RIDEMA
Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática

Desempenho de Futuros Professores dos Primeiros Anos Escolares numa Tarefa Envolvendo Relações não Proporcionais

Performance of Early School Years' Prospective Teachers on a Task Involving non-Proportional Relationships

José António Fernandes[1]
Universidade do Minho

RESUMO

Neste artigo estuda-se o desempenho de futuros professores dos primeiros anos escolares numa tarefa envolvendo relações não proporcionais. Pretende-se ainda comparar o desempenho verificado neste estudo com o desempenho dos mesmos estudantes em estudos anteriores envolvendo tarefas de proporcionalidade. Participaram no estudo 72 estudantes do 1.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica de uma universidade do norte de Portugal. Os dados foram obtidos através da aplicação de um questionário envolvendo razões, proporções, proporcionalidade e não proporcionalidade. Aqui, neste estudo, explora-se uma tarefa envolvendo relações não proporcionais. Dos resultados obtidos, salienta-se um desempenho variável dos estudantes nos itens da tarefa, revelando-se mais difíceis aqueles que envolvem mais do que uma operação aritmética, e a prevalência de estratégias baseadas em operações aritméticas. Comparativamente com as tarefas envolvendo relações de proporcionalidade, na presente tarefa, envolvendo relações não proporcionais, os estudantes tiveram um pior desempenho e poucos deles adotaram a estratégia regra de três simples e aderiram à "ilusão de linearidade".
Palavras-chave: Desempenho; Relações não proporcionais; Futuros professores; Primeiros anos escolares.

ABSTRACT

In this article is studied the performance of prospective teachers of the early school years in a task involving non-proportional relationships. It is also intended to compare the performance attained in this study with the performance of the same students in previous studies involving proportionality tasks. The study included 72 students from the 1st year of the Degree in Basic Education at a university in the north of Portugal. Data were obtained through the application of a questionnaire involving ratios, proportions, proportionality, and non-proportionality. Here, in this study, a task involving non-proportional relationships is explored. From the results obtained, it is highlighted a variable performance of the students in the items of the task, proving more difficult those that involve more than one arithmetic operation, and the prevalence of strategies based on arithmetic operations. Compared with the tasks involving proportionality relations, in the present task, involving non-proportional relations, students had a worse performance and few of them adopted the simple three rule strategy and adhered to the "illusion of linearity".
Keywords: Performance; Non-proportional relationships; Prospective teachers; Early school years.

INTRODUÇÃO

Em consequência da grande ênfase dada ao tema da proporcionalidade no currículo de matemática do ensino básico (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA, 2013), desde os

[1] Doutorado em Educação, área de conhecimento de Metodologia do Ensino da Matemática, pela Universidade do Minho (UMinho). Professor associado (aposentado) da Universidade do Minho, Braga, Portugal. Endereço para correspondência: Rua 8 de setembro, Lote 6, Ferreiros, 4705-272 Braga, Portugal. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-2015-160X. E-mail: jfernandes@ie.uminho.pt.

primeiros anos de escolaridade que as crianças experimentam a aplicação de relações proporcionais a variadas situações. Os alunos aprendem, por exemplo, que existe uma relação proporcional entre o diâmetro e o perímetro de um círculo; entre o número de pães e o seu custo em euros, supondo o custo de cada pão fixo; entre o peso de uma determinada quantidade de líquido e o seu volume e entre o tempo e a distância percorrida por um móvel a uma velocidade constante. Assim, as muitas situações de aplicação das relações lineares ou proporcionais contribuem para que os alunos as considerem importantes na medida em que permitem resolver e compreender inúmeras situações escolares e do quotidiano.

Ora, o desenvolvimento e consolidação das relações proporcionais, desde os primeiros anos de escolaridade, pode ter por consequência a priorização da evocação dessas relações em detrimento de outros tipos de relações, como sejam as relações não proporcionais (MARTINS; FERNANDES, 2011). Ou seja, as relações proporcionais ficam de tal modo enraizadas na mente dos alunos que elas se sobrepõem a qualquer outro tipo de relação. Naturalmente que esta possibilidade se constitui como uma dificuldade perante a necessidade de aprender novos conteúdos. Procurando-se minimizar estes problemas, o aluno deve desenvolver uma aprendizagem significativa, integrando a nova informação na estrutura cognitiva do aluno (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

No presente artigo estuda-se o desempenho de estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, numa tarefa do quotidiano envolvendo relações não proporcionais. Adicionalmente, pretende-se comparar esse desempenho com o desempenho dos mesmos estudantes em tarefas envolvendo relações proporcionais, que constam de estudos anteriores já publicados (FERNANDES, 2021, 2022).

Depois da apresentação e justificação do estudo, na próxima secção desenvolve-se o referencial teórico do estudo, focado principalmente nas relações afins e nas relações proporcionais e não proporcionais; na secção seguinte descreve-se a metodologia seguida no estudo, especificando-se os participantes, a recolha de dados e os métodos de análise de dados; e continua-se com a secção de análises e resultados, em que se analisam e descrevem os resultados obtidos. Por fim, na secção de conclusões destacam-se e discutem-se os principais resultados do estudo e extraem-se algumas implicações para a formação dos futuros professores.

REFERENCIAL TEÓRICO

O enquadramento teórico do estudo desenvolve-se no âmbito das relações proporcionais e não proporcionais, segundo uma perspetiva concetual e uma perspetiva de aprendizagem.

