



## Geometria Sintética: investigação por meio de demonstrações visuais

Synthetic Geometry: research through visual demonstrations

Nadia Roberta Quaini Bresolin<sup>1</sup>

*Colégio Franciscano Santíssima Trindade e Instituto Estadual de Educação Professor Annes Dias*

José Carlos Pinto Leivas<sup>2</sup>

*Universidade Franciscana*

### RESUMO

Neste artigo, apresenta-se uma investigação, de cunho qualitativo, realizada com doze estudantes do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual no Rio Grande do Sul, a qual teve por objetivo investigar o uso do *software* GeoGebra nas demonstrações visuais em Geometria Sintética. Foi realizada em laboratório de informática e a coleta de dados foi obtida pelos registros das construções feitas pelos estudantes, analisando-se os protocolos existentes no próprio *software*. A atividade consistiu de um teorema específico de geometria plana e serviu de projeto piloto para a primeira autora elaborar os instrumentos de investigação que serviram para pesquisa posterior constante de uma dissertação de mestrado profissional concluída. Os resultados deste projeto mostraram ser possível explorar habilidades visuais no GeoGebra para obter demonstrações sintéticas de teoremas e propriedades em Geometria.

**Palavras-chave:** Geometria Sintética; Visualização; Atividade piloto; Argumentação.

### ABSTRACT

In this article, we present a research, qualitative nature, conducted with twelve students of the first year of High School to a public school in Rio Grande do Sul, Brazil, which aimed to investigate the use of GeoGebra software in visual demonstrations in Synthetic Geometry. It was held in the computer lab and the collect of data was obtained through the records of the constructions made by the students, analyzing the existing protocols in the software itself. The activity consisted of a specific theorem of plane geometry and served as a pilot project for the first author prepare research instruments that served to constant further research in a professional master dissertation concluded. The results of this project proved to be possible to explore visual abilities in GeoGebra for synthetic statements of theorems and properties in Geometry.

**Keywords/Palabras clave:** Synthetic Geometry; Visualization; Activity pilot; Argumentation.

### INTRODUÇÃO

O processo de ensino e de aprendizagem da Geometria, relacionado com o uso da tecnologia, poderá ter muitos ganhos a seu favor, tornando-a mais atrativa para os estudantes. Borba e Penteado (2003) afirmam, sobre informática no processo educativo, que a mesma deve ser discutida nos currículos escolares.

---

<sup>1</sup> Mestre em Ensino de Ciências e Matemática (UFN) – Professora da Rede de Ensino Privado e Estadual, Cruz Alta, RS, Brasil. Rua Procópio Gomes, 857, ap.700 Cruz Alta RS Cep 98005 109: <https://orcid.org/0000-0001-5821-6451>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/9050052527361643> E-mail: [nadiarqb@live.com](mailto:nadiarqb@live.com)

<sup>2</sup> Doutor (UFPR). Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (UFN), Santa Maria, RS, Brasil. Rua Ernesto Witrock, 141 ap. 202B, Centro, Canoas, RS, Brasil. CEP: 92310-280: <https://orcid.org/0000-0001-6876-1461>. Lattes <http://lattes.cnpq.br/0314545667166824>.

O acesso à informática deve ser visto como um direito e, portanto, nas escolas públicas e particulares, o estudante deve poder usufruir de uma educação que, no momento atual inclua, no mínimo, uma “alfabetização tecnológica”. Tal alfabetização deve ser vista não como um Curso de Informática, mas, sim, comum aprender a ler essa nova mídia. (BORBA; PENTEADO, 2003, p.17)

Para a educação, a introdução de tecnologias está cada vez mais presente, fazendo com que alunos e professores se adaptem a essa realidade. Para Gravina *et al.* (2012, p. 13), a “tecnologia digital coloca à nossa disposição diferentes ferramentas interativas que descortinam, na tela do computador, objetos dinâmicos e manipuláveis. Isso vem mostrando interessantes reflexos nas pesquisas em Educação Matemática”.

Organizar o conhecimento de Geometria e relacionar com o computador, em especial, os softwares de Geometria Dinâmica - GD, os quais mencionam a ideia de movimento, permite movimentar as representações nele realizadas e proporcionar incentivos aos estudantes para realizarem as atividades. Gravina (2001, p. 83) afirma que esses “softwares oferecem o recurso de estabilidade sob ação de movimento em uma construção, mediante deslocamentos aplicados aos elementos iniciais determinadores do objeto geométrico”. Eles propiciam aos estudantes construir elementos geométricos e visualizá-los de formas diferentes, o que poderá auxiliar na compreensão do comportamento geométrico.

A atividade, a qual se denomina de piloto, teve como objetivo investigar o uso do software GeoGebra em demonstrações visuais em Geometria Sintética. Está embasada na ideia de proporcionar construções de proposições geométricas de figuras estudadas por si mesmas, sem intervenção alguma de fórmulas (KLEIN, 1927).

## **DESENVOLVIMENTO**

A GD tem se apresentado como um recurso importante, tanto para o ensino, quanto para a aprendizagem geométrica. Os estudantes, por meio desses softwares, têm a possibilidade de fazer suas construções a partir de conjecturas previamente elaboradas o que, segundo Nasser e Tinoco (2004, p. 7) consiste em: “suposição, hipótese, opinião fundada em indícios”.

