RIDEMA
Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática

Situações de análise combinatória discutidas à luz da Teoria dos Campos Conceituais

Combinatorial analysis situations discussed the light of the theory of conceptual fields

Alzenira da Silva Leão[1]
Universidade Federal do Amazonas

Rudinei Alves dos Santos[2]
Instituto Federal do Pará

Lissa Nareli dos Reis Portela[3]
Universidade Federal do Oeste do Pará

RESUMO

O conhecimento matemático é construído mediante as interações do sujeito em situações. Este trabalho de natureza qualitativa tem como objetivo analisar os invariantes operatórios evocados por alunos matriculados no 3º ano do ensino fundamental de uma escola particular do município de Santarém-PA, quando submetidos a situações do campo combinatório. As análises visam mostrar ao professor a possibilidade de redirecionamento do processo de ensino e aprendizagem, baseada nos conceitos e teoremas-em-ação evocados pelos alunos em ação. Os dados foram coletados durante um encontro na modalidade híbrida, onde foi realizada a aplicação de uma lista de situações problemas e posteriormente foi feita uma entrevista semiestruturada com o docente da turma. Para sustentar a discussão, a pesquisa faz o uso da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, que tem a conceitualização como o epicentro do processo de ensino e aprendizagem. A pesquisa aponta os possíveis conceitos-em-ação e teoremas-em-ação apresentados ao longo da execução da atividade, além de evidenciar a necessidade por parte dos estudantes de continuidade das operações de adição em contextos que envolvem a multiplicação. Os resultados mostraram que os estudantes dominam a tabuada, fazem uso da propriedade comutativa e conseguem detectar os dados na situação, sejam eles explícitos ou não, além disso, apresentaram competência em propor outras possibilidades de solução para as situações.
Palavras-chave: Combinatória; Campo Conceitual; Invariantes Operatórios; Adição; Multiplicação.

ABSTRACT

Mathematical knowledge is constructed through the interactions of the subject in situations. This qualitative work aims to analyze the operative invariants evoked by students enrolled in the 3rd year of primary schools in a public school in the city of Santarém-PA, when submitted to situations in the combinatorial field. The analyses aim to

[1] Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Federal do Amazonas (UFAM), Manaus, Amazonas, Brasil. Rua/Av. Barão de Suruí, 401, Casa 5, Flores, Manaus, Amazonas, Brasil, CEP: 68058-260. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-7957-6437. Lattes: http://lattes.cnpq.br/7535978235419969. E-mail: nyraleao4@gmail.com.

[2] Doutor em Educação em Ciências e Matemática (PPGECEM/REAMEC). Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA). Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA), Santarém, Pará, Brasil. Avenida Castelo Branco, 621, Bairro: Interventoria, Santarém - PA, Brasil, CEP: 68020-820. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-6214-3726. Lattes: http://lattes.cnpq.br/9365709399373081. E-mail: rudinei.alves@ifpa.edu.br.

[3] Mestranda em Educação na Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), Santarém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rodovia Santarém-Cuiabá BR 163, km 18 Planalto São José, Ramal do Japonês, Santarém, Pará, Brasil, CEP: 68030-991. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-0290-4682. Lattes: http://lattes.cnpq.br/6566745744928205. E-mail: lissanareliportela@gmail.com.

show the teacher the possibility of redirecting the teaching and learning process, based on the concepts and theorems-in-action evoked by the students in action. The data were collected during a meeting in hybrid modality, where it was performed the application of a list of problem situations and later it was made a semi-structured interview with the teacher of the class. To support the discussion, the research makes use of Gérard Vergnaud's Conceptual Fields Theory, which has the conceptualization as the epicenter of the teaching and learning process. The research points out the possible concepts-in-action and theorems-in-action presented along the execution of the activity, besides evidencing the students' need of continuity of addition operations in contexts that involve multiplication. The results showed that the students dominate the multiplication table, make use of the commutative property and are able to detect the data in the situation, whether explicit or not, besides that, they presented competence in proposing other possibilities of solutions for the situations.
Keywords: Combinatoriatory; Conceptual Field; Operative Invariants; Addition; Multiplication.

INTRODUÇÃO

O professor, enquanto mediador, percebe nas ações dos estudantes, conceitos prévios e métodos de resolução, oriundos de suas vivências. Contudo, esses conceitos e métodos, muitas das vezes não estão de acordo com o rigor matemático, impossibilitando a representação formal do conhecimento. No entanto, mesmo com informalidades, os conceitos e os métodos são fundamentais e mostram como o aluno desenvolve o seu pensamento. Assim, o professor de matemática, com mediação adequada, pode identificar na ação do estudante dificuldades conceituais, podendo realizar as devidas intervenções para a construção dos conhecimentos matemáticos (MARQUES, 2010).

Nos últimos anos, o professor foi surpreendido com a pandemia causada pela COVID-19 que o obrigou a transformações e/ou adaptações. Nesse novo cenário, o docente precisou pensar em aulas que favorecessem a atenção e interação dos estudantes. Dessa maneira, reconhecendo a importância dos atores no processo educacional, utilizamos como base teórica para a elaboração deste trabalho, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC). Essa teoria, buscando explicar o processo de conceitualização, confronta os educandos por meio de situações (tarefas) e a partir delas explora conceitos que os alunos evocam. A vista disso, tomamos a TCC, para analisar as ações adotadas por alunos, quando defrontados por situações do tipo combinação. Acerca desse campo, De Souza, De Castro e Barreto (2020) destacam a necessidade de explorar situações desse tipo na escola. Nesse contexto, surgiu a questão: Quais os conceitos evocados por alunos do 3º ano do Ensino Fundamental quando imersos em situações problemas do campo conceitual da análise combinatória e que podem auxiliar o professor no (re)direcionamento do processo de ensino e aprendizagem?