Relações proporcionais e não proporcionais

As relações proporcionais são modeladas por funções lineares que são definidas por uma expressão do tipo $f(x) = ax$, com $a \neq 0$, e que são representadas graficamente por uma linha reta não vertical que passa pela origem do referencial cartesiano (DE BOCK; DOOREN; JANSSENS; VERSCHAFFEL, 2002).

Já as relações não proporcionais são modeladas por vários tipos de funções, como sejam certos tipos de funções afins, funções quadráticas, funções cúbicas, etc. No caso das funções afins, elas são definidas por uma expressão do tipo $f(x) = ax + b$, com $a, b \epsilon R$, e têm por representação gráfica uma linha reta não vertical. Donde, observando a expressão das funções afins, conclui-se que quando $a \neq 0$ e $b = 0$, está-se perante uma função linear ou de proporcionalidade, e noutros casos está-se perante uma função afim de não proporcionalidade, como é o caso da tarefa do estudo aqui relatado. Portanto, as relações lineares ou proporcionais são um caso particular das relações afins.

A estrutura básica dos problemas envolvendo a proporcionalidade direta ou relações lineares inclui quatro quantidades a, b, c e d, que definem a proporção $a/b = c/d$. Podem-se resolver dois tipos fundamentais de problemas envolvendo proporções: os problemas de comparação, em que se pretende comparar as razões a/b e c/d através das relações $<$, $>$ ou $=$; e os problemas de valor omisso, em que, sendo conhecidos três dos quatro valores da proporção, se pretende determinar o valor em falta.

Para Lamon (2007), o raciocínio proporcional baseia-se nas "relações estruturais" entre as quatro quantidades a, b, c e d, envolvendo simultaneamente a covariância entre os termos das razões e a invariância das razões ($a/b = c/d$) ou dos produtos ($a \times d = b \times c$), tal como ocorre com a proporção e a regra de três simples. Ainda segundo esta autora, a abordagem aos problemas de proporcionalidade através da proporção e da regra de três simples permitem, fundamentalmente, resolver problemas de valor omisso, e não apoiam a transição para

10.34019/2594-4673.

abordagens mais gerais e robustas, como sejam a abordagem escalar e a abordagem funcional (ver FERNANDES, 2021).

Conclui-se, assim, a existência de diversas abordagens que podem ser empregues na resolução de situações-problema de proporcionalidade. Diferentemente, no caso das relações afins não lineares, portanto relações não proporcionais, destacam-se as abordagens: analítica, envolvendo processos numéricos e/ou algébricos; funcional, alicerçada na determinação do valor de uma das variáveis a partir do conhecimento do valor da outra; e gráfica, baseada na leitura e interpretação de informação explícita ou implícita.

Nas definições, apresentadas antes, constata-se que as funções afins incluem as funções lineares, ou seja, que uma função linear é também uma função afim; ou de outro modo, as funções lineares constituem um tipo especial de funções afins. Portanto, das definições apresentadas resulta que a diferenciação entre estes dois tipos de funções é um tanto subtil, podendo originar dificuldades de compreensão aos alunos.

Aprendizagem de relações proporcionais e não proporcionais

Tal como foi antes referido, a aprendizagem das relações lineares ou proporcionais desde muito cedo, na escola e mesmo fora da escola, e a ênfase que lhe é dada explicam o uso dessas relações nas mais variadas situações, mesmo naquelas situações em que elas não se podem aplicar.

Os mesmos estudantes do presente estudo responderam a duas tarefas envolvendo o conceito de proporcionalidade. Numa delas (FERNANDES, 2021), em que se pedia o custo de um certo número de fotocópias ou o número de fotocópias que se podiam tirar com uma certa quantia, obtiveram-se percentagens de respostas corretas de 86%, 49% e 36%. O autor explica o melhor desempenho (86%) dos estudantes pelo facto de nesse item estar envolvida apenas uma expressão de proporcionalidade direta, enquanto nos outros dois estavam implicadas duas expressões de proporcionalidade direta e a inversão das operações aritméticas no caso do item mais difícil (36%).

Na outra tarefa (FERNANDES, 2022), conhecida a razão do número de berlindes que duas crianças deviam receber e o número de berlindes de uma delas ou de ambas, pedia-se aos estudantes que determinassem o número de berlindes da outra criança ou de ambas, tendo-se

10.34019/2594-4673.

obtido percentagens de respostas corretas de 93%, 88% e 58%. Na perspetiva do autor, o pior desempenho dos estudantes (58%) deveu-se ao facto de não estar explícito no enunciado o número total de berlindes relativo às duas crianças, que corresponde à soma dos dois termos da razão.

Além da ampla aplicabilidade e do seu caráter universal, as relações proporcionais ou lineares também parecem autoevidentes e intrinsecamente simples, que são características comuns às intuições (FERNANDES, 2000). As proporções parecem estar profundamente enraizadas no conhecimento intuitivo dos alunos e são usadas de forma espontânea e até mesmo inconsciente, o que torna a abordagem linear natural, inquestionável e, em certa medida, inacessível à introspeção ou reflexão (DE BOCK et al., 2002). Reforçando esta visão, Rouche (1989) refere que "é a ideia da proporcionalidade que vem primeiro à mente porque, provavelmente, não há funções mais simples que as lineares" (p. 17).

A clara e excessiva tendência que os alunos têm de aplicar o modelo linear em situações não proporcionais, designadamente em situações envolvendo os conceitos de área de figuras e de volume de sólidos ampliados ou reduzidos, frequentemente, é designada por "ilusão da linearidade". As investigações realizadas sobre a ilusão da linearidade mostram que o fenómeno de linearidade é resistente, persistente e manifesta-se em diferentes faixas etárias e em alunos de diferentes níveis académicos.

