RIDEMA
Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática

O problema do cachorro e do coelho: uma perseguição a partir de produções de significados

The problem of the dog and the rabbit: a chase based on productions of meanings

José Claudinei Ferreira[1]
Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG)

Rejane Siqueira Julio[2]
Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG)

RESUMO

Neste texto, temos o objetivo de apresentar nossas análises das interações ocorridas no processo de resolução do problema do cachorro e do coelho, considerado familiar e não-usual, focados na compreensão do enunciado dele. Essas interações ocorreram no formato remoto, por meio de encontros síncrono e/ou assíncrono com discentes de um curso de Licenciatura em Matemática, de diferentes períodos. Nos baseamos em teorizações sobre resolução de problemas realizadas no âmbito da Educação Matemática e dos documentos curriculares oficiais federais e em alguns pressupostos teóricos do Modelo dos Campos Semânticos. Como resultados apontamos que houve diferentes produções de significados a partir do enunciado do problema, implicando em diferentes produções de conhecimento e, no decorrer das aulas, vimos que havia, ainda, diferentes visões sobre o que significa resolver um problema. Por fim, apontamos a potencialidade do problema ser desenvolvido em outras salas de aula.
Palavras-chave: Geometria Analítica; Aproximação Linear; Resolução de Problemas; Modelo dos Campos Semânticos; Formação de Professores que Ensinam Matemática.

ABSTRACT

In this text, we aim to present our analyses of the interactions that took place in the process of solving the problem of the dog and the rabbit, considered familiar and unusual, focused on understanding its utterance. These interactions took place in the remote format, through synchronous and/or asynchronous meetings with students of a Mathematics Degree course, from different periods. We are based on theorizations on problem solving carried out within the scope of Mathematics Education and official federal curriculum documents and on the theoretical assumptions of the Model of Semantic Fields. As a result, we point out that there were different productions of meanings from the problem statement, implying different productions of knowledge and, during the classes, we saw that there were still different views on what it means to solve a problem. Finally, we point out the potential of the problem to be developed in other classrooms.
Keywords: Analytical Geometry; Linear Approximation; Problem solving; Model of Semantic Fields; Training of Teachers Who Teach Mathematics.

---

[1] Doutor em Ciências Matemáticas pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (ICMC-USP), campus de São Carlos (SP). Professor do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG), Alfenas, Minas Gerais, Brasil. Endereço para correspondência: Instituto de Ciências Exatas/ Departamento de Matemática. Rua Gabriel Monteiro da Silva, 700, Centro, Alfenas, Minas Gerais, Brasil, CEP: 37130-001. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4607-8431. Lattes: http://lattes.cnpq.br/6808752952332925. E-mail: jose.ferreira@unifal-mg.edu.br.

[2] Doutora em Educação pela Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora do Instituto de Ciências de Extas e do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG), Alfenas, Minas Gerais, Brasil. Endereço para correspondência: Instituto de Ciências Exatas/ Departamento de Matemática. Rua Gabriel Monteiro da Silva, 700, Centro, Alfenas, Minas Gerais, Brasil, CEP: 37130-001. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3248-800X. Lattes: http://lattes.cnpq.br/1798884495942862. E-mail: rejane.julio@unifal-mg.edu.br.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste texto trazemos nossas análises sobre as interações ocorridas durante o processo de resolução de um problema, o problema do Cachorro e do Coelho, que foi trabalhado na disciplina optativa intitulada “Resolução de Problemas em Sala de Aula de Matemática”, oferecida a discentes, cursando diferentes períodos, do curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Alfenas. Em particular, focamos nas produções de significado a partir do enunciado que possibilitaram diferentes modos de pensar ou tentar resolver o problema.

Partimos do pressuposto que

> Aprender envolve, [...], uma complexa combinação de motivação, reflexão, imersão em práticas culturais, e temo, para dizer o mínimo, e não penso que esta complexidade possa ser reduzida a componentes menores dos quais um professor ou uma professora possam se apoderar e “por em prática”. (LINS, 2005, p. 122)

Consideramos que os cursos de Licenciatura em Matemática podem oferecer diferentes oportunidades de imersões em práticas culturais, com diferentes tipos de discussões no decorrer deles, em especial, dentro das próprias disciplinas, sejam elas mais voltadas para conteúdos matemáticos ou educacionais (JULIO; FERREIRA, 2018). A abordagem de diferentes metodologias de ensino pode ser entendida como uma prática cultural marcada, por exemplo, pelas teorizações em Educação Matemática e em Matemática ou pelas ações de políticas públicas, como os documentos curriculares oficiais.

Acreditamos que as vivências e as reflexões por futuros professores de Matemática, de e sobre metodologias de ensino – diferentes da metodologia tradicional de ensino vigente, amplamente vivenciada por futuros professores de matemática na Educação Básica –, como a resolução de problemas, pode contribuir para que elas se tornem uma possibilidade a mais de atuação futura dependendo das intenções/posturas educacionais de uma escola e do professor, ou seja, de seus projetos políticos/profissionais. Concordamos com Lins (1999, p. 93) que “o papel da reflexão teórica deve sempre ser o de nos oferecer a oportunidade de fazermos escolhas, e estas escolhas nos dão a oportunidade de refinarmos nosso olhar e de tornarmos mais bem definido nosso projeto profissional”.

Nos colocando, agora, na posição de professores pesquisadores, pelo estudo metódico e intencional (FIORENTINI; LORENZATO, 2009), podendo implicar em contribuições para a área de Educação Matemática ou para a área de Matemática e ao mesmo tempo para nosso desenvolvimento profissional enquanto professores formadores, que realizamos nossas análises a partir de alguns pressupostos do Modelo dos Campos Semânticos (MCS) (LINS, 1999, 2012). Consideramos que este problema possibilitou diferentes modos de produção de significados a partir das estratégias adotadas, indicando a importância de dar voz e ouvidos aos discentes, e pode gerar possibilidades para salas de aula.

SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas se faz presente, por exemplo, em teorizações na Educação Matemática. Para Onuchic (2004),

> Resolver problemas significa engajar-se numa tarefa para a qual o método de solução não é conhecido de saída. Para achar a solução de um problema os estudantes precisam buscar recursos em seu conhecimento e, através desse processo, frequentemente desenvolvem novas compreensões matemáticas. (ONUCHIC, 2004, p. 5)

Onuchic (1999) distingue três abordagens da resolução de problemas, com base em Schroeder e Lester (1989): ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar através da resolução de problemas. Na concepção *ensinar sobre resolução de problemas*, ela destaca o modelo de Polya (1995), por meio das quatro fases do processo de resolução de problemas (compreender o problema, descoberta de um plano, execução do plano e verificação – retrospecto) que devem ser ensinadas aos alunos assim como algumas estratégias de resolução. Ao professor cabe o papel de questionador, objetivando auxiliar o aluno e desenvolver a capacidade de resolver futuros problemas por si mesmo.

Na abordagem *ensinar a resolver problemas*, a preocupação do professor, para Onuchic (1999) é aplicar o conhecimento matemático na resolução destes. O professor apresenta aos alunos conceitos e exemplos das estruturas matemáticas para que apliquem na resolução de problemas com a finalidade de capacitar o aluno em aplicar esse conhecimento.

E, na abordagem *ensinar através da resolução de problemas*, o processo de ensino e aprendizagem tem como ponto de partida um problema, definindo como “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer.” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81). Ele é proposto de modo a contribuir na formação de conceitos e no desenvolvimento de

doi 10.34019/2594-4673.

estratégias de resolução, antes de sua apresentação em linguagem matemática formal. É nesta abordagem que a resolução de problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, de aprendizagem e de avaliação (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011) e a ser escrita com iniciais maiúsculas (Resolução de Problemas). Nesta abordagem, o professor possibilita ao aluno o máximo de independência para que ele possa desenvolver seus próprios mecanismos de resolução de um problema, através de elaborações de conceitos próprios. A estruturação didática de tais situações tem o objetivo de apresentar problemas de modo que os alunos aceitem o desafio (ONUCHIC, 1999) e se responsabilizem por seus processos de aprendizagem.

Um roteiro para contribuir com professores interessados nessa metodologia, segundo Onuchic e Allevato (2011), envolve: preparação do problema, leitura individual pelo aluno, leitura em conjunto (para entendimento e esclarecimento de dúvidas quanto ao enunciado); resolução do problema em grupo, trabalhando de forma colaborativa e cooperativa; observar e incentivar o trabalho dos alunos; registro das resoluções na lousa; plenária (discussão das diferentes resoluções registradas na lousa tendo o professor como um guia e mediador das discussões); busca de consenso sobre o resultado correto; formalização do conteúdo que consiste em padronização dos conceitos, princípios e procedimentos, destacando diferentes técnicas operatórias e demonstrações.

A resolução de problemas também é abordada nos documentos curriculares oficiais brasileiros. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN de Matemática) (BRASIL, 1998) ela é indicada como ponto de partida da atividade Matemática e são oferecidos os seguintes princípios de sua utilização: situação-problema como ponto de partida e não a definição; o problema não é um exercício em que o aluno aplica uma fórmula ou processo operatório; aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema em um momento e em outro momento o aluno pode utilizar o que aprendeu para resolver outros problemas; um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos; a resolução de problemas é uma orientação para a aprendizagem e por isso não é para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem (BRASIL, 1998).

A partir desses princípios, é dito que "Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la" (BRASIL, 1998, p.

41). O desafio em querer resolver uma situação (situação-problema) é que a torna um problema e nem sempre o que é um problema para uma pessoa, é para outra. No processo de resolução é pressuposto que o aluno: “elabore um ou vários procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros alunos; valide seus procedimentos” (BRASIL, 1998, p. 41).

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), a resolução de problemas é colocada como um processo matemático, sendo objeto e estratégia para a aprendizagem, para o desenvolvimento de competências, nos parecendo uma concepção que o documento traz, a de uma estratégia. Outra concepção nos parece ser a resolução de problemas como aplicação de conceitos, que pode ser lida no seguinte exemplo: “Assim, espera-se que eles [os alunos] desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações” (BRASIL, 2018, p. 265). Consideramos que o documento adota essas duas concepções por, mais adiante enunciar, por exemplo, “[...] os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos” (BRASIL, 2018, p. 535).

A BNCC (BRASIL, 2018) usa a expressão “resolver e elaborar problemas” ao invés de “resolver problemas”, para aprofundar e ampliar esta última, de modo que “os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada. [...] pretende-se que os alunos também formulem problemas em outros contextos” (BRASIL, 2018, p. 277). A resolução e formulação de problemas deve envolver diferentes contextos (próprios da matemática, de outras áreas do conhecimento, do dia a dia, da comunidade e do mundo de trabalho). Este documento não fornece subsídios aos professores para utilizar essa abordagem em sala de aula; somente na seção destinada ao Ensino Médio que são fornecidas estratégias que os estudantes deverão ter ao se engajar em resolver problemas:

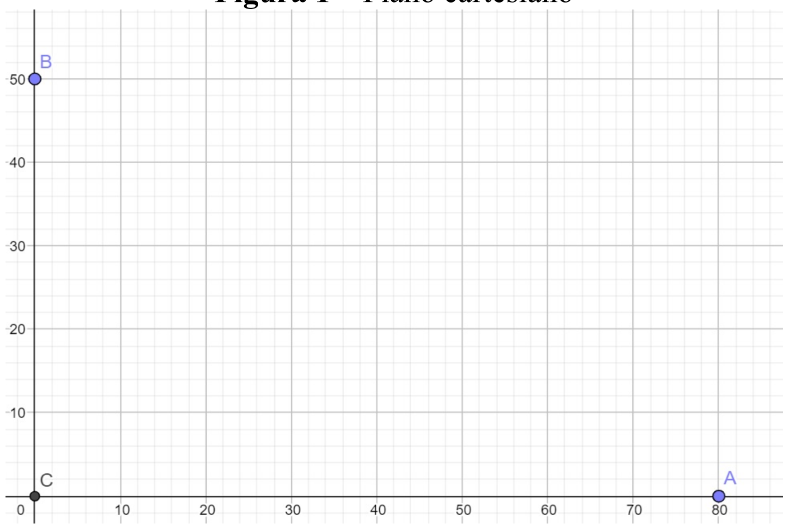
> [...] identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. [...] aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada. (BRASIL, 2018, p. 535).