10.34019/2594-4673.

Com intuito de responder essa questão, constrói-se o trabalho de conclusão do curso de especialização, vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA), campus Santarém. Este artigo, recorte desse trabalho, objetivou analisar os invariantes operatórios (teoremas e conceitos em ação) adotados pelos sujeitos da pesquisa quando envolvidos em situações do Campo Conceitual da Análise Combinatória, a fim de melhorar e/ou adequar o processo de ensino e aprendizagem.

TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS (TCC)

A TCC foi proposta pelo francês Gérard Vergnaud[4]. Para ele, são as situações que fazem com que os conceitos tenham sentido. A teoria tem como base a conceitualização, essa como sendo essencial para o desenvolvimento cognitivo. Sendo, portanto, uma possibilidade para que educadores potencializem as suas aulas visando o desenvolvimento cognitivo dos educandos, inclusive valorizando os conhecimentos prévios.

Vergnaud (1983b) citado por Moreira (2002) define campo conceitual como sendo um grupo de situações que necessita de um certo domínio de outros conceitos de naturezas diferentes. Em síntese a TCC é uma possibilidade positiva para contribuir no processo de ensino e aprendizagem. Afinal esta contribui na análise de como o aluno amplia o seu conhecimento ao longo do ensino para a resolução de situações problemas dos campos do conhecimento. E, faz adequações do conhecimento em suas formas operacionais e predicativas, para que possam superar em sua totalidade ou simplesmente melhorar o que já sabem, dando mais consistência em suas representações linguísticas e simbólicas.

Segundo Moreira (2002), o conceito na TCC é formado por três conjuntos: S – situações; I – invariantes; e R – representações. Representado pela sigla: S.I.R. As situações dão sentido ao conceito, elas são a realidade em si. O conjunto dos invariantes são a operacionalidade adotada pelo indivíduo para resolver as situações. E o terceiro conjunto, são as representações simbólicas que podem ser utilizadas para representar os conceitos e suas propriedades, as

---

[4]Psicólogo e pesquisador em educação matemática, orientado por Jean Piaget em sua tese de doutorado, ampliou as ideias de esquemas proposto na teoria da epistemologia genética.

10.34019/2594-4673.

situações e os procedimentos de tratamento. Zanella e Barros (2014) afirmam que esses conjuntos são inseparáveis, sendo necessário garantir o funcionamento dos três.

Os invariantes operatórios são ingredientes dos esquemas[5], responsável pela organização das ações adotadas pelo sujeito, dividem-se em dois tipos: teoremas-em-ação e conceitos-em-ação. Ambos são conhecimentos-em-ação do sujeito, são implícitos, isto é, os estudantes usam para resolver uma dada situação, mas não conseguem justificar o uso.

Os teoremas-em-ação, são aqueles que em um determinado domínio podem ser tidos como verdadeiros, mas em outros como falsos, isto é, verdadeiro apenas para um grupo seleto de situações. Os conceitos-em-ação, são predicados e qualidades, identificados através de esquemas como: gestos, registros escritos e interações verbais e não verbais entre os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem onde poderão ser notados quais as estratégias que este optou para uma dada classe de situações problemas.

Outrossim, o que o aluno deixa visível em suas ações é apenas a ponta de uma imensidão que está implícito em seus esquemas. Por isso, a necessidade do professor observar esses invariantes operatórios, a fim de identificar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes e redirecionar e/ou adequar sua prática.

ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Esse campo envolve estruturas de multiplicação e divisão. Estruturas que, segundo Vergnaud (2009), evocam outros conceitos, como o que é destacado neste trabalho, conceitos do tipo combinação que estão dentro da classificação produto de medidas. Nesse contexto, salienta-se que é comum a multiplicação ser ensinada, simplesmente, como soma de parcelas iguais. Dando impressão de continuidade entre as operações. Entretanto, o que ocorre é que no quesito de estrutura não há continuidade. Pode-se observar melhor a partir das situações problemas que envolvem as operações, o número de elementos adotado é diferente em cada uma. A operação de adição envolve relação de três elementos entre si, todas de mesma espécie, sendo, portanto, uma relação do tipo ternária. Já na operação de multiplicação, estamos diante de uma operação que envolve problemas do tipo quaternário, ou seja, a relação entre quatro elementos, tomadas duas a duas de mesma espécie, e do tipo ternária (GITIRANA *et. al*., 2014).

---

[5] Conceito herdado da Teoria Epistemologia Genética de Jean Piaget. Para Vergnaud consiste na organização invariante do comportamento para uma dada classe de situações.

10.34019/2594-4673.

A primeira engloba situações de isomorfismo de medidas que consistem em proporção simples ou múltipla, a segunda é produto de medidas que se trata de comparação multiplicativa, combinação e área.