São múltiplos os exemplos de aplicação incorreta da linearidade. O equívoco mais conhecido do uso de um modelo linear consiste em considerar que se uma figura geométrica é ampliada/reduzida k vezes, a sua área e o seu volume tornam-se também k vezes maior/menor. Alguns autores (e.g., FREUDENTHAL, 1983; NCTM, 1991; ROUCHE, 1989) referem que os alunos, e mesmo professores, que aderem a este princípio são enganados pela ilusão de linearidade. Por exemplo, "muitos estudantes acreditam que se os lados de uma figura são duplicados para produzir uma figura similar, a área, bem como o seu volume será duplicado" (NCTM, 1991, p. 114-115). Deste modo, os alunos aplicam um fator de escala linear em vez do seu quadrado ou do seu cubo para determinar a área de uma figura ou o volume de um sólido ampliados ou reduzidos, respetivamente. Estas dificuldades, resultantes da aplicação inadequada da proporcionalidade na determinação de áreas e volumes, foram confirmadas num estudo posterior de Dooren, De Bock, Janssens e Verschaffel (2008).

Num estudo mais recente, de Martins e Fernandes (2011), envolvendo alunos portugueses do 6.º e 9.º ano de escolaridade, observou-se uma elevada adesão dos alunos à estratégia de linearidade. Especificamente, quando esta estratégia era adequada para a resolução das questões, como era o caso das relações entre perímetros, verificaram-se elevadas percentagens de respostas corretas, mas nas questões onde eram tratadas relações entre áreas e entre volumes, em que a estratégia não era adequada, verificaram-se percentagens de respostas corretas muito baixas.

No final do século XX e durante a primeira década do século XXI desenvolveu-se muita investigação empírica com a finalidade de compreender o fenómeno de "ilusão da linearidade", tendo-se obtido dados sobre a sua dimensão e persistência em diferentes configurações experimentais (DE BOCK; VERSCHAFFEL; JANSSENS, 1998; MODESTOU; GAGATSIS, 2007; MODESTOU; GAGATSIS; PITTA-PANTAZI, 2004; DOOREN, 2005; DOOREN; DE BOCK; HESSELS; JANSSENS; VERSCHAFFEL, 2004, 2005). Nesses estudos, as investigações realizaram-se a partir de testes de papel e lápis e de algumas entrevistas, trabalharam-se, principalmente, problemas aritméticos, geométricos e probabilísticos, desenvolveram-se materiais didáticos e implementaram-se algumas experiências de ensino com o propósito de superar a dependência excessiva dos modelos lineares. Em geral, os autores concluíram que, apesar do uso desses materiais didáticos, durante as experiências de ensino, alguns alunos continuaram a cair na "armadilha" da proporcionalidade, aplicando-a na resolução de problemas lineares e não-lineares.

Numa vertente intuitiva, Dooren, De Block, Weyers e Verschaffel (2004) sugeriram uma ligação entre o uso excessivo da linearidade e a teoria das regras intuitivas de Stavy e Tirosh (STAVY; TIROSH, 2000; TIROSH; STAVY, 1999), pois, por um lado, muitos alunos inquiridos alegaram que uma figura ampliada tem maior área porque os comprimentos dos lados aumentam (quantidade A), daí a sua área também aumenta (quantidade B), que corresponde à regra intuitiva "mais A – mais B"; e, por outro lado, uma vez que a figura ampliada (ou reduzida) mantém a sua forma inicial, então tudo é ampliado na mesma razão, que corresponde à regra intuitiva "mesmo A – mesmo B" (poderá consultar a aplicação destas regras intuitivas por alunos do 6.º e 9.º ano, no âmbito do tema Geometria e Medida, em MARTINS; FERNANDES, 2009).

METODOLOGIA

Neste estudo investiga-se o desempenho de estudantes, futuros professores dos primeiros anos escolares, na resolução de uma tarefa do quotidiano envolvendo a utilização de relações não proporcionais do tipo afim. Adicionalmente, pretende-se comparar esse desempenho com o desempenho dos mesmos estudantes em tarefas envolvendo relações proporcionais, que constam de estudos anteriores já publicados (FERNANDES, 2021, 2022). Para tal, conduziu-se um estudo quantitativo, de tipo descritivo, em que se analisa uma realidade preexistente (GALL; GALL; BORG, 2003).

Participaram no estudo 72 estudantes do 1.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, de uma universidade do norte de Portugal. Este curso dá acesso aos mestrados que conferem habilitação para educador de infância, professor do 1.º ciclo (professor generalista) e professor do 2.º ciclo (professor de uma área disciplinar, como, por exemplo, Matemática e Ciências). Estes estudantes estavam a iniciar o seu percurso universitário e tinham uma formação matemática variada à entrada na universidade, que tinha sido adquirida em cursos do ensino secundário, designadamente cursos profissionais, humanísticos ou científico-tecnológicos.

Os dados do presente estudo foram obtidos através das respostas dadas pelos estudantes a um questionário de avaliação formal, que foi aplicado no âmbito da unidade curricular de Elementos de Matemática que os estudantes se encontravam a frequentar. O questionário constava de seis tarefas envolvendo razões, proporções, proporcionalidade e não proporcionalidade, das quais estudamos aqui apenas aquela que envolve relações não proporcionais do tipo afim, cujo enunciado é apresentado na Figura 1. Depois de distribuído o questionário pelos estudantes, constatou-se que eles usaram, no máximo, 1 hora e 15 minutos para lhe responderem.