As teorizações apresentadas sobre resolução de problemas (ou Resolução de Problemas), assim como as enunciações de Lins (2005) de que aprender envolve uma complexa combinação de motivação, reflexão e imersão em práticas culturais e, também, de que "o aspecto central de toda aprendizagem - em verdade o aspecto central de toda a cognição humana - é a produção de significados" (LINS, 1999, p. 86) – entendida como tudo o que uma pessoa pode e efetivamente diz de algo em uma situação (LINS, 1999) – nos inspiraram no desenvolvimento da disciplina e em nossa análise das interações ocorridas no processo de resolução do problema do cachorro e do coelho, a partir de pressupostos do MCS (LINS, 1999). Cabe dizer que na disciplina não tínhamos a intenção de aplicar ou construir conceitos, mas de exercitar e refletir sobre uma metodologia.

SOBRE O PROBLEMA DO CACHORRO E DO COELHO

O problema do cachorro do coelho foi enunciado do seguinte modo: Em um campo aberto e plano imaginamos um plano cartesiano com coordenadas xy, como o da Figura 1, com escala em metros.

Figura 1 – Plano cartesiano



Fonte: própria.

Um cachorro está parado, sobre o eixo x, representado pelo ponto A. Um coelho está parado, sobre o eixo y, representado pelo ponto C. No ponto B, também sobre o eixo y, encontra-se a entrada de uma toca, que esse coelho costuma usar. Em um dado momento, o

doi 10.34019/2594-4673.

cachorro vê o coelho; e o coelho vê o cachorro. De forma instantânea, digamos, o coelho corre direto para a toca e o cachorro corre em direção ao coelho para apanhá-lo. Supondo que o cachorro sempre corra para a direção que o coelho está, naquele momento, e que a velocidade do cachorro seja o dobro da velocidade do coelho:

a) O cachorro consegue alcançar o coelho, antes de ele entrar na toca?

b) Qual é o trajeto, a curva, que o cachorro percorre enquanto persegue o coelho?

c) Tendo em mente o item b) e ignorando por um momento a existência da toca, se necessário, a que distância do ponto C o coelho seria apanhado pelo cachorro?

Esse problema não constava da versão inicial da disciplina, ele foi adaptado de Stewart (2013), e proposto com o intuito de dar uma inspiração para o uso do Método de Euler, que pode ser utilizado para determinar uma aproximação numérica para a solução de uma equação diferencial ordinária (FERREIRA, 2021). O uso deste Método é algo decisivo em uma cena do filme Estrelas Além do Tempo (título original: Hidden Figures), lançado em 2017 no Brasil e dirigido por Theodore Melfi. O filme foi proposto no início da disciplina para discutir, de modo mais amplo possível, sobre diferentes tipos de problemas que foram enfrentados pelas personagens principais. E, como no filme falava sobre trajetórias, modelos matemáticos, envolvendo conceitos de Física, e resolução de equações, surgiram algumas discussões posteriores; dentre elas ganhou destaque o uso do Método de Euler.

Consideramos que o problema tem duas características, ser familiar e não usual, o que nos permite ler produções de significado de uma pessoa que se coloca na posição de falar a partir do enunciado, tal como discute Silva (2003, p. 53-54):

> Familiar, no sentido de permitir que as pessoas falem a partir daquele texto e, não-usual, no sentido de que a pessoa tenha que desprender um certo esforço cognitivo na direção de resolvê-lo. O fato de a tarefa ser não-usual tem como objetivo nos permitir – enquanto professores ou pesquisadores - observar até onde a pessoa pode ir falando. [...]. É importante ressaltar que a crença de que uma tarefa seja familiar e não-usual está presente apenas nas expectativas do pesquisador através do seu entendimento dos sujeitos envolvidos e do contexto onde o problema será aplicado, pois, não há nada que garanta tal crença (SILVA, 2003, p. 53-54).

Estas características são fundamentais, no nosso ponto de vista, principalmente em turmas com discentes em diferentes períodos/etapas do curso, como foi nosso caso, mas também proporcionou uma riqueza em modos de se olhar para o problema.

SOBRE O MODELO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS

As características familiar e não-usual de um problema já está pautada no MCS. E, já enunciamos alguns de seus pressupostos: aprendizagem e produção de significados.

A disciplina aconteceu no formato remoto, por causa da pandemia COVID-19[3], com a possibilidade de os discentes a realizarem no formato síncrono, assíncrono ou misto (síncrono e assíncrono). Para o formato síncrono, consideramos que nossa tentativa foi de realizar o que Lins (2012) caracterizou por uma leitura positiva, útil em situações de interação.

> [...] a leitura positiva dirige-se a saber onde o outro (cognitivo) está, para que eu possa dizer "acho que sei como você está pensando, e eu estou pensando de uma forma diferente", para talvez conseguir interessá-lo em saber como eu estou pensando. [...] . A leitura positiva tem por objetivo, por assim dizer, mapear o terreno ao mesmo tempo que trata de saber onde o outro está (LINS, 2012, p. 23-24).

Ao tentar realizar uma leitura positiva, não temos o objetivo de identificar o que falta a uma pessoa, como, por exemplo, falta de conhecimento e de reflexão, mas "Trata-se de saber de que forma uma coerência se compõe na fala de uma pessoa, num livro, e assim por diante" (LINS, 2012, p. 23). Podemos descrever o processo do seguinte modo: nós nos colocaremos na posição de leitores (no MCS, *o* leitor), constituindo direções de interlocução para o que acreditamos que tenha sido dito pelos discentes (nos termos do MCS, *um* autor), aqui entendidos como seres cognitivos. Como estamos em um processo de interação, os discentes também se colocaram na posição de leitores (*o* leitor) constituindo direções de interlocução do que acredita que os docentes (seres cognitivos, *um* autor) estão dizendo.