Segundo Vergnaud (2009, p. 253), “o produto de medidas é uma relação entre três quantidades, das quais uma é o produto das outras duas ao mesmo tempo nos planos numérico e dimensional”. Assim, ter a multiplicação apenas como adição de parcelas iguais pode ocasionar confusão, precisamente na propriedade comutativa do produto e ser uma barreira para melhor avanço dos conceitos ligados às estruturas multiplicativas. Logo, as situações do tipo combinatória podem contribuir para o entendimento da propriedade comutativa.

A vista disso, o professor, buscando o desenvolvimento das competências e concepções dos estudantes, precisa selecionar situações adequadas a construção do campo conceitual em estudo. Sendo preciso atentar à complexidade das situações, visando aumentar o nível, conforme surgirem oportunidade, observando os possíveis erros que oportunizarão análises e discussões, acerca dos conceitos em construção.

As situações do Campo Multiplicativo Combinatório podem ser de três tipos: quando o todo é desconhecido, com parte desconhecida e com total desconhecido e número de escolhas implícitas. No primeiro, a quantidade é do tipo discreta ou de contagem e as grandezas estão explícitas. Gitirana *et. al.,* (2014) dizem que o educando precisa nesse tipo de situação desenvolver esquemas que o ajude a perceber que se trata de uma multiplicação, dentre esses esquemas estão a tabela de dupla entrada e o diagrama de árvore. O segundo, é um pouco mais complexo que o primeiro, pois o aluno precisa descobrir quantas e quais escolhas precisa fazer, umas das grandezas não está explícita na situação. No último, nem uma das grandezas está explícita e surge uma dificuldade por parte do aluno pela necessidade imposta de identificar quais e quantas escolhas deverão ser feitas (GITIRANA *et. al.,* 2014).

PERCURSO METODOLÓGICO

Este artigo apresenta estudo qualitativo acerca dos invariantes operatórios evocados por estudantes, imersos em situações do campo conceitual combinatória que podem auxiliar o professor no (re)direcionamento do processo de ensino e aprendizagem. Segundo Flick (2009, p. 23) a pesquisa qualitativa se desenvolve na “escolha adequada de métodos e teorias convenientes, no reconhecimento e na análise de diferentes perspectivas; nas reflexões dos

doi 10.34019/2594-4673.

pesquisadores a respeito de suas pesquisas como parte do processo de produção de conhecimento; e na variedade de abordagens e métodos.”

Ademais, o artigo consiste em estudo de natureza básica no qual buscou-se desenvolver pesquisa exploratória aos moldes da pesquisa de campo e estudo do caso. De acordo com Severino (2017) a primeira, caracteriza-se por objeto abordado em ambiente de origem própria, já o estudo do caso, para o mesmo autor é definida como um caso particular que possui características de casos semelhantes, sendo ela uma amostra representativa entre as demais situações.

Além das observações feitas na coleta de dados, foi realizada entrevista semiestruturada, que segundo Ludke e André (1986) consiste em um roteiro básico, sem rigidez, sendo livre para fazer adaptações pelo entrevistador quando houver necessidade. A entrevista visou conhecer as percepções da professora sobre os procedimentos adotados pelos alunos, bem como as suas impressões acerca dos conceitos evocados por estes no Campo Conceitual Combinatória.

A pesquisa ocorreu em uma escola particular do município de Santarém-PA, junto a 46 alunos do 3º ano do Ensino Fundamental I, divididos em duas turmas. A primeira com 26 alunos e a segunda com 20 alunos. Durante a coleta de dados, devido a pandemia da COVID 19, a escola estava ofertando aulas com alunos presentes na sala física (aproximadamente 30% do total) e outros em sala virtual. A coleta aconteceu no 4º bimestre do ano de 2020, durante uma aula de revisão, com duração de 60 minutos em cada turma. Sublinha-se que a professora de matemática da turma possui Licenciatura Integrada em Matemática e Física, com 3 anos de experiência como professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Na aula observada, a professora explorou dez situações problemas do tipo combinação. Durante todo o tempo de aula recorreu-se a observação, como estratégia de coleta de dados. Segundo Ludke e André (1986), nessa estratégia, o pesquisador não oculta suas atividades, deixando em parte o que pretende, mas tendo a preocupação para não haver alterações no comportamento do grupo observado. As observações aconteceram através da plataforma *Google Meet*[6]. A professora titular da turma, presente na sala física com um grupo de alunos, acompanhou os demais alunos que estavam online pela plataforma. Fazendo uso de

[6] Recurso do Google com uma interface simples que permite a realização de vídeos conferências instantâneas e/ou agendadas, disponível para uso em smartphones e computadores.

computador, projetor e mesa digitalizadora, a atividade foi compartilhada para ambos os grupos de alunos.

Optou-se observar os participantes remotamente, devido dois fatores apresentados pela professora da turma: 1) a relação professor-aluno, ambos já vinham a três bimestres conhecendo-se e estreitando vínculos, a segurança e confiança estavam bem mais solidificados com a professora titular; 2) por serem crianças do ensino fundamental, na faixa etária de 8 anos, ficariam tímidos no encontro remoto e, talvez, a participação na atividade não acontecesse como o esperado, prejudicando o objetivo da pesquisa.