Nasser e Tinoco (2004, p. viii) expõem que a GD, “em geral, tem sido usada com referência ao enfoque que utiliza o computador como ferramenta”. De forma simples, pode-se interpretar a Geometria da régua e do compasso como sendo adaptada ao computador com os

recursos que esse disponibiliza. A forma dinâmica auxilia na aprendizagem de Geometria, na maneira de modificar e interagir, ao contrário da forma estática, em que a mesma, muitas vezes, é trabalhada, ou seja, os alunos não manipulam os objetos geométricos.

Segundo Carneiro (2006, p. 4),

nos programas de GD (Geometria Dinâmica), a geometria é apresentada de forma essencialmente diferente da do lápis e do papel ou do quadro negro, trazendo uma grande variedade de novos recursos para o ensino e aprendizagem, tais como permitir a consideração e a análise simultânea de um número maior de casos, ressaltar a distinção entre desenho e construção geométrica, facilitar a formulação de conjecturas e ajudar o professor na elaboração de dinâmicas ilustrativas.

Na Matemática, a Geometria foi, de certa forma, a mais beneficiada com as tecnologias computacionais, as quais auxiliam o estudante a experimentar, descobrir e fazer relações entre elementos geométricos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998, p. 44), “o bom uso que se possa fazer do computador, na sala de aula, também depende da escolha de softwares, em função dos objetivos que se pretende atingir e da concepção de conhecimentos e de aprendizagem que orienta o processo”. Analisando os softwares de GD, elegeu-se o GeoGebra, que é livre, e proporciona ao usuário a realização de atividades que envolvem a construção de maneira interativa. Apresenta uma interface muito interessante, na medida em que possui uma janela algébrica e outra de visualização. O processo de construção, por meio dele, pode proporcionar aos alunos desenvolverem a compreensão de conceitos matemáticos, além de utilizar visualização com o uso das ferramentas que disponibiliza, estabelecendo relações e chegando às próprias conclusões. Para Gerônimo e Barros (2010, p. 11),

o software GeoGebra pode substituir satisfatoriamente o caderno de desenho geométrico. Podemos utilizar sua interface gráfica e suas ferramentas para traçar retas, ângulos, circunferência, etc. Uma das vantagens do uso do GeoGebra é que as construções são dinâmicas, isto é, podem ser modificadas sem a perda dos vínculos geométricos. Isso permite que o usuário faça grandes quantidades de experimentações que lhe possibilitem construir proposições geométricas.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017, p. 3), ao definir competência específicas para a Matemática no Ensino Fundamental, dentre outras, apresenta “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para

modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados”. Por sua vez, para a área de Geometria destacam-se as seguintes habilidades:

(EF03MA16) Reconhecer figuras congruentes, usando sobreposição e desenhos em malhas quadriculadas ou triangulares, incluindo o uso de tecnologias digitais (BRASIL, 2017, p.25).

(EF05MA17) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais (BRASIL, 2017, p. 33).

(EF05MA18) Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando tecnologias digitais (BRASIL, 2017, p.33).

Julga-se importante chamar a BNCC do EF, pois ela fornece subsídios do que deveria ser abordado neste nível para ingressar no EM. Acredita-se que o software GeoGebra apresenta ferramentas importantes para desenvolver métodos visuais de resolução de problemas geométricos, além de proporcionar formas de argumentação e, por que não, de demonstrações visuais, as quais visam explorar, com maior intensidade, os recursos que oferece.

A atividade investigativa, que se denomina de piloto, teve como propósito analisar como um grupo de alunos do Ensino Médio utilizava o software GeoGebra para desenvolver habilidades visuais na demonstração de um teorema da Geometria Euclidiana, em que Euclides usava apenas régua e compasso convencionais. Hoje, com o uso da tecnologia, essas são utilizadas em Geometria Sintética para desenvolver habilidades de argumentação por parte dos alunos. A Geometria Sintética se encarrega da construção de formas e lugares geométricos por si mesma, independente de fórmulas ou coordenadas, as quais mudam o foco analítico, segundo Klein (1927), ou seja, se aprofundam no estudo para estabelecer uma forma de construir, de maneira sintética, as formas e os lugares geométricos, sendo o estudo de Geometria feito a partir de termos iniciais, com a demonstração lógica de teoremas ligando uma ideia à outra.

Geometria Sintética, para Klein (1927), é aquela que dá tratamento aos objetos geométricos, sem utilização de coordenadas, como é feito no tratamento dado pela Geometria Analítica. Ao elaborar conjecturas e demonstrações de propriedades geométricas, sem o uso de fórmulas, utilizou-se o aspecto visual da Geometria Descritiva, com o uso dos instrumentos de

desenho geométrico, o que caracteriza uma Geometria Sintética. A exploração do software, nessas construções, torna o estudo relativamente novo e atual no ensino de Geometria.

## **METODOLOGIA**

Estudos em educação mostram que investigar constitui uma forma de construir conhecimento e, por meio de uma atividade investigativa, os estudantes demonstram um entusiasmo maior pela Matemática. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 29), as aulas investigativas são:

aqueles que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. [...] Dependendo da forma como essas aulas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase de explorações e problematizações. Porém, se ocorrer, durante a atividade, formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de investigação matemática.