Esta leitura não é importante somente para o aspecto da pesquisa, mas, no nosso caso, principalmente para as situações de sala de aula, para tentar compartilhar com os discentes um espaço comunicativo, "que é um processo de interação no qual (dizer isto, para o MCS, é redundante) interlocutores são compartilhados" (LINS, 2012, p. 24), sendo interlocutor "uma direção na qual, acredito, o que estou dizendo poderia ser dito com a mesma justificação que tenho para dizer" (LINS, 2012, p. 16).

[3] Pandemia causada pelo vírus coronavírus da síndrome respiratória grave 2 (SARS-Cov-2), iniciada em 2019, e que, em março de 2020, acarretou na substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais enquanto durar a situação de pandemia, devido a necessidade de isolamento social para conter a disseminação do vírus.

Para o formato assíncrono, consideramos que nossa tentativa foi de realizar o que Lins (2012) caracterizou como leitura plausível, que também não tem a intenção de ser uma leitura pela falta. Ela "indica um processo no qual o todo do que eu acredito que foi dito faz sentido" (LINS, 2012, p. 22), na qual nos colocamos na posição de *o* leitor, produzindo enunciações a partir do que acreditamos que tenha sido dito pelos alunos (*um* autor).

NOSSAS LEITURAS DAS INTERAÇÕES EM SALA DE AULA

O problema foi enunciado para todos os 13 (*treze*) discentes matriculados na disciplina, no formato de postagem no *Moodle*, ambiente virtual de aprendizagem utilizado por nós. Quem optou por cursar a disciplina prioritariamente no formato assíncrono (4 discentes) tinha um tempo para trabalhar individualmente no problema, podendo recorrer aos professores por e-mail, pelo diário do *Moodle* ou pelos vídeos dos encontros síncronos, inseridos no *Moodle*. Na maioria das vezes, obtivemos somente a versão final do trabalho desses 4 (*quatro*) discentes com uma resposta para o problema, em um arquivo no formato de portfólio.

No formato síncrono, aconteceram 3 (*três*) encontros, de duas horas de duração, pelo *Google Meet* para discutir sobre o problema, que foi proposto com antecedência no *Moodle*. Para o primeiro encontro, solicitamos que os discentes viessem para ele tendo realizado a leitura individual do enunciado do problema. Foi feita a leitura do problema em conjunto para ver se alguém ficou com dúvida no enunciado. Um discente disse que parecia que a trajetória do cachorro seria uma reta, relemos o enunciado e ele se propôs a pensar nas condições do problema. Os demais discentes disseram que não tinham dúvidas e permanecemos no *Google Meet* para conversar sobre qualquer dúvida que surgisse. Foi sugerido que os presentes criassem outros grupos no *Google Meet* para discussões paralelas.

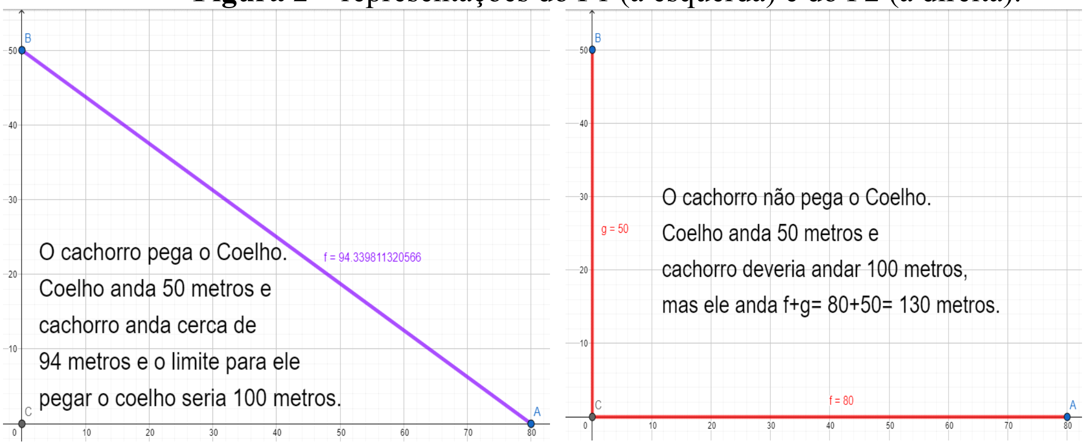
No segundo encontro, solicitamos que os discentes falassem sobre suas tentativas ou a resolução do problema. Entendemos que foram trazidos quatro posicionamentos (P1, P2, P3 e P4):

- P1: o cachorro pega o coelho e a trajetória é uma reta de A até B, conforme justificação na Figura 2 (à esquerda);
- P2: o cachorro não pega o coelho e a trajetória é pelos eixos (de A até C e de C até B), conforme justificação na Figura 2 (à direita);

doi 10.34019/2594-4673.