Outrossim, o acesso aos vídeos das aulas gravadas, possibilitou olhar de forma mais cuidadosa as ações dos alunos participantes da pesquisa, em cada situação desenvolvida, buscando reconhecer os invariantes operatórios adotados. Todas as observações registradas e os dados obtidos na entrevista com a docente da turma foram analisados à luz da teoria dos campos conceituais.

ANÁLISE DAS REPRESENTAÇÕES DOS ALUNOS

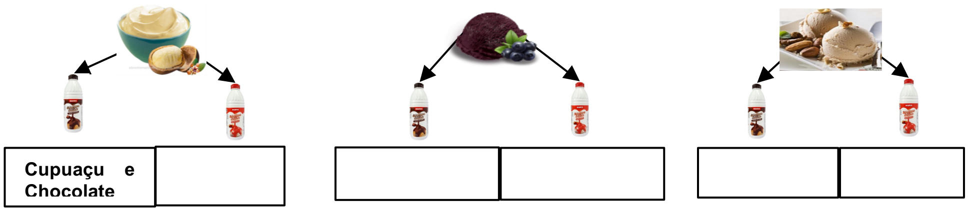
Nesta seção será discutido à luz da TCC os dados junto aos alunos participantes da pesquisa. Para contribuir com a discussão, tomam-se falas da professora titular da turma, colhidas mediante a entrevista realizada. Ressalta-se que, para efeito de organização, classificou-se as situações em três categorias: *situações com dois eventos e com representação gráfica; situações com dois eventos sem representação gráfica e situações com três eventos sem representação gráfica.* Além disso, devido ao grande volume de informações presentes nos registros dos alunos, optou-se, em apresentar, análise referente às situações que provocaram maior articulação entre os alunos e conduziram a mais comentários relacionados aos conceitos relevantes para pesquisa.

Situações com dois eventos e com representação gráfica

As situações com dois eventos e representação gráfica pretendia o preenchimento da representação pictórica, identificação da operação matemática que descreve a situação e listagem de outras possibilidades ou realização da representação quando alterado o número de elementos de um dos conjuntos dados na situação.

Quadro 1 – Situação 1 com dois eventos e representação gráfica

1. Magali decidiu tomar um sorvete, chegando à sorveteria havia 3 sabores de sorvete: cupuaçu, açaí e castanha e 2 tipos de cobertura: chocolate e morango.
a) Observe e complete as possibilidades de sorvete para Magali.



b) Quantas são as possibilidades de Magali pedir seu sorvete com um sabor e uma cobertura? Complete a representação matemática. 3 x _______ = _______
c) E se colocarmos mais uma cobertura, agora de leite condensado, quais são as possibilidades de sorvete Magali vai ter? Como você representaria as possibilidades?

Fonte: Elaboração do(s) autor(es)[7].

Durante a realização da situação 1 (quadro 1), observou-se que os alunos identificaram: os conjuntos; os seus respectivos elementos; e verbalizaram todas as possibilidades que a situação permitia. Ao alterar o valor dos elementos de um dos conjuntos da situação (item ***c***) as respostas foram imediatas quanto ao número de possibilidades e apresentaram a operação de multiplicação.

Inicialmente usaram a representação por meio da árvore de possibilidades e na sequência a operação matemática que descrevia o resultado como sendo $3x2 = 6$. Caso, esse aluno não tivesse domínio da tabuada de multiplicação, poderia recorrer a operação de adição, onde para cada tipo de sorvete há dois tipos de cobertura, sendo três os tipos de sorvete, então: $2 + 2 + 2 = 6$. Ou ainda, pela análise da representação, este aluno pode contar as possibilidades, sem evidenciar operação alguma. Em casos como os descritos, teremos conceitos apresentados de uma forma mais simples, na linguagem dos alunos de 3º ano, que se tornam teoremas, pois são verdadeiros para a situação.

Foi perguntado sobre o uso de representações nas situações e, a professora afirma que "*o material didático deles trabalha dessa forma, ele sempre vem com uma representação pictórica, às vezes uma imagem do material dourado, alguma coisa específica, um desenho.*

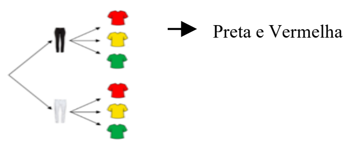
[7] Montagem feita pelos autores com imagens retiradas das páginas Sorvete Nevasca, Sol e Neve, Comidas e Receitas e Doce Malu, respectivamente. As imagens estão disponível nos sites: https://sorvetesnevasca.com.br/product/583/; http://soleneve.com.br/produto/tradicional; https://www.comidaereceitas.com.br/sorvetes/sorvete-de-castanhas.html; https://www.docemalu.com.br/cobertura-para-sorvete-chocolate-1-3kg---marvi/p. Acesso em 16 nov. 2020.

Ele formaliza algo para a criança aprender, o livro trabalha nessa logística, então fazer isso nessas situações ajudou muito eles a entenderem, principalmente essa questão de combinatória, as ideias das árvores".

Ainda sobre o uso de representações, o professor Gérard Vergnaud (1996) destaca na TCC que "[...] as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas". Contudo, há casos, como na situação 2 (quadro 2) em que os alunos não fizeram uso da representação, foi observado que o aluno primeiro apresentou a quantidade de possibilidades e só então evidenciou a operação que gerava o resultado.

