro livro ele apresenta os quatérnios do ponto de vista mais geométrico depois de tê-los apresentado, em 1843, diante da Academia Real Irlandesa, sob um ponto de vista mais abstrato.

Granger chama a atenção para o fato de que na primeira exposição, de 1843, ao deixar de lado toda a representação geométrica, Hamilton apresenta deliberadamente os quatérnios como sistemas de objetos de quatro dimensões, combinações lineares dos quatro elementos de base por meio de coeficientes reais. Ele observa ainda que:

> Sobre esses objetos, definiam-se operações análogas às operações aritméticas, em particular, à multiplicação por uma tábua que colocava os produtos mútuos das quatro unidades da base, produtos que constituem em linguagem moderna um grupo, mas um grupo não-abeliano (GRANGER, 1974, p. 102).

Granger (1974) observa ainda que com a não preservação da comutatividade da multiplicação, "a álgebra dos quatérnios traz à luz a relatividade do dogma de comutatividade do produto". Isto leva então a abertura "das perspectivas modernas para uma teoria geral das estruturas definidas por leis de composição de elementos, para as quais os seus fundadores conservarão o nome tradicional de álgebra" (GRANGER, 1974, p. 103).

Granger tece ainda o seguinte comentário:

> Hamilton apreende seus Quatérnios simultaneamente como operadores geométricos e como elementos de um 'espaço vetorial' de quatro dimensões, (...). Esta estrutura operatória é por ele construída tendo em vista generalizar a álgebra ordinária e a álgebra dos complexos e, se ele se choca então com a impossibilidade de reencontrar ao mesmo tempo no novo domínio todas as propriedades do antigo, é em benefício de uma dissociação sempre mais apurada do objeto matemático (GRANGER,1974, p. 100).

Em seu *Elements of Quaternions*, o vetor é intuitivamente definido como uma reta tendo não somente comprimento, mas também uma direção. Ele considera, ainda, as propriedades estruturais de um conjunto de vetores sobre os quais uma adição e uma multiplicação por escalares são autorizadas. O quatérnio é concebido por ele como um operador que se constitui em um elemento de um espaço vetorial, ou de uma álgebra a quatro dimensões, munido de uma estrutura (de álgebra) que define a tábua de multiplicação dos objetos escolhidos para construir a base (GRANGER, 1974).

Hamilton, considerando nossa discussão, produziu significados, constituindo em objetos as noções de números complexos, quatérnios, propriedades algébricas, operações com números complexos e quatérnios, a noção de vetor; pares, ternas e quadras ordenadas. Além disso, Hamilton apresentava os quatérnios como sistema de objetos de quatro dimensões e considerava combinação linear desses objetos, o que sugere, para nós, que ele constituiu a noção de base de quatérnios. Em sua maneira de operar, admitiu a possiblidade de uma lógica que não operava apenas da maneira usual, mas também introduziu em sua produção de significados operações não-usuais e a possibilidade de existirem conjuntos em que a operação comutativa para a multiplicação não é possível. Assim, a contribuição de Hamilton à teoria dos espaços vetoriais em geral e à noção de base em particular, deu-se através do desenvolvimento da teoria dos quatérnios.

Grassmann e sua Teoria da Extensão

Enquanto Hamilton desenvolvia seus quatérnios, ideias um tanto semelhantes surgiam na Alemanha através de Hermann Günther Grassmann, que no ano seguinte ao anúncio da criação dos quatérnios, em 1844, publicou um tratado contendo um cálculo vetorial muito geral, em um número qualquer de dimensões. Nessa obra podia-se encontrar também, o desenvolvimento das ideias de multiplicação não-comutativa.

Em relação ao trabalho de Hamilton, Grassmann desenvolveu classes de álgebra de muito maior generalidade. Em vez de considerar apenas quádruplas ordenadas de números reais, ele considerou n-uplas ordenadas de números reais. Sobre esse desenvolvimento, Granger diz: "o maior projeto de Grassmann é justamente fundar a geometria numa teoria mais abstrata e mais geral (...)" (GRANGER, 1974, p. 113).