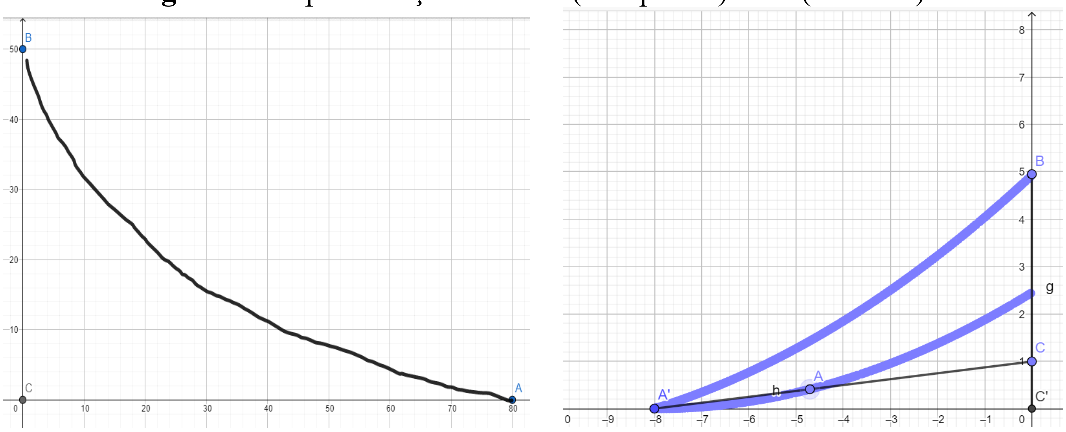
- P3: a primeira tentativa de resolução foi na direção do P1, mas depois de reler o problema entendeu que não seria uma reta e não sabia expressar a função, porque não conseguia lembrar de uma e só fez um desenho, similar ao da Figura 3 (à esquerda), por isso não resolveu o problema;
- P4: o cachorro pega o coelho por causa da simulação/animação que fez no *GeoGebra*, a partir do seguinte princípio: considerou o coelho na coordenada (0,y), em que y=y(t) representa o deslocamento dele passado um tempo t; considerou, ainda, um ponto Q sobre a reta que liga a posição inicial do cachorro, que é A=(80,0), até o ponto (0,y) de tal forma que a distância de Q até A é duas vezes y; esse ponto Q representava no entendimento do discente da posição do cachorro no tempo t. Das simulações que obteve, exibimos uma similar na Figura 3 (à direita).

Figura 2 – representações do P1 (a esquerda) e do P2 (a direita).



Fonte: própria.

Figura 3 – representações dos P3 (a esquerda) e P4 (a direita).



Fonte: própria.

10.34019/2594-4673.

Solicitamos que os discentes fizessem a explicitação dos posicionamentos para tentar entender como eles estavam pensando e o que eles entenderam do enunciado do problema. De acordo com o MCS, toda produção de significados implica em produção de conhecimentos, sendo conhecimento considerado como crença-afirmação junto com justificação. Como foram enunciados 4 (*quatro*) posicionamentos com diferentes justificações, consideramos que diferentes conhecimentos foram produzidos.

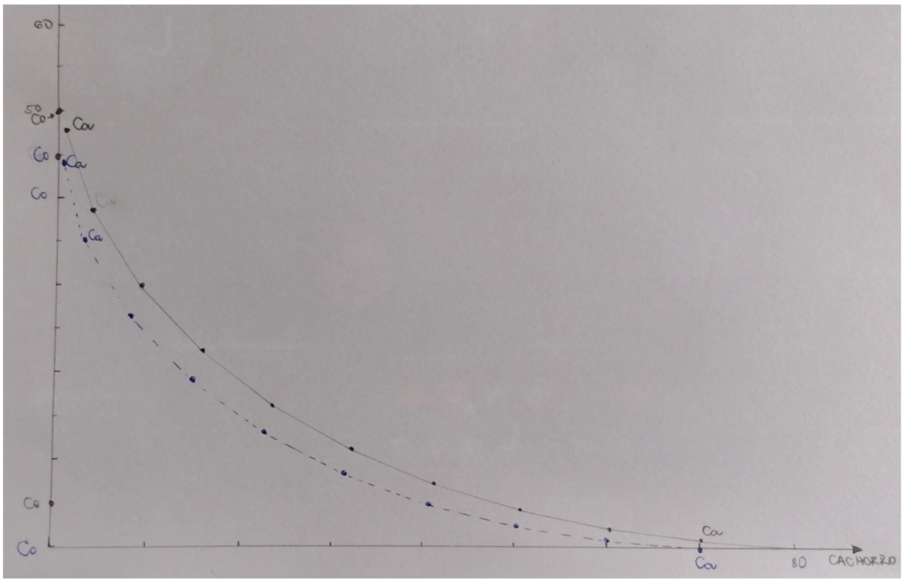
Depois disso, pedimos para que as pessoas com um certo posicionamento explicassem como pensaram para as pessoas com posicionamentos diferentes. A partir disso, voltamos ao enunciado do problema e fomos discutindo posicionamento por posicionamento. Aqui queremos enfatizar a importância do enunciado, que mesmo sendo único, possibilitou diferentes modos de produção de significado. Sobre o P1, concluímos que o cachorro não vai direto para a toca, ou seja, não segue a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 80 metros e 50 metros e nem corre pelos eixos (justificação para o P2), porque se fizesse isso não correria na direção que o coelho está em cada momento.

A partir do P1 e do P2, um dos docentes interveio questionando: Será que entre esses dois caminhos podemos encontrar o trajeto do cachorro? Ele sugeriu a ideia de que o trajeto do cachorro pudesse ficar no interior do triângulo ABC e que a distância percorrida por ele era menor que a soma dos catetos e era maior que a hipotenusa.

Outro docente solicitou que a pessoa do P3 exibisse seu desenho. O consenso entre os presentes no encontro, até aquele momento, foi na direção do P3, que sugeriu uma trajetória, mas que não conseguia uma expressão ou função para ela. Houve, ainda, o consenso de que o modo de ler o enunciado fez cada pessoa seguir um plano de resolução diferente. A partir disso, fizemos novas sugestões aos discentes, a de tentarmos simular a figura da pessoa do P3, imaginando os passos de um coelho e de um cachorro bem grandes, sendo que, por exemplo, o coelho daria um pulo de 10 metros primeiro e o cachorro um pulo de 20 metros depois dele (outra possibilidade seria o cachorro dar um pulo de 20 metros primeiro e o coelho um pulo de 10 metros depois dele). Com isso, novo tempo foi dado para os discentes pensarem a respeito e utilizarem recursos que preferirem para essa simulação (desenho no papel, *GeoGebra*).