Ponte et al. (2013, p. 13) também fazem referência à investigação indicando que, para “os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”. Na Matemática, bem como em outras disciplinas do currículo escolar, o aluno, ao envolver-se nas atividades, produz aprendizagem. Afirmam:

o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem. (PONTE et al., 2013, p.23)

Para Oliveira (2002, p. 117),

as pesquisas que se utilizam da abordagem qualitativa possuem a facilidade de poder descrever a complexidade de uma determinada hipótese ou problema, analisar a interação de certas variáveis, compreender e classificar processos dinâmicos experimentados por grupos sociais, apresentar contribuições no processo de mudança, criação ou formação de opiniões de determinado grupo e permitir em maior grau de profundidade, a interpretação das particularidades dos comportamentos ou atitudes dos indivíduos.

A pesquisa qualitativa de cunho exploratório pode auxiliar o aluno no desenvolvimento da investigação, pois ele terá como se expressar sobre o tema, construir conceitos, estabelecer conjecturas de um teorema, neste caso, específico, o qual é enunciado por Rich (2003, p. 302) da seguinte forma: “Um diâmetro perpendicular a uma corda bissecciona a corda e seus arcos”.

Para esta investigação, utilizou-se a gravação em pastas individuais, constantes dos computadores, no laboratório de informática da escola, as quais foram encaminhadas por e-mail para a investigadora. De acordo com Severiano (2007, p. 124), o arquivo “[...] é toda forma de registro e sistematização de dados, informações, colocando-se em condições de análise por parte do pesquisador.

Outro aspecto importante a considerar, em uma pesquisa, como forma de coleta de dados, é a observação. Conforme indicam Lakatos e Marconi (2003, p. 190), “A observação é uma técnica de coleta de dados para conseguir informações e utiliza os sentidos de determinados aspectos da realidade. Não consiste apenas em ver ou ouvir, mas, também, em examinar fatos ou fenômenos que se desejam estudar”.

O diário de campo, como registro das observações, é feito no ambiente investigado e foi utilizado pela investigadora para fazer anotações a respeito do desenvolvimento da atividade. Além disso, para Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 119), o diário de campo é:

um dos instrumentos mais ricos de coleta de informação durante o trabalho de campo. É nele que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos. Quanto mais próximo do momento da observação for o registro, maior será a acuidade da informação.

A atividade foi desenvolvida com os alunos do primeiro ano do Ensino Médio da Escola Estadual professor Annes Dias, no município de Cruz Alta, RS, e possibilitou analisar e reavaliar a forma proposta pela investigadora, a fim de obter os registros e análise dos dados para a elaboração de uma dissertação junto a um Mestrado Profissional.

A partir da coleta dos arquivos registrados nos computadores e fornecidos à pesquisadora, com o desenvolvimento dos 17 itens indicados e analisados a seguir, bem como as observações em seu diário de bordo quanto ao andamento da aula, foi possível analisar os protocolos das construções e verificar se houve aprendizagem de conceitos e construções, ancorando-se nas referências teóricas que nortearam sua pesquisa, de modo a chegar ao que

preconiza o referido teorema, caracterizando o que se denomina Geometria Sintética. Julgou-se oportuno indicar todas as atividades, mesmo que algumas analisadas mais superficialmente do que outras, pois os passos explorados são considerados relevantes para a compreensão do que seja Geometria Sintética.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

A atividade piloto auxiliou a investigadora a analisar e reavaliar a forma proposta, reestruturando-a para replicação, a fim de obter os registros e análise dos dados para elaborar a dissertação. O projeto piloto, segundo Lakatos e Marconi (2003, p. 228), “permite também a obtenção de uma estimativa sobre os futuros resultados, podendo, inclusive, alterar hipóteses, modificar variáveis e a relação entre elas. Dessa forma, haverá maior segurança e precisão para a execução da pesquisa”.

O teorema apresentado na investigação refere-se a conceitos geométricos importantes, como retas perpendiculares, corda, diâmetro, ângulos e arcos da circunferência, os quais são estudados de forma ampla no teorema. Os alunos podem estabelecer o processo de construção do mesmo, associando, de forma significativa, os conceitos. Além do software GeoGebra, eles utilizaram a internet para pesquisar itens que podem ter sido esquecidos, como indicou-se ocorrer, pela prática profissional de quinze anos da pesquisadora, visto que são conceitos trabalhados nas séries finais do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental.

Uns participantes avançaram rapidamente e outros foram um pouco mais lentos, o que se entende estar dentro da normalidade em atividades realizadas no computador. É importante destacar isso, pois esse tipo de tarefa atende às individualidades existentes em sala de aula. Todos se comprometeram e se envolveram na atividade proposta.

A atividade piloto foi realizada com a duração de quatro períodos de 50 minutos. A turma era do primeiro ano do Ensino Médio, em horário de aulas regulares, e foi escolhida em função de ser essa a única turma desse nível de escolaridade em que a pesquisadora é professora efetiva. Participaram os 15 alunos matriculados no primeiro dia, estando três ausentes no segundo. Assim, a análise foi realizada com os 12 participantes dos dois encontros. Para preservar suas identidades, eles foram nomeados como  $A_1, A_2 \dots A_{12}$ .