Quadro 2 – Situação 2 com dois eventos e representação gráfica

2. Mônica foi em uma boutique, ficou em dúvida entre 3 blusas e 2 calças.
a) De quantas formas possíveis Mônica pode montar um look contendo uma blusa e uma calça?
b) Observe e complete a representação das possibilidades de look para Mônica?



c) E se forem agora 5 blusas e 4 calças, quantas são as formas de Mônica montar um look? Como ficaria a representação dessas possibilidades?

Fonte: Elaboração pelo(s) autor(es)[8].

Para enfatizar o seu pensamento acrescentou o cálculo, quando questionado como havia pensado o aluno argumentou como sendo o seguinte: "*ela tem duas possibilidades de calças para três possibilidades de blusas, logo vai ser três vezes duas que é seis*". Nessa perspectiva, é possível identificar os invariantes operatórios que consistem nos conceitos e teoremas em ação, o primeiro de acordo com Zanella e Barros (2014) são implícitos e se assumem pertinentes na ação, nesse caso, é preciso o professor estar atento, pois os alunos em sua maioria verbalizaram as soluções ou utilizaram representações gráficas para encontrar o resultado, enfatizando uma qualidade ou predicado do conceito trabalhado.

Ainda nessa situação, houve alunos que realizaram a operação de adição, que também está correto, para cada blusa tem-se duas possibilidades de calça, portanto $2 + 2 + 2 = 6$, para

[8] Montagem feita pelos autores com imagens retiradas da página Clubes de Matemática da OBMEP. A imagem está disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/texto_006-principio-fundamental-de-contagem/. Acesso em 16/11/2020.

10.34019/2594-4673.

essa situação tem-se a suposição de ser um teorema em ação. Porém, acredita-se que o aluno ainda não dominou a tabuada de multiplicação e recorreu à operação que aprendeu primeiro. Gitirana *et. al., (2014)* destacam que para problemas de combinatória não existem muitas dificuldades por parte dos alunos sobre a ruptura existente entre as operações de adição e multiplicação, as dificuldades são visíveis em outros campos das estruturas multiplicativas.

Quando solicitado a operação matemática que descrevia a solução da situação, a professora associa a expressiva participação dos alunos em detrimento de naquele momento estarem sendo apresentados diferentes conceitos de multiplicação, dentre elas, a combinação. No entanto, ela ressalta que se apresentar uma situação e dizer que se trata de uma combinação, os alunos não reconhecerão "*porque não é algo que faz parte do vocabulário, mas eles conseguem captar a ideia e visualizar que aquilo é uma forma de enxergar a multiplicação. Muitos deles, vão contando as possibilidades e veem que as somas são de valores iguais, e aí associam a multiplicação, justamente porque um dos conceitos que eles veem de multiplicação é a soma de parcelas iguais*".

A fala da docente destaca o que Vergnaud caracteriza em sua teoria como teoremas em ação implícitos, embora os alunos não saibam que se trata de uma propriedade matemática ou como descrever esse procedimento em suas ações com um rigor matemático, este tem validade nas situações-problema.

Ainda nesse contexto, foi perguntado sobre os alunos identificarem os conceitos de combinação nas situações, a professora da turma reforça que "*a criança não tem a ideia formada de combinação, ela entende que é uma combinação por fazer as possibilidades, ela consegue compreender esse conceito de forma básica. Associando diretamente a própria multiplicação, isso devido a forma como é apresentada a multiplicação. Existem vários meios e essa questão de você combinar é uma delas, assim como a disposição retangular, por exemplo*." Dessa maneira, entende-se que apresentar a multiplicação de outras maneiras para ampliar o entendimento do aluno é fundamental para abstrair as ideias e sistematizar o pensar.

Por haver representações gráficas nas situações os alunos verbalizaram as suas respostas, caracterizando dessa maneira os invariantes operatórios do tipo conceitos em ação, como por exemplo, ao apresentar quais as possibilidades de sorvete e os looks que as personagens teriam. No entanto, é possível que devido ao uso de representações os teoremas em ação aconteceram na sequência, apresentando a operação para formalizar o resultado já

10.34019/2594-4673.

obtido, ainda assim tem-se que na fala de muitos dos alunos ficou explícito como estavam entendendo e visualizando as respostas e com as falas apresentadas pela docente da turma, temos a comprovação de que não era um conceito novo e sim uma das formas já apresentada em outros momentos para o conceito de multiplicação.

Situações com dois eventos e sem representação gráfica

A segunda classe consiste em situações problemas envolvendo combinação com dois eventos e sem a representação gráfica, o objetivo dessa classe foi fazer o aluno identificar as grandezas discretas em cada situação, apresentar a solução por meio da operação que descrevia o evento e representar por meio de árvore de possibilidades ou listagem todas as possibilidades apresentadas para a situação.

Quadro 3 – Situação 3 com dois eventos e sem representação gráfica

3. Cebolinha foi à pizzaria e escolheu suco de abacaxi e pizza calabresa.

a) Qual é o número total de escolhas de 1 suco e 1 pizza?

b) Faça uma lista com todas as possibilidades de escolha de 1 suco e 1 pizza e confira a resposta dada no item **a.**

c) Se a pizzaria oferecesse 14 sabores de pizza e 5 tipos de suco, então quantas escolhas de 1 suco e 1 pizza Cebolinha teria?