Já em Bourbaki (1974) encontramos a seguinte consideração ao trabalho de Grassmann: "Ele construiu um vasto edifício algébrico-geométrico, baseando-se em uma concepção geométrica ou intrínseca (e mais ou menos axiomática) do espaço vetorial de n dimensões (...)" (BOURBAKI, 1974, p. 93, tradução nossa).

A obra de 1844 foi intitulada *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein never Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mecanik, die lehre vom Magnetismus und die krystallonomie erläutert;* cuja tradução simplificada ficou teoria da extensão.

A metodologia que ele empregou foi particularmente moderna e revolucionária para seu tempo. No seu estilo muito individual, Grassmann não somente antecipou todos os grandes conceitos do cálculo vetorial, mas seus trabalhos são também muito profundos numa teoria de espaços vetoriais tais como se tem hoje. Mas, para que o significado de sua teoria da extensão fosse percebido, muito tempo passaria, pois o livro era não só pouco convencional como de difícil leitura; a notação era nova e a exposição era considerada obscura com forte apelo filosófico. Devido a isso, seus esforços para construir uma análise vetorial para n dimensões encontraram pouca compreensão por parte de seus contemporâneos. De fato, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o nome mais importante do mundo matemático da época e August Ferdinad Moebius (1790-1868), o estudioso mais próximo matematicamente de Grassmann, receberam exemplares de sua obra e nenhum deles deu uma resposta satisfatória às expectativas de Grassmann (DORIER, 1990).

Em 1862, Grassmann rescreveu o livro de 1844; agora com o título de *Die Ausdehnungslehe lebre, Vollständig und in Strenger Form bearbeitet*. Nesta edição o conteúdo matemático escrito anteriormente foi devolvido e enriquecido com as últimas descobertas do autor e sob influência de sua leitura dos trabalhos de seus contemporâneos.

Uma das noções básicas utilizadas por Grassmann é a de grandeza extensiva (*extensive grösse*). Na versão de 1862, ele apresenta uma definição estritamente algébrica dessa noção. Para isto algumas definições anteriores são necessárias. Por exemplo, a de grandeza derivável, definida nos seguintes termos:

> Uma grandeza a é dita derivável (*ableitbar*) a partir de grandezas $b, c, \cdots$ por meio de números $\beta, \gamma, \cdots$ se:
> $$a = \beta b + \gamma c + \cdots$$
> Dir-se-á ainda que $a, b, c, \cdots$ estão "numa relação numérica" (*Zahlbeziehung)*, quando cada uma dessas grandezas for derivável uma das outras (GRANGER, 1974, p. 118).

Outra definição necessária é a de unidade e sistema de unidade expressa por Granger nos seguintes termos:

> Uma unidade é uma grandeza da qual podem ser numericamente derivadas um conjunto de outras grandezas. Um sistema de unidades é um conjunto de unidades que estão entre si numa relação numérica e da qual se pode derivar outras grandezas (GRANGER, 1974, p. 118).

A partir dessas definições chega-se ao conceito de grandeza extensiva, entendida como "expressão derivável de um sistema de unidades (não se reduzindo à unidade absoluta, que é o número 1)" (GRANGER, 1974, p. 119)[7].

---

[7] Estas definições podem também ser encontradas em Smith (1959, p. 684-685). Neste texto ele faz uma distinção mais clara entre **unidade** (como definido por Granger), **unidade primitiva** (que é a unidade que não pode ser derivada numericamente de nenhuma outra unidade), a **unidade absoluta** (o nº 1) e as **unidades relativas** (todas as outras unidades numéricas).

Por exemplo os hipercomplexos (ou hipernuméricos) são grandezas extensivas; definidos como números da forma $\alpha = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ onde os α_i são números reais e $e_1, e_2, \cdots, e_n$ são as unidades primitivas representadas geometricamente por segmentos de reta ou unidade de comprimento traçado desde a origem comum, determinando assim um sistema ortogonal de eixos que se opera da esquerda para a direita. Os $\alpha_i e_i$ são múltiplos das unidades primitivas e são representados geometricamente por comprimentos ao longo dos respectivos eixos, enquanto α é representado por um segmento linear dirigido no espaço cujas projeções no eixo são os comprimentos α_i. Grassmann chamou o segmento linear dirigido ou vetor linear de *Streecke* (KLINE, 1990).