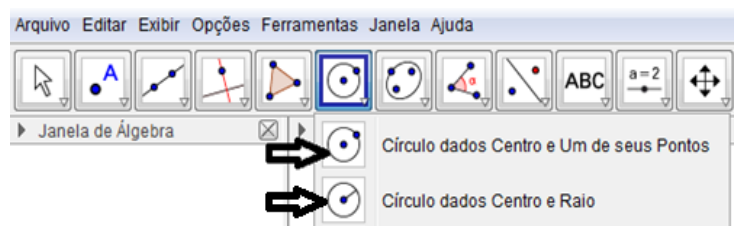
No primeiro momento, eles tiveram um contato inicial com o software, manusearam e observaram suas potencialidades. Após, cada um recebeu um roteiro de atividade para a realização e registro.

O roteiro foi dividido em 17 passos, os quais orientaram a busca da demonstração do teorema escolhido. Julgou-se pertinente esse detalhamento, uma vez que os alunos não estavam acostumados com este tipo de tarefa, pois, em geral, os professores fornecem a dedução e não promovem a descoberta por parte deles. A seguir, será descrita a tarefa de cada um e a respectiva análise a partir dos registros individuais encaminhados à pesquisadora:

### 1. Construa uma circunferência. Explique sua construção.

Para essa construção, o software GeoGebra fornece duas opções: “Círculos dados Centro e Um de seus pontos” e “Círculo dados Centro e Raio” (Figura 1).

**Figura 1** - Ferramenta círculos<sup>3</sup>



Fonte: GeoGebra

De imediato, os alunos fizeram a construção utilizando a segunda opção, verificando que o tamanho da circunferência era determinado pelo raio e a mesma ficava sem movimentação.

A pesquisadora estimulou-os na busca da primeira opção “Círculos dados Centro e Um de seus pontos” e, ao usá-la, verificaram que poderiam determinar o tamanho da circunferência e obter a movimentação, tanto pelo seu centro, quanto pelo ponto escolhido na mesma. O objetivo pretendido para a atividade inicial foi averiguar a dinâmica do software. Isso vem ao

<sup>3</sup> A ferramenta indica a construção de círculo (região), no entanto, o que se obtém é a circunferência (curva). A transformação de um no outro ocorre pela ferramenta propriedades/cor/transparência.



encontro do que Santos (2009, p. 14) afirmou a respeito do ambiente computacional para ensinar Geometria:

as simulações dessas construções no ambiente computacional ensinam o aluno a usar os objetos traçados na tela como ajuda no estabelecimento de conjecturas e justificativas e essa é uma parte considerável do trabalho de ensinar geometria, para a qual a Geometria Dinâmica pode concretizar efetivamente.

## **2. Você sabe o que é uma corda da circunferência? Explique.**

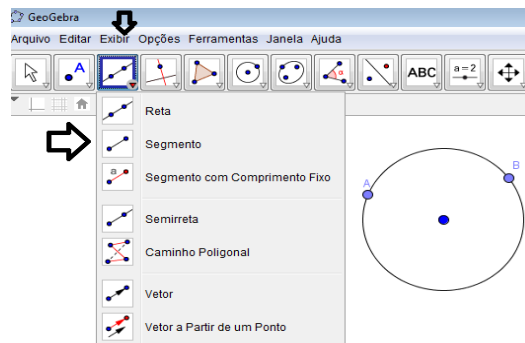
O segundo passo teve por objetivo averiguar o conhecimento dos alunos sobre o que é uma corda de circunferência. Feito o questionamento aos alunos, de forma oral, eles consultaram a internet para obter o seu significado. Quase que a totalidade deles assim expressou: “é um segmento que liga um ponto a outro ponto da circunferência”. Verificou-se que a transcrição foi diretamente obtida da internet, não sendo expressa com linguagem própria.

A exceção a essa forma de escrever foi a do aluno A<sub>9</sub>: “é um segmento de reta, que une dois pontos da circunferência, passando pelo centro”. A escrita do aluno está errada, pois, aparentemente, ele confundiu corda (segmento de reta) com diâmetro.

## **3. Construa uma corda, na circunferência, e a nomeie.**

Com o conceito de corda discutido entre a pesquisadora e os alunos, o terceiro passo foi a construção de uma corda da circunferência e marcação dos pontos extremos, nomeando-os. Verificou-se que os estudantes compreenderam, corretamente, o conceito de corda na circunferência e realizaram a atividade satisfatoriamente, inclusive o mesmo aluno A<sub>9</sub>, que, em seus registros, não compreendeu corretamente o conceito, fez a construção correta. Acredita-se que a retomada do conceito por esse aluno foi em função do diálogo travado com a professora pesquisadora e com os colegas. Eles marcaram dois pontos na circunferência, nomeando-os por A e B e, em seguida, utilizando o software, clicaram no terceiro botão (exibir) e, na caixa de opções (segmento), ligaram os pontos, como apontado na (Figura 2). Como o GeoGebra nomeia os pontos na ordem alfabética, foi necessário renomeá-los e utilizar a ferramenta ‘exibir rótulo’, no caso do centro, e ‘exibir objeto’, no caso do ponto da circunferência.