Figura 1 – Tarefa proposta aos estudantes

A Rita pretende preparar um concentrado de café e leite, sabendo-se que ela vai usar mais 80 cl de leite do que de café nesse concentrado.

a) Que quantidade de café é necessária para produzir um concentrado com 110 cl de leite?

b) Que quantidade de café é necessária para produzir 160 cl de concentrado?

c) Que quantidade de leite é necessária para produzir 130 cl de concentrado?

Fonte: elaboração do autor.

Verifica-se, assim, que a tarefa consta de três itens, sendo que em a) questiona-se sobre a quantidade de café necessária para produzir um concentrado com 110 cl de leite, em b) interroga-se sobre a quantidade de café necessária para produzir 160 cl de concentrado e em c) questiona-se sobre a quantidade de leite necessária para produzir 130 cl de concentrado. Note-se que, representando por c a quantidade de café, l a quantidade de leite e t a quantidade de concentrado, o item a) é modelado pela relação $l = c + 80$ e os itens b) e c) são modelados pela relação $c + l = t$, ou seja, $2c + 80 = t$ (por substituição de $l = c + 80$). Portanto, em qualquer dos itens, estamos perante relações não proporcionais do tipo afim.

Por último, no tratamento e análise de dados estudou-se o tipo de respostas e de estratégias usadas para obter essas respostas. Para tal, classificaram-se as respostas apresentadas pelos estudantes em corretas e incorretas, e nas estratégias recorreu-se à análise de conteúdo para definir as respetivas categorias, que serão definidas aquando da análise de dados. Seguidamente determinaram-se frequências dos tipos de respostas (corretas e incorretas) e das estratégias subjacentes às respostas, tendo-se recorrido a tabelas para sintetizar essa informação. Por último, para tornar mais explícitas as inferências decorrentes da análise realizada, são ainda apresentados alguns exemplos de respostas dos estudantes, identificados pela letra E (abreviatura de estudante) seguida do número que lhe foi atribuído (de 1 a 72).

ANÁLISES E RESULTADOS

Na tarefa, aqui estudada, pretende-se preparar um concentrado de café e leite com mais 80 cl de leite do que de café. Qualquer dos três itens que se seguem podem ser respondidos recorrendo a várias estratégias. Contudo, por razões de espaço, resolve-se cada um dos itens apenas por uma dessas estratégias.

No item a) pede-se a quantidade de café necessária para produzir um concentrado de 110 cl de leite. Como no concentrado há mais 80 cl de leite do que café, basta retirar 80 cl à quantidade de leite para obter a quantidade de café, ou seja, $110 - 80 = 30$ cl. Logo são necessários 30 cl de café.

No item b) pede-se a quantidade de café necessária para produzir 160 cl de concentrado. Como no concentrado há mais 80 cl de leite do que café, retirando esses 80 cl de leite à quantidade de concentrado fica-se com a mesma quantidade de leite e de café, donde basta

doi 10.34019/2594-4673.

dividir por 2 para se obter a quantidade de café. Portanto, $(160 - 80)/2 = 40$ cl, que é a quantidade de café necessária.

Por fim, no item c) pede-se a quantidade de leite necessária para produzir 130 cl de concentrado. Tal como no item b), retirando os 80 cl a mais de leite do que café, fica-se com a mesma quantidade de leite e de café, donde basta dividir por 2 para se obter a quantidade de café. Portanto, $(130 - 80)/2 = 25$ cl, que é a quantidade de café. Finalmente, a quantidade de leite necessária obtém-se adicionando 80 cl à quantidade de café, ou seja, $80 + 25 = 105$ cl.

Na Tabela 1 apresentam-se as frequências (em %) segundo os tipos de resposta (correta e incorreta), bem como os não respondentes nos itens da tarefa.

Tabela 1 – Frequências (em %) dos tipos de resposta nos itens da tarefa

Tipos de resposta	**Itens**		
	a)	**b)**	**c)**
Correta	59 (82)	29 (40)	28 (39)
Incorreta	10 (14)	35 (49)	30 (42)
Não respondentes	3 (4)	8 (11)	14 (19)

Fonte: elaboração do autor.

Pela Tabela 1 constata-se uma elevada percentagem de respostas corretas no item a) e uma considerável diminuição dessa percentagem nos itens b) e c). Em termos de processos de resolução, o item a) distingue-se dos itens b) e c). No item a) pretende-se saber a quantidade de café necessária para produzir um concentrado com 110 cl de leite. Tal como vimos antes, para obter a resposta pretendida, que é 30 cl de café, basta calcular a diferença entre 110 e 80. Ora, tratando-se de um processo matemático que envolve apenas uma operação aritmética, provavelmente, a resolução levantou menos dificuldades aos estudantes.

Diferentemente, nos itens b) e c), pede-se para determinar a quantidade de café e de leite, respetivamente, para produzir uma certa quantidade de concentrado. Tal como foi visto antes, em ambos estes itens, os estudantes ao subtraírem a quantidade 80 cl à quantidade de concentrado e ao dividirem por 2 essa diferença obtêm a quantidade de café do concentrado, que é a resposta ao item b). No caso do item c), o estudante terá ainda de adicionar a quantidade 80 cl à quantidade de café para obter a quantidade de leite do concentrado. Portanto,

10.34019/2594-4673.

provavelmente, a maior dificuldade dos estudantes nestes dois itens resultou do facto de o processo de resolução envolver mais do que uma operação aritmética.