Assim, na versão de 1862, a noção de vetor aparece como sendo um segmento de linha reta com comprimento e direções fixados. Dois vetores são adicionados de maneira usual. A subtração é simplesmente a adição do negativo, isto é, o vetor de mesmo comprimento e direção oposta. Vetores são também exemplos de grandezas extensivas.

Se considerarmos dois hipercomplexos (ou grandezas extensivas) $= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ e $\beta = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n$ então a adição e subtração são definidas por $\alpha \pm \beta = \sum(\alpha_i + \beta_{i1})e_i$.

Grassmann introduziu em seu sistema dois tipos de multiplicação, o produto interno e o produto externo. E a partir do cálculo do produto externo chegou, geometricamente, à área do paralelogramo construído sobre os vetores-linha representados geometricamente por α e β. Apresentou também, outro produto onde ele tomou o produto escalar (interno) de um hipernúmero γ com o produto (externo) vetorial $[\alpha, \beta]$ de dois hipernúmeros α e β. Este produto Q para o caso de três dimensões pode ser interpretado geometricamente como o volume do paralelepípedo construído por vetores-linha que representam α, β e γ.

Grassmann chegou a considerar outros produtos de ordem superior para hipernúmeros de *n* complexos. Em um artigo de 1855 ele apresentou 16 tipos diferentes de produtos de hipernúmeros e apresentou um significado geométrico para eles, fazendo também aplicações à mecânica, magnetismo e cristalografia.

Ao longo de sua obra encontramos vários traços do desenvolvimento de algumas noções elementares da álgebra linear e multilinear.

No primeiro capítulo de *Ausdehnungslehre* de 1844 encontramos a seguinte afirmação: "Todo vetor de um sistema de m-ésima ordem pode ser escrito como a soma de m vetores, que pertencem às m maneiras independentes dadas de mudança do sistema. Essa forma de expressão é única" (CROWE, 1967, p. 69, tradução nossa). Do ponto de vista atual nós leríamos essa afirmação como sendo o seguinte teorema: todo vetor de um espaço vetorial V pode ser escrito de maneira única como combinação linear dos vetores de uma base de V. Resultado esse que pode ser tomado nos dias atuais como a definição de base.

Encontramos também, a noção de dependência linear expressa nos seguintes termos: "Uma espécie de mudança[8] (*Aenderungsweise*) é dependente[9] de uma outra, quando os vetores da primeira podem ser representados como soma de vetores da segunda (...)" (GRANGER, 1974, p. 117). Granger chama a atenção para o fato que isso não é suficiente para decidir quando os vetores dados são independentes entre si. Ele então apresenta outra afirmação de Grassmann que oferece dois parágrafos à frente da observação anterior, e que é a seguinte: "Todo sistema de n° grau pode ser inteiramente engendrado a partir de qualquer um de seus elementos por n espécies de mudanças independentes" (GRANGER, 1974, p. 117).

Granger então comenta: "A ideia fundamental do percurso de um espaço vetorial por combinações lineares de n elementos independentes está justamente aqui subjacente, mas dela se aproxima apenas de maneira qualitativa" (GRANGER, 1974, p. 117). Ele considera que isso acontece pela falta de uma nova operação: composição desses vetores com números; e que, através da teoria das grandezas elementares, Grassmann chegará de modo indireto a um critério de independência linear, a saber: "Dizemos que uma grandeza

[8] A noção de mudança deve ser entendida nos seguintes termos: "a passagem do elemento gerador de um estado a um outro, nós a denominamos mudança; e essa mudança abstrata do elemento gerador corresponde, pois, à mudança de lugar ou movimento de ponto em geometria" (GRANGER, 1974, p. 113).

[9] Sobre grandezas dependentes ele também diz: "grandezas de n° grau são dependentes se fizerem parte de um sistema de grau inferior a *n*" (GRANGER, 1974, p. 113).

elementar de primeiro grau é dependente de outras grandezas elementares, quando pode ser representada por uma combinação linear destas últimas" (GRANGER, 1974, p. 118).