**Figura 2 - Tela de exibir segmento.**



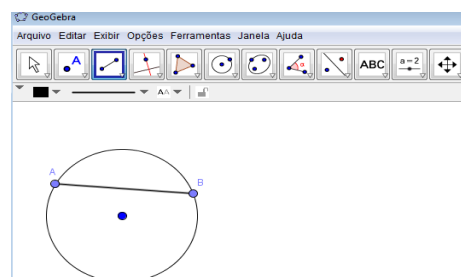
Fonte: GeoGebra

Entende-se que o envolvimento dos alunos nessa construção, embora elementar, mas inovadora para eles, que não conheciam o software, vai ao encontro do que Gerônimo e Barros (2010) indicaram a respeito do software poder substituir o caderno de desenho geométrico, no qual os erros cometidos ou adaptações nas construções exigem o uso da borracha ou uma nova construção o que, muitas vezes, desestimula os estudantes a continuarem a tarefa.

#### **4. Movimente essa corda. O que observas?**

Aqui, os alunos deveriam movimentar a corda construída e registrar o que estavam observando. Concluíram que “a corda aumentava e diminuía”. Assim, movimentaram-na na circunferência, sem dificuldades, comprovando o que Carneiro (2006) indicou a respeito dos programas de GD, em que a Geometria é apresentada sob formas essencialmente diferentes do lápis e do papel ou quadro, trazendo variedade de recursos, segundo a autora, para o ensino e a aprendizagem. A Figura 3 registra a construção de aluno.

**Figura 3 - Construção de corda com a ferramenta segmento.**



Fonte: GeoGebra.

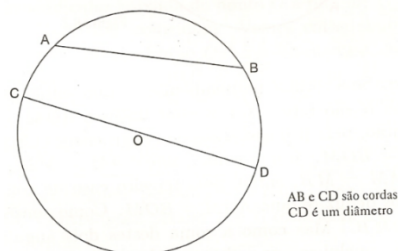
## 5. Você sabe o que é diâmetro da circunferência? Explique.

No quinto passo, deveriam descrever o que é um diâmetro de circunferência e, novamente, consultaram a internet para verificar o seu conceito.

Os alunos  $A_{11}$ ,  $A_8$  responderam: “é a corda que passa no centro da circunferência”.  $A_3$  afirmou: “é quando a corda está no centro”.  $A_9$  relatou: “o diâmetro é a corda que passa pelo centro da circunferência”. Para  $A_{10}$ ,  $A_7$ ,  $A_6$ ,  $A_4$ ,  $A_2$  e  $A_1$ : “é a distância entre um lado e outro da circunferência, é a corda que passa pelo centro”.  $A_{12}$  e  $A_5$  afirmaram: “é a distância de um ponto ao outro”. Percebeu-se aqui, diferente do anteriormente citado, quando faziam uma colagem direta do capturado da internet, que os alunos buscaram escrita própria para o entendimento do conceito investigado.

Pode-se afirmar que a ideia de diâmetro da circunferência foi compreendida pelos alunos, pois relataram as palavras-chave: ‘passando pelo centro da circunferência’. Segundo Barbosa (2005, p. 105): “O segmento ligando dois pontos de um círculo será denominado de corda. Toda corda que passa pelo centro do círculo é um diâmetro”.

**Figura 4** - Representação de corda e diâmetro.



Fonte: adaptado de Barbosa (2005, p.105).

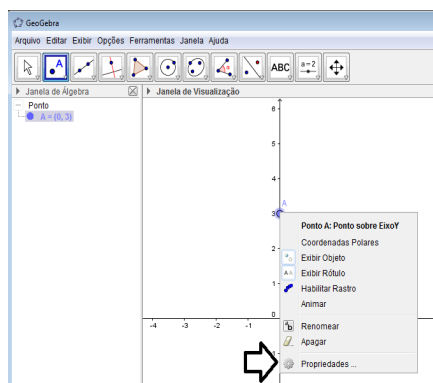
## 6. Dê novos atributos ao centro da circunferência.

No sexto passo deveriam partir do centro da circunferência e dar novo formato ao mesmo, deixando-o destacado na construção. Ao clicar em “Ponto”, o software apresenta “Propriedades” (Figura 5).

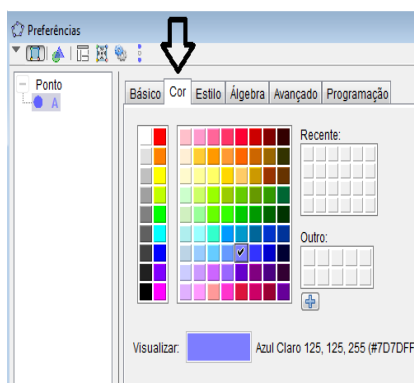
A partir disso, abre-se uma caixa com o título “Preferências” (Figura 6), a qual contém diversas abas: básico, cor, álgebra, avançado, programação, tendo cada uma diversas opções ou atributos que podem ser alterados, de acordo com as preferências do aluno. Assim, clicando na

aba “Cor” e sobre o ponto desejado, é alterada sua cor. Os alunos realizaram este passo, corretamente, sem maiores dificuldades, e usaram sua criatividade para marcar o centro da circunferência, incluindo novas formas de representá-lo.