Para aprofundar a compreensão dos tipos de resposta, antes referidos, vamos, de seguida, analisar as estratégias usadas pelos estudantes nos processos de resolução dos itens. Assim, na Tabela 2 encontram-se registadas as estratégias e as frequências (em %) com que foram adotadas pelos estudantes em cada um dos itens da tarefa.

Tabela 2 – Frequências (em %) das estratégias usadas na resolução da tarefa

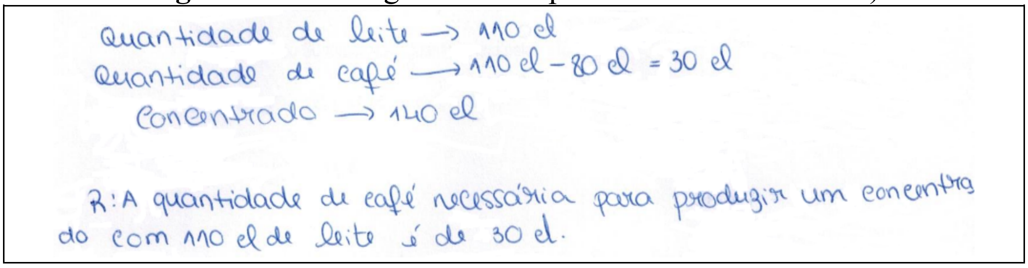
Estratégias	**Itens**			**Total**
	a)	**b)**	**c)**	
Retirar 80 cl	38 (53)	21 (29)	13 (18)	72 (33)
Equação	22 (31)	23 (32)	25 (35)	70 (32)
Regra de três simples	5 (7)	9 (13)	9 (13)	23 (11)
Retirar 80 cl e dividir por 2	4 (6)	7 (10)	7 (10)	18 (8)
Incompreensível	—	4 (6)	4 (6)	8 (4)

Nota: no cálculo das percentagens incluímos os não respondentes.
Fonte: elaboração do autor.

Seguidamente iremos analisar cada uma das estratégias registadas na tabela, apresentando também algumas resoluções dos estudantes a fim de exemplificar essas estratégias.

Retirar 80 cl. Esta estratégia consiste em simplesmente retirar a quantidade de 80 cl à quantidade de leite, no item a), ou de concentrado, nos itens b) e c), tendo sido usada em todos os itens. Esta estratégia foi a mais usada pelos estudantes no conjunto dos três itens da tarefa, sendo bastante mais usada no item a) do que nos itens b) e c), e conduziu sempre à resposta correta no item a) e a repostas incorretas nos itens b) e c). Nas Figura 2 e 3 apresentam-se dois exemplos de utilização desta estratégia relativas aos itens a) e b), respetivamente.

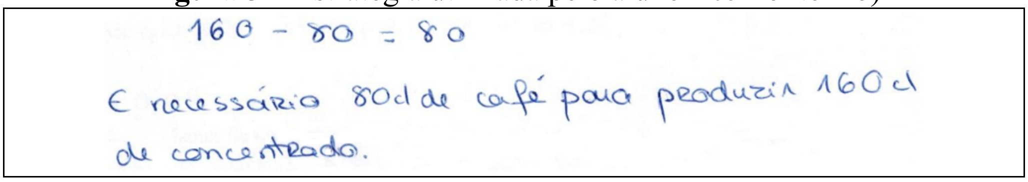
Figura 2 – Estratégia utilizada pelo aluno E26 no item a)



Fonte: elaboração do autor.

No item a), tendo em conta que a quantidade de leite excede em 80 cl a quantidade de café e conhecida a quantidade de leite, o estudante subtraiu 80 cl de 110 cl e obteve, assim, 30 cl para a quantidade de café.

Figura 3 – Estratégia utilizada pelo aluno E65 no item b)



Fonte: elaboração do autor.

No item b), este estudante subtraiu também 80 cl de 160 cl e obteve 80 cl para a quantidade de café, que é uma resposta incorreta. A resposta incorreta do estudante resultou de considerar 160 cl como sendo a quantidade de leite, quando se tratava da quantidade de concentrado. Como 80 cl é o dobro da quantidade de café, o estudante teria de dividir esse valor por dois para obter a resposta correta.

Equação. Nesta estratégia, os estudantes relacionaram os dados fornecidos através de uma equação e, de seguida, resolveram-na para determinar a quantidade pretendida. Tal como a estratégia *retirar 80 cl*, também esta foi usada por muitos estudantes em todos os itens. Nas Figuras 4 e 5 apresentam-se dois exemplos de utilização desta estratégia, envolvendo a resolução dos itens b) e c).

Figura 4 – Estratégia utilizada pelo aluno E3 no item b)

café $= x$
leite $= x + 80$

$x + x + 80 = 160$

É necessário 40 cl de café

$2x = 160 - 80$

$2x = 80$

$x = \frac{80}{2}$

$x = 40$

Fonte: elaboração do autor.

No item b), o estudante representou por x e $x + 80$ as quantidades de café e de leite, respetivamente. De seguida, adicionou essas quantidades e igualou essa soma à quantidade de concentrado, ou seja, 160. Finalmente, resolveu a equação e obteve 40 cl para a quantidade de café, que é a resposta correta.

Figura 5 – Estratégia utilizada pelo aluno E49 no item c)

$x - 80 = 130$

$\Leftrightarrow x = 130 + 80$

$\Leftrightarrow x = 210$ cl

$\therefore$ São necessários 210 cl de leite.