Na versão de 1862, Grassmann apresenta uma definição estritamente algébrica de grandezas extensivas, como vimos anteriormente, e se aproxima muito de uma definição abstrata da noção de espaço vetorial sobre o corpo dos reais que ele chamava de domínio (*Gebiete*) e todas as propriedades algébricas elementares dos espaços vetoriais são deduzidas. As noções formais de independência linear, de base e dimensão são claramente explicadas. Entre os resultados obtidos está, em notação atual a relação $\dim U + \dim W = \dim(U + W) + dim(U \cap W)$, na qual U e W são subespaços vetoriais.

Segundo Granger (1974), Grassmann através da definição de produto combinatório chegou ao que se caracteriza, atualmente, a álgebra multilinear, donde resultam as proposições:

> 1a.) Seja n unidades originárias (isto é, não reduzidas a outras unidades e, é claro, linearmente independentes), os produtos exteriores m a m sem repetição dessas unidades constituem de *m*-ésimo grau em relação às grandezas de primeiro grau deriváveis das unidades originárias.
> 2a.) As grandezas numericamente deriváveis das unidades de m-ésimo grau são todas grandezas de m-ésimo grau.
> 3a.) Todo produto de *m* fatores simples, isto é, derivados numericamente das combinações multiplicativas (produtos exteriores *m* a *m* sem repetição) dessas *n* grandezas.
> 4a.) Um produto de m grandezas de *m*-ésimo grau (GRANGER, 1974, p. 121).

De posse dessas proposições, Granger comenta: "As duas primeiras proposições exprimem o caráter de espaço vetorial do objeto construído, tomando o produto exterior *m*-ésimo de um espaço vetorial. As "combinações multiplicativas" das *n* "unidades" desse espaço constituem uma base para o novo espaço $\Lambda^m E_n$ assim engendrado" (GRANGER, 1974, p. 122).

Portanto, a teoria da extensão foi uma antecipação das teorias de álgebra linear e mesmo da álgebra multilinear. As ideias lançadas por Grassmann foram responsáveis por muitas produções ulteriores parciais e se desenvolveu até a metade do século XX. Mas para que isso ocorresse foram necessários os trabalhos de outros algebristas tais como Arthur Cayley (1821-1895) e geômetras como Giuseppe Peano (1852-1932), para retirar esta teoria do estado de incompreensão em que se situava; traduzindo suas ideias numa linguagem mais clara para os matemáticos.

Essa análise do trabalho de Grassmann sugere que ele operava de maneira muito peculiar; tanto que nem Gauss, nem Moebuis – seus contemporâneos – compreenderam suas ideias. Como vimos, ele constituiu objetos tais como: grandezas extensivas, deriváveis e elementares: unidades (primitivas, relativas e absoluta) e sistemas de unidades como os quais ele operava. A partir desses objetos, ele chegou às noções de dependência e independência linear (entendida como mudanças), combinações lineares, dimensão, espaço vetorial sobre os reais e base.

Peano e seu Calcolo Geometrico

O matemático italiano Giuseppe Peano foi um dos criadores do método axiomático e, também, um dos primeiros matemáticos a apreciar em todo seu valor a obra de Grassmann. Em nossa linha de interesse está sua obra intitulada *Calcolo geometrico secundo l'Ausdeshungslehre di H. Grassmann, precedutto dalle operazione della logica dedutiva* (1888). Como o título indica, esta obra é inspirada em grande parte pelo *Ausdeshungslehre* de Grassmann de onde ele tira os principais conceitos, expondo-os de modo mais atraente e compreensivo para a época.

O objetivo de Peano neste livro era o mesmo de Grassmann, isto é, o desenvolvimento de um cálculo geométrico. Desse modo, o livro consiste em grande parte de cálculos com pontos, linhas, planos e figuras sólidas. Por exemplo, no primeiro capítulo de seu *Calcolo geometrico*, após definir as noções de volume, superfície e segmento orientado ele define as operações sobre quatro espécies diferentes de objetos geométricos por ele considerados, a saber: pontos, segmentos, superfícies e volumes; tirando propriedades mais gerais que independem de uma espécie particular. Com isso ele mostra que podemos operar sobre tais formações geométricas não importando quais são os objetos algébricos particulares. Como ele mesmo diz no prefácio do livro: "O cálculo geométrico consiste em um sistema de operações aplicáveis aos seres geométricos, análogos a aqueles que a álgebra efetua sobre os números (...)" (DORIER, 1990, p. 64, tradução nossa).