**Figura 5 - Características e atributos.**



**Figura 6 - Preferências- cor**



**Fonte:** GeoGebra.

A atividade reafirma o que Gravina *et al.* (2012, p.13) indicaram a respeito das possibilidades de uso da informática para o despertar do aluno para o uso da Geometria, ou seja, a “tecnologia digital coloca à nossa disposição diferentes ferramentas interativas que descortinam, na tela do computador, objetos dinâmicos e manipuláveis”.

## 7. Você sabe o que são retas perpendiculares?

Com o uso da internet, descreveram no sétimo passo o que são retas perpendiculares. Conforme os dados coletados na pesquisa realizada, A<sub>3</sub>, A<sub>2</sub> e A<sub>4</sub> registraram: “são retas que se cruzam e formam um ângulo de 90 graus”. A<sub>12</sub> e A<sub>5</sub> relataram que “é uma reta de 90° que se cruzam e formam entre si um ângulo de 90°”. O aluno A<sub>7</sub> escreveu: “são retas que se interceptam, formando um ângulo reto, portanto, um caso especial de retas concorrentes”. A<sub>8</sub> e A<sub>11</sub> afirmaram: “duas retas que se interceptam, formando um ângulo reto”. Por sua vez, A<sub>1</sub>, A<sub>6</sub>, A<sub>9</sub> e A<sub>10</sub> responderam: “são retas que se interceptam, formando um ângulo reto”.

Pode-se concluir que eles identificaram retas perpendiculares como sendo retas que formam um ângulo de 90° entre si, muito embora nem sempre registrando em linguagem matemática formal, como se encontra em Rezende (2000): “Dois conjuntos, sendo cada um

deles uma reta, uma semirreta, ou um segmento, são perpendiculares se as retas que os contêm determinam um ângulo reto. Se uma reta  $r$  é perpendicular a uma reta  $s$ , isso será denotado por  $r \perp s$ ” (p.24).

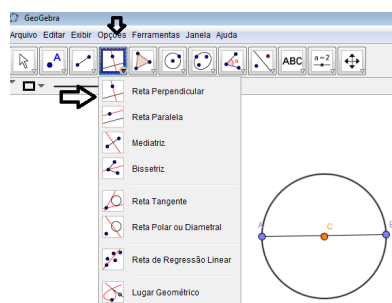
### 8. Conduza uma perpendicular à corda, passando pelo centro da circunferência e, em seguida, verifique o diâmetro obtido nessa perpendicular.

Na sequência, com o conceito de perpendicularismo formado, os alunos, no oitavo passo, marcaram uma perpendicular à corda, passando pelo centro da circunferência. Para essa construção, o software apresenta, na quarta ferramenta (opções), “reta perpendicular” (Figura 7). Os alunos clicaram nela e logo apareceu a opção “reta perpendicular”. Clicaram no centro da circunferência e, em seguida, no diâmetro, obtendo a perpendicular. Retoma-se, aqui, o conceito de diâmetro definido por Rezende (2000, p. 25):

chamamos de corda de uma circunferência qualquer segmento cujas extremidades sejam pontos pertencentes à circunferência. Qualquer corda de uma circunferência que contenha seu centro é chamada diâmetro da circunferência. Um raio é também um segmento com uma extremidade sendo um ponto da circunferência e a outra, o centro da mesma. É claro que a medida do diâmetro da circunferência é o dobro da medida de seu raio.

Os alunos executaram tal passo sem apresentarem maiores dificuldades.

**Figura 7 - Ferramenta reta perpendicular.**



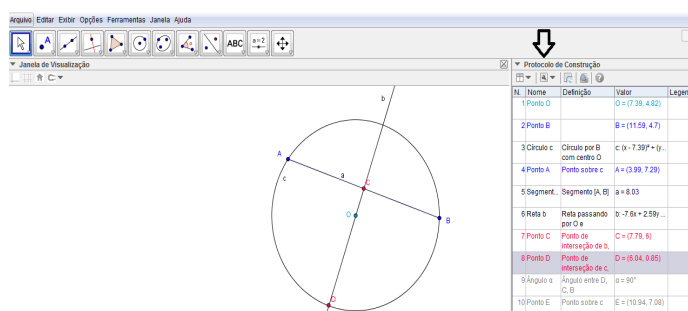
Fonte: GeoGebra.

## 9. Marque os pontos de intersecção do diâmetro com a circunferência e com a corda.

No nono passo, os alunos marcaram o ponto de intersecção do diâmetro com a circunferência e com a corda e, novamente, utilizaram as ferramentas de tamanho e cor que o GeoGebra disponibiliza, as quais já haviam sido exploradas anteriormente.

Reiniciando os trabalhos no dia seguinte, utilizou-se o recurso “protocolo de construção” que o software GeoGebra disponibiliza.

**Figura 8 - Protocolo de construção.**



**Fonte:** protocolo realizado pelo aluno A<sub>11</sub>.

Essa ferramenta proporcionou à investigadora verificar o que havia sido construído pelos alunos individualmente, com a finalidade de retomar a atividade de cada um e dar continuidade às tarefas que se seguiram. Ao descreverem o processo e registrarem no protocolo, percebeu-se a importância de desenvolver pensamento geométrico realizado em demonstrações visuais formalizando a escrita por meio de habilidades criativas, intuitivas e visuais, uma vez que têm a possibilidade de se expressarem livremente.