Fonte: Elaboração pelo(s) autor(es)[9]

Na situação 3 (quadro 3), pode o aluno afirmar que não há mais de uma possibilidade, podendo pedir apenas um tipo de suco e um sabor de pizza, entende-se que esse aluno não está utilizando o pensamento com hipóteses e sim associando apenas a sua realidade. Por outro lado, quando ele assume que é possível fazer combinações com os tipos de suco e os sabores de pizza, tem-se que o pensamento hipotético está em desenvolvimento e que as grandezas podem ser combinadas de diferentes maneiras, o avanço é maior ainda, quando o aluno sistematiza as combinações encontradas apresentando o total de possibilidades para a referida situação ou sendo, ao invés de listar as combinações, ele realiza a operação matemática que melhor descreve o problema. A sistematização do pensamento é um encaminhamento para o entendimento do

[9]Montagem feita pela autora com imagens retiradas da página Imagens png e do livro Dante, 2017. As imagens estão disponíveis em: https://www.imagenspng.com.br/1875/sem-categoria/cebolinha-01/attachment/cebolinha-01-2/. Acesso em 16/11/2020 e no livro DANTE, Luiz Roberto. Projeto Ápis: Matemática - 3º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017.

Princípio Fundamental da Contagem (PFC), sendo este uma das estratégias mais importantes a serem desenvolvidas para a solução de problemas de combinação

Na classe em questão, os alunos utilizaram a representação por meio de listagem e apresentaram a operação matemática que descrevia a situação, a participação foi expressiva, e os alunos apontavam as soluções tanto por meio da sala de aula virtual como na sala de aula, presencial.

As grandezas explícitas na situação, ajudam os alunos dos anos iniciais na obtenção das combinações, bem como a listagem de todas as possibilidades, segundo Gitirana *et. al*., (2014, p. 78) "os problemas de combinação tornam-se ainda mais complexo quando o aluno tem que descobrir quantas e quais são as escolhas a serem feitas". A oportunidade de utilizar a listagem ou a árvore de possibilidade certifica que foram feitas todas as combinações possíveis, o que é uma garantia para a criança que ainda está iniciando as suas generalizações quanto aos conceitos abordados.

Muitos alunos apresentavam a operação matemática utilizando a propriedade comutativa da multiplicação, nas situações dessa classe, os alunos afirmam, por exemplo, "*é seis, porque três vezes duas ou duas vezes três é seis*", como sendo o mesmo resultado. De acordo com a professora da turma: "*os alunos reconhecem a propriedade comutativa. Ele não sabe o enunciado da propriedade, mas se for apresentado para ele a operação duas vezes três, por exemplo, ele sabe que é exatamente igual a três vezes duas"*.

O procedimento adotado pelos alunos classifica-se dentro dos invariantes operatórios como um teorema em ação, pois eles usam a propriedade comutativa e para a situação descrita acima ela é válida, contudo, segundo a professora, eles não sabem que se trata de uma propriedade da operação de multiplicação.

Um outro ponto observado nessa classe, trata-se das estratégias adotadas pelos alunos para resolver o item c (quadro 3). O procedimento adotado por um aluno foi inicialmente 14 mais 14, depois 28 mais 14, então, pegou 28 mais 28 que é o 14 somando 4 vezes, isso gerou 56, agora, somando mais 14 obteve como resultado o numeral 70. Acreditamos que o procedimento adotado trata-se de um conceito em ação, o aluno usou a informação de que a multiplicação pode ser dada como soma de parcelas iguais para chegar na resposta.

Para a professora da turma, pode existir duas possibilidades para que o aluno tenha adotado a soma de parcelas iguais ao invés do algoritmo de multiplicação, a primeira é o fato de o aluno ainda no 2º ano ter a multiplicação como: "*somas sucessivas. Para eles essa é a ideia principal de fazer uma multiplicação*". A segunda possibilidade apresentada pela docente consiste em o aluno ainda não ter absorvido "*todas as ideias de multiplicação, dentre elas, a combinação*".

A fala da docente aponta uma possível lacuna na formação do conceito de multiplicação apresentada por esses alunos que recorrem a somas sucessivas. No entanto, houve alunos que apresentaram a solução por meio do algoritmo da multiplicação, o que caracteriza a competência apontada por Gérard Vergnaud na Teoria dos Campos Conceituais.

Na situação 4 (quadro 4) os alunos precisavam nomear e fazer a listagem de todas as possibilidades encontradas. Assim, para os 6 tipos de sabonetes: $S_1, S_2, \ldots, S_6$ e para as 3 possibilidades de toalhas: T_1, T_2 e T_3.

Quadro 4 – Situação 4 com dois eventos e sem representação gráfica

4. Cascão decidiu tomar um banho, foi em seu armário e viu que havia 4 sabonetes de fragrância diferente e 2 toalhas. a) De quantas formas diferentes Cascão pode finalmente tomar um banho onde tenha um sabonete e uma toalha? b) E se agora Cascão tiver 6 sabonetes e 3 toalhas. Quantas são as possibilidades para que Cascão escolha um sabonete e uma toalha? c) Represente as possibilidades que você encontrou no item b.

Fonte: Elaboração pelo(s) autor(es).