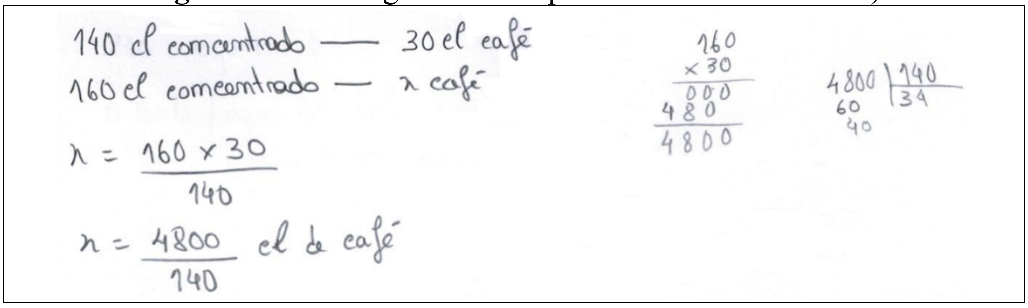
Fonte: elaboração do autor.

No item c), o estudante considera a equação $x - 80 = 130$, em que x representa a quantidade de leite e 130 a quantidade de café, quando se afirma no enunciado que 130 é a quantidade de concentrado. A seguir, o estudante resolve a equação e obtém 210 cl para a quantidade de leite, que é uma resposta incorreta.

Em termos de tipos de resposta, esta estratégia conduziu, quase sempre, a respostas corretas. Especificamente, verificou-se apenas uma resposta incorreta no item a), outra no item b) e quatro respostas erradas no item c). Estas respostas incorretas resultaram de os estudantes considerarem a quantidade de leite como sendo a quantidade de concentrado, no item a), e a quantidade de concentrado como sendo a quantidade de leite ou de café, respetivamente nos itens b) e c).

Regra de três simples. Analogamente às estratégias anteriores, também esta foi usada em todos os itens, embora por muitos menos estudantes. Ora, porque a regra de três simples é uma estratégia que se aplica em situações de proporcionalidade direta, sendo uma forma particular de representar uma proporção, seria de esperar que conduzisse sempre a respostas incorretas, pois qualquer dos itens refere-se a uma situação de não proporcionalidade. Essa expectativa confirmou-se, tendo a estratégia conduzido sempre a respostas incorretas em qualquer dos itens. Na Figura 6 apresenta-se um exemplo de utilização desta estratégia, referente ao item b).

Figura 6 – Estratégia utilizada pelo aluno E66 no item b)


140 cl concentrado — 30 cl café

160 cl concentrado — x café

$x = \frac{160 \times 30}{140}$

$x = \frac{4800}{140}$ cl de café

Fonte: elaboração do autor.

No item b), o estudante recorre ao resultado obtido no item a), a quantidade de concentrado que corresponde à quantidade de café, ou seja, 140 cl concentrado — 30 cl café. Seguidamente, completa a regra de três simples para determinar a quantidade de café que corresponde a 160 cl de concentrado, ou seja, 160 cl concentrado — x café. Obviamente, o estudante obtém uma resposta incorreta porque a regra de três simples aplica-se apenas a situações de proporcionalidade direta, e a tarefa explorada não é uma situação de proporcionalidade direta.

Retirar 80 cl e dividir por 2. Nesta estratégia, os estudantes relacionaram os dados fornecidos através de operações aritméticas. Constata-se que esta estratégia foi usada em todos itens e, em qualquer caso, por poucos alunos, tendo conduzido a uma resposta incorreta no item a) e a respostas corretas nos itens b) e c). Nas Figuras 7 e 8 apresentam-se dois exemplos de utilização desta estratégia, relativos à resolução dos itens a) e c), respetivamente.

Figura 7 – Estratégia utilizada pelo aluno E10 no item a)

$$110\ cl - 80\ cl = 30\ cl$$

$$\frac{30\ cl}{2} = 15\ cl$$

Fonte: elaboração do autor.

No item a), o estudante determina a diferença entre 110 cl e 80 cl, obtendo quantidade de 30 cl, que é a quantidade de café que é pedida. Contudo, o estudante prossegue dividindo por dois, e obtém, assim, uma resposta incorreta.

Figura 8 – Estratégia utilizada pelo aluno E31 no item c)

$$130 - 80\ cl = 50 \qquad \frac{50}{2} = 25$$

$$25 + 80 = 105\ cl$$

$$130 - 105 = 25\ cl$$

R: Para produzir 130 cl de concentrado, colocamos 105 cl de Leite e 25 cl de café.

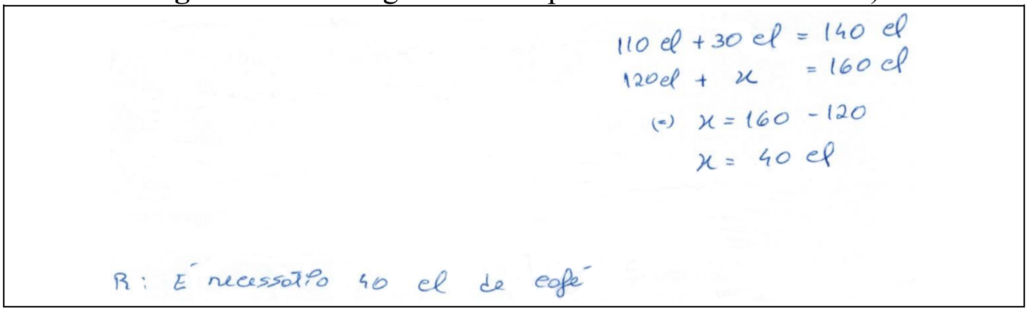
Fonte: elaboração do autor.