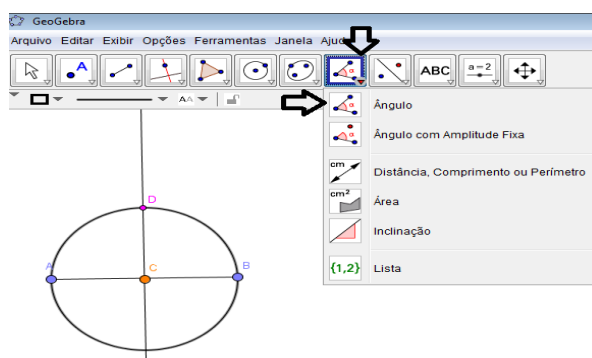
## 10. Marque e meça o ângulo formado entre o diâmetro e a corda. A que conclusão você chegou?

Nesta etapa, os alunos deveriam marcar o ângulo formado entre o diâmetro e a corda e relatar o que observaram. Para isso, a investigadora retomou os protocolos dos estudantes, registrados. De acordo com esses protocolos apresentados, verificou-se que a maioria dos alunos concluiu que se formou um ângulo reto entre as cordas e o diâmetro. Apenas os alunos A<sub>2</sub> e A<sub>4</sub> relataram: “é a porção compreendida entre dois pontos de uma curva”, ou seja, o relato

estava confuso. Analisando suas construções, constatou-se que marcaram corretamente o ângulo formado, identificando-o por  $90^\circ$ .

Para Rezende (2000), “um ângulo reto é um ângulo de medida 90. Portanto, um ângulo é reto se, e somente se, sua medida é 90” (p.24). Para marcar o ângulo formado, o GeoGebra apresenta a opção “ângulos” (Figura 9). Com ela, os alunos descobriram, após várias tentativas, que deveriam clicar nos pontos no sentido anti-horário, por exemplo, BCD, para obterem o ângulo formado.

**Figura 9 - Ferramenta ângulo.**



Fonte: GeoGebra

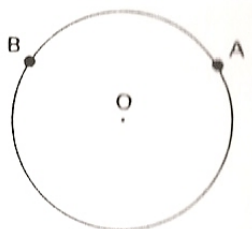
A exploração das ferramentas tecnológicas por estudantes deste nível de escolaridade, no sentido de uma alfabetização tecnológica, é o que Borba e Penteadó (2003) afirmaram sobre informática no processo educativo, devendo a mesma ser discutida nos currículos escolares. O desenvolvimento de uma pesquisa como a aqui descrita parece ir ao encontro dessa observação dos autores, uma vez se constatar a aquisição de conhecimentos informáticos no desenrolar de uma disciplina do currículo do Ensino Médio.

### **11. Você sabe o que é um arco da circunferência?**

Aqui, os alunos deveriam reconhecer o que é um arco da circunferência, tendo recorrido à internet para buscar o conceito. A partir da busca com a palavra-chave, quase a totalidade deles registrou que arco da circunferência é “a curva que vai de um ponto ao outro”. Os alunos A<sub>6</sub> e A<sub>1</sub> relataram: “o arco que corresponde à metade de uma circunferência, a quarta parte de um quadrante”. De acordo com Iezzi (2006, p. 1-c), o conceito de arco de circunferência é:

“Dados dois pontos distintos, A e B, sobre uma circunferência, essa fica dividida em duas partes. Cada uma dessas partes, que incluem A e B, é denominada arco de circunferência AB”.

**Figura 10** -Arco de circunferência.



**Fonte:** adaptado de Iezzi (2006, p.1-c).

Constatou-se que o conceito de arco da circunferência foi compreendido pelos alunos.

## **12. Marque os arcos da circunferência determinados pelo diâmetro e os nomeie de AB e BD.**

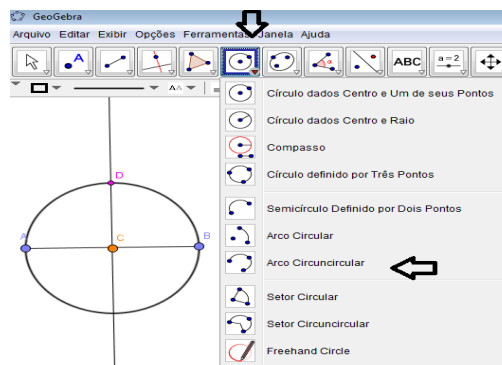
Nesta etapa, os alunos deveriam marcar os arcos na circunferência, verificando que dois pontos sobre a mesma determinam sempre dois. No software GeoGebra há a opção para obter arcos de duas formas: “Arco circular” e “Arco Circuncircular”, como mostrado na (Figura 11).

Em primeira opção, eles clicaram no “arco circular” e verificaram que o software construía outro arco, o qual não era o do objetivo proposto. Então, clicando na opção “Arco Circuncircular”, eles marcaram somente o arco da circunferência determinado pelo diâmetro.

Analisando as construções encaminhadas ao investigador, verificou-se que eles marcaram corretamente e utilizaram as ferramentas de colorir mencionadas anteriormente (Figura 6) para identificar melhor as escolhas dos pontos.