Na continuação, Peano define as quatro espécies de objetos geométricos de modo puramente formal como sistema de pontos, segmentos, superfícies ou volumes afetados de números, indicando-os através da notação de combinações lineares formais. Assim, ele vai se aproximando de uma descrição da estrutura de espaço vetorial.

No capítulo seguinte Peano recupera as grandes linhas do Ausdeshungslehre (versão de 1862) dando uma exposição mais resumida e particularmente bem construída. Como Grassmann, ele dá aplicações ao final de cada capítulo. Ele mostra, em particular, que em um espaço, se três vetores são tais que seu produto, que está em forma de determinantes, é não nulo, todos os vetores se escrevem como combinação linear desses três vetores (DORIER, 1990).

No nono capítulo Peano apresenta uma definição do que ele denominou um Sistema linear. Esta é, ao que parece, a primeira definição axiomática de um espaço vetorial real e estava muito próxima de nossa definição atual. Esse sistema consistia de quantidades munidas com operações de adição de vetores e multiplicação por escalar. A adição devendo satisfazer as leis comutativa e associativa, enquanto que a multiplicação escalar satisfazia as duas leis distributivas, uma lei associativa, e a lei que $1 \cdot v = v$ para toda quantidade v. Na adição inclui, como parte de seus sistemas de axioma, a existência de uma quantidade nula satisfazendo a propriedade $v + 0 = v$ para qualquer v, assim como, $v + (-1) \cdot v = 0$.

No décimo e último capítulo de seu livro, Peano apresenta definições que são muito próximas das definições axiomáticas atuais. Ele estuda os conceitos de independência linear, base, dimensão (considerando a possibilidade de dimensão infinita) e de coordenadas. Ele define a dimensão de um sistema linear como o número máximo de quantidades linearmente independentes em um sistema. Sobre esta definição Dorier (1990, p. 68, tradução nossa) tece o seguinte comentário:

> Entretanto ele não introduziu o conceito de família geratriz e então a noção de dimensão não tem ainda todo o sentido que nós lhe damos hoje. Com efeito, ele não tem os recursos de demonstrar que todas as famílias livres maximais são também minimais e que eles têm o mesmo número de elementos.

Peano mostra, definindo as coordenadas como família livre maximal que é geratriz, que cada vetor é escrito de maneira única como combinação linear dos elementos da família. Dorier sugere, na continuação, que Peano tinha entendido que toda família livre maximal tem sempre o mesmo número de elementos e comenta: “Assim ele apresenta o que nós chamaríamos em linguagem atual de mudança de base tomando para a segunda família livre maximal uma família tendo o mesmo número de elementos da primeira. Ele mostra assim como calcular as coordenadas da primeira” (DORIER, 1990, p. 68, tradução nossa).

Dorier, tecendo então uma comparação entre as noções de dimensão apresentadas no *Ausdeshungslehre* de Grassmann e no *Calcolo geometrico* de Peano, sugere que esta imperfeição é pouco surpreendente e que, mesmo tendo Grassmann uma teoria menos clara, numa certa medida, este conceito é mais ricamente explorado por ele.

Nas aplicações do final do capítulo, Peano apresenta um único exemplo de espaço vetorial de dimensão infinita onde ele diz que os conjuntos de polinômios de grau maior que n é um sistema linear de dimensão $n + 1$ e que o conjunto de polinômios quaisquer possui uma infinidade de dimensões. Sobre isto Dorier diz: "podemos então pensar que a ideia que ele tem disso é como um 'estado limite', de um espaço de dimensão finita que a dimensão cresce mais e mais" (DORIER, 1990, p. 69, tradução nossa).

Assim, apesar do conceito de dimensão não ser totalmente claro, da ausência das noções da família geratriz e de subespaços vetoriais, Peano contribuiu significativamente para a elaboração de uma teoria de espaços vetoriais nos moldes atuais. Porém, assim como Grassmann, muitos anos passaram até que a importância de sua obra fosse entendida.