No item c), o estudante calcula a diferença entre a quantidade de concentrado e 80 cl, obtendo a quantidade de 50 cl, que é o dobro da quantidade de café. De seguida, divide por dois essa diferença e obtém a quantidade de café. Por fim, constata que a diferença entre 130 e 105 dá a quantidade de café e conclui, corretamente, que 105 cl é a quantidade de leite.

Incompreensível. Por último, neste caso não se compreende a resolução apresentada pelos estudantes, o que se deve, sobretudo, ao uso de valores que não eram fornecidos no enunciado e de que não se indica a sua origem. Vários estudantes apresentaram estratégias incompreensíveis nos itens b) e c), sendo que todas as respostas delas resultantes foram consideradas incorretas. Na Figura 9 apresenta-se um exemplo em que é incompreensível a origem de valores usados na resolução do item b).

doi 10.34019/2594-4673.

Figura 9 – Estratégia utilizada pelo aluno E35 no item b)



Fonte: elaboração do autor.

No item b), o estudante, reportando-se ao item a), começa por determinar a quantidade de concentrado. Na continuação, escreve a equação $120 + x = 160$, resolve-a e obtém o valor 40 cl para a quantidade de café. Contudo, não se compreende a origem do valor 120 cl para a quantidade de leite e, portanto, não é possível classificar a estratégia adotada. A compreensão da estratégia requeria que o estudante declarasse que o aumento de 20 cl no concentrado, que passou a ser 160 cl, se distribuía igualmente pela quantidade de leite e de café, donde a quantidade de leite passaria a ser 120 cl.

CONCLUSÕES

Em termos de tipos de respostas, verificou-se que a percentagem de respostas corretas variou entre o mínimo de 39% e o máximo de 82%, com uma média de 54% de respostas corretas por item. Dos itens da tarefa, salienta-se o melhor desempenho dos estudantes no item a), o qual requeria o uso de apenas uma operação aritmética, enquanto nos outros dois itens se requeria o uso de mais de uma operação aritmética.

Comparando o desempenho dos estudantes nesta tarefa, que envolve relações não proporcionais, com o desempenho dos mesmos estudantes em tarefas proporcionais, constata-se um pior desempenho na tarefa não proporcional. Especificamente, nos itens de proporcionalidade, em Fernandes (2021) obteve-se, em média, 57% de respostas corretas por item, em Fernandes (2022) obteve-se, em média, 80% de respostas corretas por item e na globalidade dos dois estudos obteve-se, em média, 68% de respostas corretas.

Quanto às estratégias empregadas pelos estudantes na resolução dos itens, na globalidade, destacam-se aquelas em que os estudantes recorrem a operações aritméticas. Entre as mais usadas, encontram-se as estratégias *retirar 80 cl* (33%), que envolve uma operação

Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática
Juiz de Fora, v. 6, n. 1, p. 1-19, Jan. – Dez., e-ISSN: 2594-4673, 2022
10.34019/2594-4673.

aritmética, e a estratégia *equação* (32%), que envolve operações aritméticas e algébricas. Já a estratégia *regra de três simples*, que foi muito menos usada pelos estudantes (11%), conduziu sempre a respostas incorretas como se esperava, pois essa estratégia aplica-se a situações de proporcionalidade direta, o que não é o caso. Como seria também expectável, a estratégia *retirar 80 cl* conduziu sempre a respostas incorretas nos itens b) e c), e a estratégia *retirar 80 cl e dividir por 2* conduziu sempre a respostas incorretas no item a).

Comparativamente com os estudos antes referidos (FERNANDES, 2021, 2022), em que participaram os mesmos estudantes, seria de esperar que eles recorressem menos à regra de três simples no presente estudo, pois nele estão envolvidas relações de não proporcionalidade, enquanto nos outros estudos estão envolvidos relações de proporcionalidade. Esta hipótese confirmou-se, tendo-se observado uma utilização desta estratégia, em média, 22% por item em Fernandes (2021) e 33% em Fernandes (2022), e no presente estudo reduziu-se a 11%.

Verifica-se, assim, que o fenómeno de "ilusão da linearidade", que consiste em sobregeneralizar estratégias válidas em situações envolvendo relações lineares a situações envolvendo relações não lineares, como é o caso do presente estudo, não foi adotado por tantos estudantes como aconteceu em outros estudos (e.g., De BOCK et al., 1998; MARTINS; FERNANDES, 2011; MODESTOU et al., 2004). Assim, os resultados dos estudos anteriores, em que se tem estudado este fenómeno, principalmente no âmbito do tema de Geometria e Medida, atenuam-se no presente estudo, em que se trata uma situação do âmbito do tema Números e Operações. Por exemplo, Martins e Fernandes (2011) referem uma elevada adesão de alunos do 6.º e 9.º ano à "ilusão de linearidade" nas relações entre comprimentos e áreas e entre comprimentos e volumes, variando desde o mínimo de 76,9% até ao máximo de 96,2%.