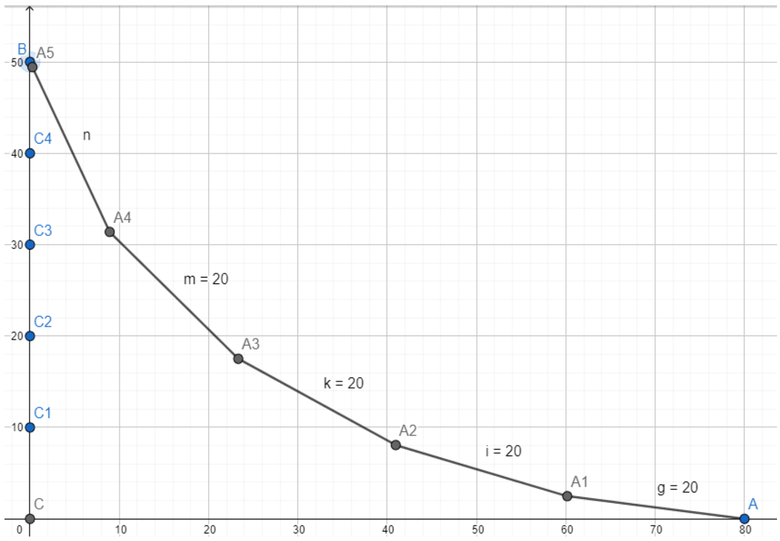
Depois de uma hora de aula, a pessoa do P4 entra na sala virtual de aula e explica seu posicionamento. Nós conseguimos ver que ela havia pensado na direção da resolução do problema, porém, em sua animação, a velocidade e a direção do movimento do cachorro não pareciam coerentes com o enunciado. Pedimos para o discente enviar o arquivo de sua construção para entendermos melhor sua simulação e discutirmos em outro momento, porque as discussões da aula estavam caminhando em outra direção, que era a exibição das construções após a sugestão que demos. Alguns discentes fizeram utilizando papel, exibindo uma figura similar a nossa (Figura 4) e outras o *GeoGebra* (Figura 5).

Figura 4 – Trajetória do cachorro por meio de um desenho.



Fonte: própria.

Figura 5 – Trajetória do cachorro representada por uma poligonal.



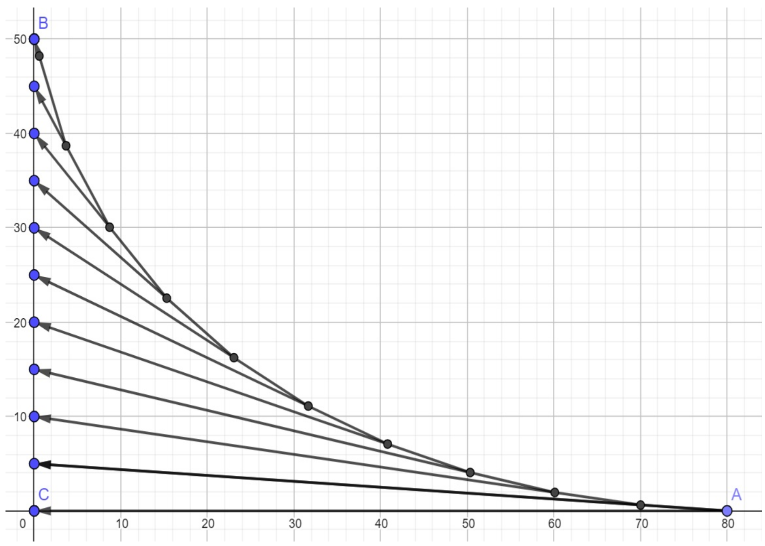
Fonte: própria.

A pessoa que fez a figura similar a Figura 5 disse que ainda tinha dúvida se o cachorro pegava o coelho, porque não usou as ferramentas adequadas do *GeoGebra*, apresentando segmentos de diferentes tamanhos, apesar de acreditar que sim. Neste momento, sugerimos o uso da ferramenta compasso para melhorar a precisão de sua construção e ver se seu posicionamento modificaria. A pessoa que fez um desenho no papel (similar a Figura 4) disse que agora o cachorro não pegaria o coelho.

Na construção com o *GeoGebra* podemos notar que o cachorro andaria um pouco mais de 100 metros para chegar até a toca do coelho, o que significa que ele não pegaria o coelho neste caso. Os demais concordaram com as imagens apresentadas, mas quando perguntado para todos se havia consenso de que o cachorro pegaria ou não o coelho, houve silêncio.

O silêncio é, para nós, uma produção de significados e nos pareceu indicar que era necessário mais tempo de trabalho com o problema. Uma nova sugestão foi dada: o que aconteceria se o tamanho dos passos do coelho fosse menor (Figura 6)? Dentre as discussões e simulações rápidas houve certo consenso de que o comprimento da trajetória do cachorro aumentaria. Algumas pessoas mudaram seu posicionamento e passaram a concordar que o cachorro não pegaria o coelho. Mas alguns ainda ficaram com dúvida. Finalizamos a aula e solicitamos que os discentes trabalhassem mais no problema.

Figura 6 – Trajeto do coelho e do cachorro com passos menores.



Fonte: própria.

10.34019/2594-4673.

Durante a semana para o trabalho com o problema, as discussões foram acontecendo no *Moodle* e a versão original do problema, presente em Stewart (2013), foi inserida. Nessa versão, considerava-se o trajeto do cachorro da forma (x,y(x)), em que y(x) era a solução de uma equação diferencial ordinária dada. Era solicitada a verificação das condições do problema e a determinação da expressão analítica de y(x). Cabe notar que esse é um ponto de vista bem diferente do problema, porque, na adaptação, a possibilidade de direcionar o problema para equações diferenciais poderia surgir (ou não). Mesmo após a inserção de outro enunciado, as modificações dos discentes no Diário do *Moodle*, relacionadas ao problema, não foram nessa direção.

Notamos que a ferramenta compasso foi usada e que o discente de P4 alterou seu modo de pensar, executando nova construção, na direção das construções exibidas em aula.

No início da aula seguinte fizemos breve resumo das discussões ocorridas e perguntamos sobre os avanços obtidos na resolução ou compreensão do problema. Um discente que não estava na aula anterior inicia sua argumentação, no que parecia um novo posicionamento (P5). Para ele, o foco inicial foi fazer um desenho para entender o problema, pensou que fosse uma curva e fez um esboço dela. Depois pensou em determinar uma função que descrevesse tal curva, de forma aproximada, partindo dos passos de 10 em 10 do coelho, porque de posse da expressão analítica da curva resolveria tudo o que estava sendo pedido no problema.