As considerações a respeito da obra de Peano nos sugerem que ele, como Grassmann, chegou a constituir a noção de base de um espaço vetorial. Vemos que, inicialmente, Peano operava com objetos tais como, pontos, segmentos, superfícies e volumes. Ele então parece, através de um processo de generalização, passar a operar com esses objetos como se fossem pertencentes a sistemas de pontos, segmentos e superfícies, o que lhe permite efetuar combinações lineares desses objetos. Ele apresenta, então, uma primeira definição axiomática de um espaço vetorial. Além disso, como observa Dorier, ele chega à noção de dimensão de maneira pouco clara, possivelmente em relação à formulação atual. Ele parece operar de maneira que se aproxima bastante do modo de produzir significados dos matemáticos atuais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na análise de alguns fatos históricos buscamos reunir informações que nos permitissem especular sobre que significados nossos informantes produziram e, em consequência, identificar com que objetos operavam e se chegaram, em diferentes domínios, a constituir a noção de base. Observamos, então, que Frobenius constituiu a noção de base a partir de soluções de um sistema homogêneo; Hamilton operava com quatérnios; Grassmann, com grandezas extensivas, deriváveis e elementares; enquanto Peano operava com objetos geométricos.

Isto nos levou a concluir que Frobenius, Hamilton, Grassmann e Peano operaram em contextos distintos e chegaram a constituir o objeto base no interior da atividade de investigação em que estavam envolvidos.

Observamos ainda que pesquisadores como Dorier (1990) entenderam que Euler não chegou à noção de base de solução de uma equação diferencial linear. Essa constatação nos levou ao seguinte questionamento a partir da perspectiva do MCS: Isto caracterizaria um obstáculo epistemológico ou um limite epistemológico? Dito em outras palavras a questão é: Euler potencialmente poderia ter produzido significado para a noção de independência linear ou não? Caso tivesse constituído em objeto a noção de independência linear, ele definiria a noção de base de soluções de uma equação diferencial? Porém, o grau de profundidade de nosso estudo não nos permitiu avançar nessa questão, que deixamos, pois, em aberto.

Atualmente a Álgebra Linear é uma teoria matemática construída sobre uma teoria axiomático-dedutiva cujo processo final de constituição ocorreu no início do século XX. Porém, seu processo de emergência foi o resultado do trabalho de muitos matemáticos dos séculos XVIII, XIX e início do século XX, a partir da produção matemática anterior realizada por outros matemáticos, que fez culminar na teoria que encontramos nos dias de hoje. Vale observar que a teoria, em seu processo de desenvolvimento, surgiu, como vimos, em diferentes domínios da matemática e foi preciso um enorme esforço de síntese de alguns matemáticos que estiveram no final de todo o processo para se chegar ao que conhecemos atualmente com o nome de Álgebra Linear.

Ao olharmos para o que é a Álgebra Linear hoje, como disciplina acadêmica, observamos, nos objetos constituídos por Frobenius, que o conjunto-solução de um sistema homogêneo é um subespaço vetorial de algum espaço vetorial $\mathbb{R}^i$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$, por exemplo. Ou que os quatérnios de Hamilton constituem um espaço vetorial de dimensão quatro sobre o corpo dos reais, com base formada por quatro vetores denotados por l, i, j, k, cujas operações algébricas para os quatérnios são as duas operações vetoriais usuais – a adição de vetores e a multiplicação por escalar. O que pretendemos sugerir com essas incursões é que, no âmbito da Álgebra Linear, ao

doi 10.34019/2594-4673.

operarmos com vetores de um espaço vetorial como usualmente se faz, os objetos constituídos são obviamente distintos daqueles constituídos pelos matemáticos no contexto histórico em que estavam imersos.

Assim, concluímos que os matemáticos estudados operavam de maneiras diferentes, constituindo diferentes objetos a partir dos quais eles produziram significados, e que de algum modo contribuíram para a constituição da noção atual de base.