Em síntese, do presente estudo destacam-se três resultados importantes: o pior desempenho dos estudantes na tarefa envolvendo relações não proporcionais (do tipo afins não lineares) do que em tarefas proporcionais; a prevalência de estratégias baseadas em operações aritméticas; e uma muito menor adesão à "ilusão de linearidade" na tarefa sobre Números e Operações do que nas tarefas sobre Geometria e Medida. Ora, estes resultados inovadores e importantes do presente estudo devem ser confirmados e aprofundados em futuros estudos com tarefas envolvendo relações não proporcionais em contextos diversos do tema de Geometria e Medida.

Já em termos de formação, preconiza-se que os futuros professores dos primeiros anos escolares aprofundem a integração das suas aprendizagens, realizando o diagnóstico das suas aprendizagens prévias e estabelecendo relações com as novas aprendizagens (AUSUBEL et al., 1980). A conexão explícita entre relações proporcionais e não proporcionais pode contribuir para que os estudantes as distingam e, portanto, evitar a sua existência isolada, que teria por consequência a mais fácil evocação dos conceitos mais enraizados na mente do aprendiz; neste caso, as relações de proporcionalidade.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D.; NOVAK, J.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

DE BOCK, D.; DOOREN, W. V.; VERSCHAFFEL, L.; JANSSENS, D. Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 50, p. 311-314, 2002.

DE BOCK, D.; VERSCHAFFEL, L.; JANSSENS, D. The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 35, p. 65-85, 1998.

DOOREN, W. V. **The linear imperative: A search for the roots and an evaluation of the impact of the overuse of linearity**. Tese (Doutoramento), Universidade de Leuven, Leuven, 2005.

DOOREN, W. V.; DE BOCK, D.; HESSELS, A.; JANSSENS, D.; VERSCHAFFEL, L. Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. **Learning and Instruction**, Oxford, v. 14, p. 485-501, 2004.

DOOREN, W. V.; DE BOCK, D.; HESSELS, A.; JANSSENS, D.; VERSCHAFFEL, L. Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. **Cognition and Instruction**, Abingdon v. 23, n. 1, p. 57-86, 2005.

DOOREN, W. V.; DE BOCK, D.; JANSSENS, D.; VERSCHAFFEL, L. The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 39, p. 311-342, 2008.

DOOREN, W.; DE BOCK, D.; WEYERS, D.; VERSCHAFFEL, L. The predictive power of intuitive rules: A critical analysis of the impact of 'more a-more b' and 'same a-same b'. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 56, n. 3, p. 179-207, 2004.

FERNANDES, J. A. Aplicação da proporcionalidade direta à resolução de uma situação do quotidiano por futuros professores dos primeiros anos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 23, n. 2, p. 76-98, 2021.

FERNANDES, J. A. Desempenho de futuros professores numa tarefa de proporcionalidade envolvendo quantidades de uma grandeza. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 15, n. 37, p. 1-20, 2022.

FERNANDES, J. A. **Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9º ano de escolaridade**. Tese (Doutoramento em Educação – Metodologia do Ensino da Matemática), Universidade do Minho, Braga, 2000.

FREUDENTHAL, H. **Didactical Phenomenology of Mathematical Structures**. Dordrecht: Reidel, 1983.

GALL, M. D.; GALL, J. P.; BORG, W. R. **Educational research:** An introduction. 7. ed. Boston: A & B Publications, 2003.

LAMON, S. J. Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In: Lester, F. K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte: Information Age Publishing, 2007. p. 629-667.

MARTINS, I. A.; FERNANDES, J. A. A prevalência da linearidade nas relações entre os conceitos de perímetro, área e volume. In: LIBRO DE ACTAS DO XI CONGRESO INTERNACIONAL GALEGO-PORTUGUÉS DE PSICOPEDAGOXÍA. A Coruña, 2011. **Proceedings…** A Coruña: Revista Galego-Portuguesa de Psicopedagoxía, 2011. p. 1299-1310.

MARTINS, I. A.; FERNANDES, J. A. Estratégias usadas por alunos do ensino básico em tarefas envolvendo relações entre os conceitos de perímetro, área e volume. In: Gomes, A. (Ed.). ELEMENTARY MATHEMATICS EDUCATION. Braga, 2008. **Proceedings…** Universidade do Minho e Associação para a Educação Matemática Elementar, 2009. p. 303-312.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA. **Programa de matemática para o ensino básico**. Lisboa: Autor, 2013.

MODESTOU, M.; GAGATSIS, A. Students’ improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of “linearity”. **Educational Psychology**, v. 27, n. 1, p.75-92, 2007.

MODESTOU, M.; GAGATSIS, A.; PITTA-PANTAZI, D. Students’ improper proportional reasoning: the case of area and volume of rectangular figures. In: Hoines, M. J.; Fuglestad, A. B. (Eds.). Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3, Bergen, 2004. **Proceedings…** Bergen, 2004. p. 345-352.

NCTM. **Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar**. Lisboa: APM e IIE, 1991.

ROUCHE, N. Prouver: amener à l'évidence ou contrôler des implications?. In: COMMISSION INTER-IREM HISTOIRE ET EPISTÉMOLOGIE DES MATHÉMATIQUES (Ed.). **La demonstration dans l'histoire**. Lyon: IREM, 1989. p. 8-38.

STAVY, R.; TIROSH, D. **How students (mis-)understand science and mathematics: Intuitive rules**. New York: Teachers College Press, 2000.

TIROSH, D.; STAVY, R. Intuitive rules: a way to explain and predict student's reasoning. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 1, n. 3, p. 79-194, 1999.

HISTÓRICO

Submetido: 17 de maio de 2022.
Aprovado: 22 de maio de 2022.
Publicado: 14 de junho de 2022.