A partir no primeiro passo do coelho e do cachorro, obteve um triângulo retângulo e a expressão obtida foi $f(x) = -(x-80)\frac{\sqrt{3}}{3}$, que é uma reta. Das conversas com esse participante e os discentes presentes, entendemos que essa expressão para a reta vem da equação que modela o primeiro deslocamento do cachorro, com passo de 20 metros. Devido a imprecisão do desenho, nós (docentes) entendemos que ele acabou achando que essa era a curva de todo o trajeto do cachorro.

Com isso, o encaminhamento da aula foi na direção da aula anterior e adotamos a estratégia de questionar sobre o enunciado, mas focados nas perguntas sugeridas por Polya (1995) para a compreensão do problema (Qual a incógnita? Quais os dados? Que informação o problema traz? Quais as restrições são colocadas no problema?). Por estarmos trabalhando no problema há algum tempo, incluímos também a questão do retrospecto (Traçou um plano para a resolução? Conseguir desenvolver seu plano e chegar em uma resposta? Essa resposta faz sentido, dado o problema proposto?).

Nesse momento, a pessoa de P5 disse que a incógnita era encontrar uma função, porque resolve todo o problema. Outra pessoa disse que era a distância e as demais pareceram concordar. É reforçado por um participante que de início a incógnita era a distância, mas que para determinar essa distância era preciso uma função; então a incógnita podia ser uma função. A partir daí iniciamos uma discussão sobre a necessidade de termos ou não uma expressão analítica para a referida função, ou curva. Discutimos também sobre as produções de significados a partir das condicionantes ou restrições do problema, passando por questões sobre o início do trajeto, a toca do coelho, o deslocamento do coelho, a velocidade dos dois animais e a direção de deslocamento. Houve fala na direção de o deslocamento do cachorro ser função e isso ser também condicionante.

A partir desse ponto voltamos a conversar com a pessoa de P5 e concluímos que a imprecisão no desenho influenciou na direção que ele seguiu. Nesse momento lembramos algumas discussões do filme sobre o uso do método de Euler, buscando relacionar isso com o processo de imaginar que os passos do coelho são de 5 metros e os do cachorro, de 10 metros, como na linha contínua na Figura 4, na qual o coelho se movimenta primeiro e depois o cachorro, ou com o cachorro se movimentando primeiro e depois o coelho, como na linha tracejada na Figura 4.

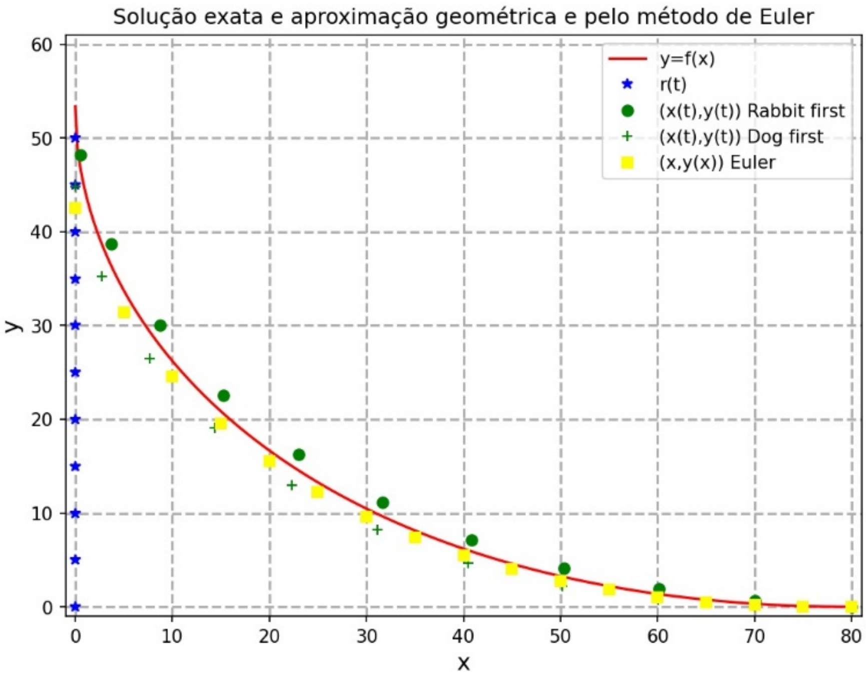
Imaginando passos ainda menores, concordamos que o comprimento do trajeto do cachorro aumenta. Em particular, a pessoa de P5 reconhece que a expressão analítica fornecida por ela não descreve o movimento do cachorro, que fica entre as duas curvas da Figura 4, e que essa curva pode ser aproximada com o argumento apresentado e usando um argumento semelhante ao do teorema do sanduíche ou do confronto[4].

Dedicamos certo tempo refletindo sobre perguntas como: O que aconteceria com o cachorro se o coelho parasse para descansar? Nosso desenvolvimento do plano de resolução leva em consideração o tempo gasto pelo coelho até chegar à toca? Esse tempo faz diferença entre o cachorro pegar ou não o coelho?

[4] O teorema do sanduiche ou do confronto é trabalhado em Cálculo Diferencial e Integral, como presente em Stewart (2013).

A resolução dos outros itens do problema se deu a partir das simulações feitas no *GeoGebra* ou com desenhos no papel, por parte dos discentes, ou simulações e animações feitas com programação em linguagem *Python* por parte dos docentes, utilizando o argumento geométrico que descrevemos aqui, ou a equação diferencial que surge do problema e o método de Euler, veja a Figura 7.

Figura 7 – Aproximações para y=f(x), pelos métodos mencionados, 10 passos do coelho no modo geométrico, e 16 iterações pelo método de Euler.



Fonte: própria.

Foi a partir do momento que detalhamos as discussões sobre a compreensão do problema a partir de perguntas sugeridas por Polya (1995) que vimos que resolver o problema foi entendido de diferentes modos por cada pessoa. No final das discussões, perguntamos se todos estavam satisfeitos com o caminho que seguimos e se concordavam que havíamos resolvido o problema proposto de forma satisfatória para eles. Algumas pessoas mencionaram as dificuldades que tiveram e que as figuras produzidas ajudaram na compreensão do problema. Para os discentes, outras atividades do curso de graduação e coisas da vida de cada um também influenciaram no tempo disponível para (ou na forma de) pensarem sobre o problema e possíveis resoluções.