Assim, um aluno optou por fazer uma ordem diferente dos demais, ao invés de S_1, T_1; $S_1, T_2 \ldots S_6 T_3$, ele alternou a combinação dos sabonetes e toalhas, por exemplo, $S_1, T_1; S_2, T_2$ etc, mas ao final apresentando as 18 possibilidades, a escolha do aluno, ou seja, esse aluno pode ser considerado competente quando fez o uso de uma estratégia diferente de listagem, sendo mais econômica ou elegante para ele, ou ainda, mostrando que existem diferentes maneiras de chegar na solução correta.

Para encerrar, tem-se a situação 5 (quadro 5) em que: dado 3 meninos e 3 meninas de quantas maneiras poderiam ter uma dupla contendo um menino e uma menina. Nessa situação aconteceu o que é apontado por Montenegro (2018) o aluno associar a situação a sua realidade, é o caso, por exemplo do aluno que apresentou: 1 menino e 1 menina, e as possibilidades de duplas serem 3.

Quadro 5 – Situação 4 com dois eventos e sem representação gráfica

5. Para representar a Turma da Mônica em um campeonato de Matemática será escolhida uma dupla formada por 1 menino e 1 menina.

a) Para saber as possibilidades, faça uma representação desenhando as duplas que podem ser formadas.
b) Agora, responda: Quantos meninos são candidatos?
c) E quantas meninas?
d) Quantas duplas são possíveis formar com estes candidatos?
e) Como podemos indicar o total de duplas? Complete.
________ x _________ = _________

Fonte: Elaboração pelo(s) autor(es).[10]

No entanto, foi apresentado também o número total de combinações e o aluno explicou como chegou à solução: "*Dá para formar três grupos com cada um dos meninos, três meninos dão nove*". Esse aluno, encontrou as 9 possibilidades fazendo ligações de um personagem menino com as 3 possibilidades de meninas, até completar todas as maneiras. Um outro aluno, sugeriu fixar o dedo indicador em cima da personagem X (menino) e associar com cada uma das personagens meninas, até completar todas as maneiras possíveis. Nessa situação, a suspeita é de ter conceitos em ação, quando há diferentes estratégias adotadas pelos alunos, sem qualquer rigor matemático, apenas por meio da verbalização; e na formalização, que tem validade local independente da maneira escolhida, mesmo apresentando a solução verbalmente, acredita-se ser um teorema em ação.

Situações com três eventos e sem representação gráfica

A última classe de situações consiste na apresentação de três eventos. O objetivo dessa situação é estender a ideia de combinação para mais de dois eventos e levar os alunos a generalização intuitiva de que dado os elementos de dois ou mais conjuntos onde a ordem não importa, para encontrar o total de combinações, basta que seja feito o produto/multiplicação dos elementos desses conjuntos, em outras palavras, o aluno chegará ao conceito de PFC.

[10]Montagem feita pela autora com imagens da página do Jornal O Liberal. A imagem está disponível em: https://www.oliberal.com/cultura/turma-da-monica-fala-sobre-ansiedade-luto-tristeza-e-medo-em-nova-colecao-1.207305?page=1. Acesso em: 16/11/2020.

Na situação 6 (quadro 6), o aluno deveria identificar os três valores, fazer a generalização multiplicando-os e descobrir o número total de combinações.

Quadro 6 – Situação 4 com dois eventos e sem representação gráfica

6. Na festa de aniversário do Cebolinha, cada criança vai receber um saquinho de lembrança. Para receber os saquinhos, dona Cebola comprou 2 sabores de pirulito, 3 sabores de chiclete e 2 sabores de bombons. Quantos tipos diferentes de saquinho ela pode fazer com um sabor de pirulito, um sabor de chiclete e um sabor de bombom?

Fonte: Elaboração pelo(s) autor(es).

Inicialmente foi afirmado por alguns que a resposta seria 6, pois multiplica 2 vezes 3. Tal afirmação acredita-se ter sido feita em decorrência do número de eventos trabalhados até essa situação, eram todos em dois. No entanto, houve aluno que apresentou solução como sendo 12 o número de possibilidades e a professora solicitou que compartilhasse o seu raciocínio, Magina *et. al.* (2008), afirmam que a linguagem natural auxilia na explicitação dos teoremas em ação.

Assim, o aluno relatou que identificou os valores, somou as quantidades dos sabores de pirulito e bombons que deu 4 e na sequência multiplicou esse valor pelos 3 sabores de chiclete, tendo como resultado o numeral 12. Vergnaud destaca que no confronto com uma situação da qual o estudante não tem esquemas, em um processo de desequilíbrio, fará arranjos daqueles que conhece, podendo adaptá-los ou construir novos esquemas. Na fala do aluno é possível identificar um invariante operatório, que julgamos ser um conceito em ação, primeiro somar e na sequência multiplicar, pois com base nas experiências anteriores ele precisou executar apenas uma multiplicação, então para contornar a situação usou outra operação, a adição, para satisfazer o que acontecia nas situações anteriores, entendemos que houve a tentativa de adaptar um esquema já conhecido.

No entanto, esse conceito ao ser formalizado perde a validade, nesse sentido, sugerimos que uma forma de contornar a situação seja alterar os elementos dos conjuntos e verificar o que acontece ou pedir aos alunos que façam a listagem de todas as possibilidades e a partir dessas confrontá-los com perguntas que os levem a perceber que para mais eventos a adição não será suficiente como aconteceu nas situações de dois eventos.