Este estudo tem como finalidade última entender os processos de ensino e de aprendizagem da Álgebra Linear na formação dos estudantes de Licenciatura em Matemática. Para nós, o mesmo esforço que desprendemos para entender do que falavam e como operavam os matemáticos no processo histórico de emergência das noções que constituíram a Álgebra Linear, também é importante ser depreendido em sala de aula para entender nossos alunos, quando produzem significados a partir dos objetos por eles constituídos na disciplina, como indicam os diversos trabalhos de investigação sobre o tema (SILVA, 1997; OLIVEIRA, 2002; SILVA, 2003; SILVA e LINS, 2013; ALMEIDA, 2013, ALVES, 2013).

Os matemáticos considerados neste estudo são sujeitos de enunciações, pois "falaram" sobre noções da Álgebra Linear e, em particular, sobre aquelas constitutivas do que viria a ser chamado de base de um espaço vetorial de dimensão finita. Assim, da mesma maneira que buscamos nas evidências históricas que discutimos, no que chamamos de resíduos de enunciação dos textos históricos, informações do contexto em que estavam inseridos esses matemáticos e com que objetos operavam, se temos como intenção estabelecer em sala de aula um espaço comunicativo (LINS, 2012), também buscaremos desenvolver a mesma leitura a partir do que nossos alunos falam ou escrevem, quando envolvidos numa atividade de ensino, ao produzirem significados a partir da noção de base e para a Álgebra Linear como um todo.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Vitor R. **Álgebra Linear como um curso de serviço para a licenciatura em Matemática: o estudo das transformações lineares**. 2013. 172 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

ALVES, Aretha F. **Álgebra Linear como um curso de serviço para a licenciatura em Matemática: o estudo dos espaços vetoriais**. 2013. 176p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BOURBAKI, Nicholas. **Elementos de história de las matemáticas**. Madri: Alianza Editorial, 1976.

CROWE, Michael J. **A history of vetor analysis**: the evolution of the ideia of a vectorial system. London: University of Notre-Dame Press, 1967.

DORIER, Jean-Luc. Analysis historique de l'emergence des concepts élémentaires d'algébre linéaire. **Cahier Didirem**, n. 7, IREM Paris 7, 1990.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Filosofia do estilo**. São Paulo: Perspectiva/Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

KLINE, Morris. **Mathematical thought from ancient to modern times**. 2 ed. Madri: Nuevas Gráficas, vol II (Geometria), 1990.

LEONTIEV, Alexis N. **O desenvolvimento do psiquismo**. São Paulo: Editora Moraes, s.d.

LINS, Romulo C. Epistemologia, história e educação matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. **Revista de Educação Matemática**. SBEM – São Paulo, Campinas, SP, Ano 1, nº 1, p.75-91, set. 1993.

LINS, Romulo C. **Um quadro de referência para entender-se o que é pensamento algébrico**. In: Anais do Seminário Novas Perspectivas da Educação Matemática no Brasil. Águas de São Pedro: MEC/INEP. Série Documental: Eventos, n.4, 3ª parte, maio, 1994.

LINS, Romulo C.; GIMÉNEZ, Joaquin. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 4. ed. Campinas: Papirus, 1997. (Coleção perspectivas em Educação Matemática).

LINS, Romulo C. O Modelo dos campos semânticos: estabelecimentos de notas e de teorizações. In. ANGELO, C.L. et al. **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012, p.110-128.

MUIR, Thomas. **Contributions to the history of determinants** (1900-1920). Londom and Glasgow: Blackie & Son Limited, 1930.

RÜTING, Dieter. Some definitions of the concept of function from John Bernoulli to N. Bourbaki. **The Mathematical Intelligencer**. v. 6, n. 4, 1984.

OLIVEIRA, Viviane C.A. de. **Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear**. Rio Claro: 2002, 187 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

SILVA, Amarildo M. **Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática**. Rio Claro: 2003, 243 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/SP, 2003.

SILVA, Amarildo M; LINS, Romulo C. Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática. **JIEEM - Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática.** v.6, n. 2, p.1-30, 2013.

SMITH, David E. **A Source book in mathematics**. New York: Dover Publications Inc., 1959.

HISTÓRICO

Submetido: 9 de setembro de 2022.
Aprovado: 6 de novembro de 2022.
Publicado: 9 de dezembro de 2022.