Perguntamos, ainda, se fariam algo diferente do caminho que fizeram e se havia algo que ainda gostariam de pensar. A pessoa de P5 comenta que errou quando tentou seguir seu plano para resolver o problema e que concordava com a forma de resolução discutida em aula. Entretanto, ela gostaria de seguir corretamente seu plano e depois pensar sobre como encontrar uma expressão analítica para a trajetória do cachorro. Encerramos a discussão sobre esse problema mencionando que a solução analítica dele poderia ser obtida resolvendo a equação diferencial associada ao problema, que seria divulgado material contendo esse processo[5], mas que não traríamos isso para as aulas seguintes porque a maioria dos discentes não tinha estudado o conceito de derivada e não houve tentativa de resolução do problema nessa direção.

Quanto às pessoas que optaram exclusivamente pelo formato assíncrono, após a finalização das discussões nos encontros síncronos, obtivemos como respostas que o cachorro não pega o coelho, a curva é representada pelos segmentos de reta, poligonal, que o cachorro percorre (Figura 5) e o cachorro pegaria o coelho entre 50 e 60 metros, se ele não entrasse na toca. Os discentes relataram que assistir as gravações dos encontros síncronos foram fundamentais para modificar o modo como estavam pensando, que era a mesma direção do P1. Houve mudanças na forma de pensar, mas não foi possível discutir com eles sobre os motivos que os levaram a pensar que a trajetória do cachorro seria uma reta de A até B e nem o que é resolver o problema para essas pessoas. Em outros termos, não conseguimos fazer uma leitura mais fina de seus modos de produção de significado a partir do problema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS/REFLEXÕES FINAIS

Neste texto tivemos o objetivo de abordar as interações ocorridas no processo de resolução do problema do Cachorro e do Coelho, focando nas produções de significados a partir do enunciado, que estão relacionadas às compreensões do problema. Para nós, o problema, considerado familiar e não-usual, possibilitou diferentes modos de resolução, por meio de abordagem geométrica, analítica e usando métodos numéricos e linguagem de programação. As discussões foram na direção das enunciações dos alunos, porque para nós é central que os futuros professores de matemática se coloquem em situações de produzir enunciações que,

[5] O arquivo contendo a simulação em *Python* e a determinação analítica da curva do trajeto do cachorro está disponível em: https://github.com/j-claudinei-f/j-claudinei-f/blob/main/Cachorro_coelho_artigo.ipynb, acesso em: 08 nov. 2022.

10.34019/2594-4673.

neste caso, se deu a partir de um problema. Houve discentes que foram alterando o modo de pensar a partir do problema e passaram a operar na direção das interações que ocorreram em sala.

Neste processo de resolução, a abordagem geométrica, por meio de desenho ou uso do *software GeoGebra*, assumiu centralidade, ainda que uma ideia de buscar a solução analítica tenha surgido em alguns momentos, o que nos possibilitou ver que havia, também diferentes visões do que significa resolver o problema.

Acreditamos que este problema pode ser usado tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, dependendo das intenções didáticas dos professores, por ter a característica de ser familiar e não usual e possibilitar diferentes modos de produção de significados.

Queremos finalizar este artigo ressaltando a diferença entre o modo de participação dos discentes, (dos que participaram dos encontros síncronos e dos que participaram prioritariamente no formato assíncrono). No formato síncrono, consideramos que a qualidade das interações foi melhor, porque todos estavam direcionados à resolução do problema, tentando entender o que o outro estava fazendo. No formato assíncrono, mesmo tentando interagir, não havia a necessidade de os discentes ficarem postando o que pensaram no decorrer das aulas e, por isso, consideramos que perdemos a riqueza de discussões que ocorriam nos encontros síncronos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (5ª a 8ª série). Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 23 jul. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 07 abr. 2022.

FERREIRA, J. C. Quando os Métodos de Euler e de Newton coincidem. **Revista Matemática Universitária**, v.1, 2021. Disponível em: https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2021/03/3-Quandos-os-m%C3%A9todos-de-Eules-e-Newton-coinciden.pdf. Acesso em: 07 abr. 2021.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos. 3 ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

JULIO, R. S.; FERREIRA, J. C. Uma possibilidade de discussões filosóficas e matemáticas na formação de professores de matemática. **Instrumento**: R. Est. Pesq. Educ., Juiz de Fora, v. 20, n. 2, jul./dez. 2018. Disponível em: https://periodicos.ufjf.br/index.php/revistainstrumento/article/view/19151. Acesso em: 04 nov. 2022.

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Perspectivas em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da Unesp, 1999, p. 75-94.

LINS, R. C. A formação pedagógica em disciplinas de conteúdo matemático nas licenciaturas em matemática. **Revista de Educação PUC-Campinas**, n. 18, 2005. Disponível em: https://periodicos.puc-campinas.edu.br/reveducacao/article/view/267. Acesso em: 23 jul. 2022.

LINS, R. C. O modelo dos campos semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. et al. (Org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. p. 11-30.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.199-220.

ONUCHIC, L. R. **A resolução de problemas e o trabalho de ensino–aprendizagem na construção dos números e das operações definidas sobre eles.** Anais do VIII ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática). Meio eletrônico. Recife, 2004.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. A. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739. Acesso em: 23 ago. 2021.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2 reimpr. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. *In*: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p.31 - 42.

SILVA, A. M. da**. Sobre a Dinâmica da Produção de significados para a Matemática**. Rio Claro: 2003, 243p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – IGCE/UNESP-Rio Claro.

Rio Claro, 2003. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/102156. Acesso em: 20 abr. 2022.

STEWART, J. **Cálculo**: volume 2. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

HISTÓRICO

Submetido: 28 de julho de 2022.
Aprovado: 09 de novembro de 2022.
Publicado: 09 de dezembro de 2022.