Assim, entende-se que tal dificuldade pode ter relação com dois fatores: 1) terem visto até o momento operações apenas com dois valores e para não deixarem na situação o terceiro

10.34019/2594-4673.

valor de fora, recorreram a primeira operação que aprenderam durante o ensino, que é a adição, isto é, tentaram decompor e recompor os esquemas disponíveis e 2) a multiplicação ensinada como soma de parcelas iguais está bastante enraizada no ensino da multiplicação, mesmo vendo a multiplicação como combinação, isto é, produto de medidas, a primeira maneira ensinada é recorrente caso sintam a necessidade de utilizá-la, como já bem disse o professor da turma na classe anterior. Dessa maneira, o professor deve estar atento para observar e encontrar uma solução que amplie e incorpore outras formas de enxergar a multiplicação, sem causar confusão ao aluno.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ratifica-se que buscar identificar e analisar os invariantes evocados pelos estudantes em ação é importante para que o professor possa conduzi-los a melhor compreensão dos conceitos do Campo Conceitual Combinatória, por meio do direcionamento e/ou redirecionamento das atividades propostas. A vista disso, as discussões apresentadas neste artigo, indicam que os estudantes participantes da pesquisa apresentam domínio satisfatório da tabuada, fazem uso da propriedade comutativa e conseguem detectar os dados na situação, sejam eles explícitos ou não, além disso, apresentaram competência em propor outras possibilidades de solução para as situações. Podemos afirmar que mesmo não sendo observadas grandes dificuldades conceituais, sem dúvidas, as situações discutidas junto aos alunos, possibilitaram perceber conceitos evocados e em construção. Outrossim, também não podemos deixar de sublinhar que, a partir da análise dos registros dos alunos, conceitos matemáticos importantes iniciam seu processo de construção ainda nos anos iniciais da vida escolar, por isso estudos como este precisam ser realizados para contribuir com o processo de conceitualização do aluno.

Ressalta-se que na última situação, talvez não se flagrou um "erro", mas o momento em que os alunos buscaram adaptar seus esquemas de resolução a uma nova classe de situação, pois tratava-se de uma situação de três eventos. Nesse sentido, mostra-se relevante que o professor atente para o tempo de construção de um conceito que não é o mesmo para todos os alunos, evidenciando-se a necessidade de situações capazes de evocar tais conceitos durante todo processo de escolarização.

No mais, sublinha-se que o tempo de observação e o conjunto limitado de situações, assim como a forma remota de coleta de dados adotada pela pesquisa, devido às condições imposta pela pandemia de COVID-19, podem ter dificultado a interação entre os sujeitos da pesquisa e, assim, inviabilizado análises mais profundas. Todavia, entende-se que esta pesquisa apresenta um estudo que aponta caminho importante a ser considerado por professores de matemática interessados em compreender como conceitos associados ao campo combinatório são percebidos por alunos das séries iniciais.

A pesquisa é passível de ajustes e reproduções em diferentes níveis do ensino, na busca de resultados que promovam reflexão e ações diferenciadas dos professores, bem como o despertar pelo aprender matemática dos alunos, na intenção de melhorar o processo de ensino e aprendizagem no conteúdo aqui abordado. Ademais, abre diálogo com leitores que podem aprimorá-la, buscando novas classes de situações e novos diálogos capazes de identificarem invariantes operatórios: conceitos-em-ação e teoremas-em-ação importantes para o processo de conceitualização inerente ao campo conceitual da análise combinatória.

REFERÊNCIAS

DE SOUSA, D. do C.; DE CASTRO, J. B.; BARRETO, A. L. de O. Desempenho, representações e estratégias de estudantes do 5º ano do ensino fundamental na resolução de situações de combinatória. **VIDYA**. Santa Maria. Vol. 40, n. 2, p. 397-416, 2020.

FLICK, U. **Introdução à pesquisa qualitativa**. Porto Alegre: Artmed. Links, 2009.

GITIRANA, V; CAMPOS, T. M. M; MAGINA, S; SPINILLO, A. **Repensando Multiplicação e Divisão. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. São Paulo: PROEM, 2014.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MAGINA, S; CAMPOS, T. M. M; NUNES, T; GITIRANA, V. **Repensando Adição e Subtração. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. - 3ª. ed. - São Paulo : PROEM, 2008.

MARQUES, T. B. I. Professor ou Pesquisador. In: BECKER, F; MARQUES, T. B. I. (Orgs.). **Ser professor é ser pesquisador**. - 2ª. ed. - Porto Alegre : Mediação, 2010.

MONTENEGRO, J. A. **Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias**. 2018. 448 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em ensino de ciências**. Porto Alegre. Vol. 7, n. 1, p. 7-29, 2002.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. Cortez editora, 2017.

VERGNAUD, Gerárd. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas. Horizontes Pedagógicos**, Lisboa, 1996.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Tradução Maria Lucia Faria Moro; revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

ZANELLA, Marli Schmitt; BARROS, R. M. de O. **Teoria dos campos conceituais: situações problemas da estrutura aditiva e multiplicativa de naturais**. Curitiba: CRV, 2014.

HISTÓRICO

Submetido: 18 de agosto de 2022.
Aprovado: 29 de janeiro de 2023.
Publicado: 03 de abril de 2023.