**Figura 11 - Ferramenta arco.**



**Fonte:** GeoGebra.

As observações da investigadora sobre os últimos passos realizados pelos estudantes ilustraram a destreza com que se apossaram rapidamente das ferramentas computacionais. Isso reafirma o indicado por Gravina *et al.* (2012, p.13), quanto às possibilidades de uso da informática para o despertar do aluno para o uso da Geometria por meio de diferentes ferramentas interativas.

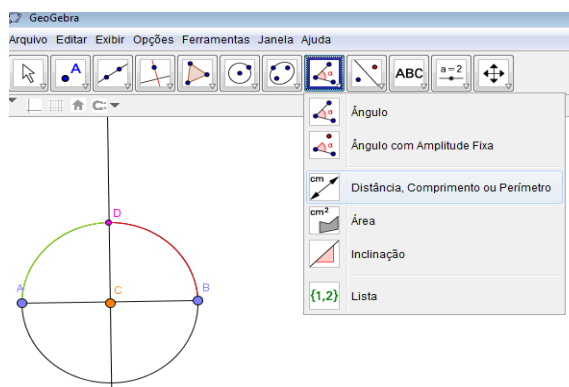
### **13. Qual relação observas entre o arco e a corda?**

Na sequência da atividade proposta, os alunos relataram o que observaram entre o arco e a corda. Analisando seus registros, verificou-se que movimentando, ou seja, arrastando a corda da circunferência em determinado ponto para cima e para baixo, o arco da circunferência se alterava também, aumentando e diminuindo seu valor. Isso foi possível de ser observado pela característica fundamental de um software de GD, como o utilizado na investigação, no qual criou-se um movimento que provocou uma mudança na configuração entre o arco e a corda.

### **14. Meça os segmentos da corda determinados pelo diâmetro.**

No décimo quarto passo, os alunos mediram os segmentos de corda determinados pelo diâmetro, utilizando a ferramenta destacada na Figura 12, com a qual os mesmos marcavam os pontos nomeados pela corda e determinados pelo diâmetro. Clicando no oitavo ícone, que oferece algumas opções, e marcando a opção “Distância, comprimento ou Perímetro”, a construção é imediatamente identificada com o comprimento do segmento da corda.

**Figura 12** - Medição de segmentos de corda.



Fonte: GeoGebra.

### 15. O que você observou?

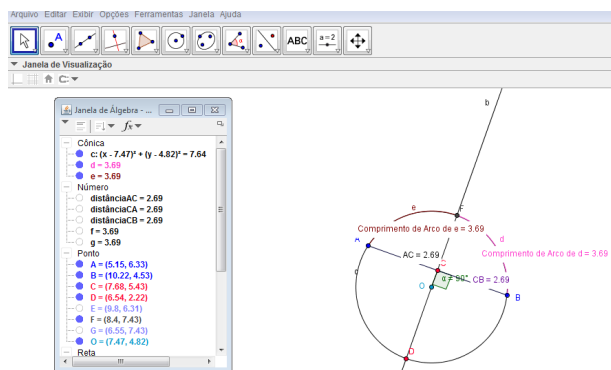
Nesta etapa, os alunos deveriam relatar o que tinham observado. As justificativas foram que: “mesmo movimentando os pontos, os valores dos segmentos da corda não mudam”. A<sub>3</sub> relatou: “aumentam e diminuem os valores igualmente”. Observou-se que as conclusões dos alunos estão corretas, pois, movimentando os pontos, o arco da circunferência altera seu valor e o segmento da corda também. Porém, existe sempre uma proporcionalidade. Ao movimentar os pontos, seus valores se alteram igualmente, aumentando ou diminuindo. As observações registradas pelos alunos mostraram ao investigador o quanto a Geometria Sintética é relevante na formação geométrica dos mesmos na formação inicial que, provavelmente, irá influenciar aqueles que pretendem seguir carreiras envolvendo a área de exatas pois, de acordo com Klein (1927), essa forma de perceber a Geometria conduz à construção de formas e lugares geométricos sem a dependência de fórmulas, como usualmente é feito no ambiente escolar. Assim, a aquisição e o aprofundamento da Geometria ocorre de forma construtivamente elaborada pelo estudante com o auxílio do professor orientador.

### 16. Meça os arcos da circunferência definidos pela corda e pelos pontos de intersecção do diâmetro com a circunferência.

No décimo sexto passo, os alunos utilizaram a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro” e mediram os arcos da circunferência definidos pela corda e pelos pontos de intersecção do diâmetro com a circunferência. Para isso, eles foram à janela de álgebra,

marcaram o arco da circunferência e clicaram. A figura 13 ilustra os registros que os alunos executaram com êxito esse passo.

**Figura 13 -** Medições de arcos e cordas.



Fonte: A11.

**17. Movimente os pontos. O que você conclui com essas atividades envolvendo uma corda de circunferência, um diâmetro perpendicular a ela e os arcos determinados na circunferência? Escreva esse resultado com suas palavras.**

Finalizando a investigação, os alunos deveriam movimentar os pontos extremos da corda, bem como o centro da circunferência e descrever o que estavam observando. Como conclusão da atividade, cada aluno fez a sua descrição:

A<sub>1</sub>: “No movimento em que eu movia a corda na circunferência, a corda e o arco aumentavam na mesma proporção e a reta que divide o arco é a reta perpendicular”.

A<sub>2</sub>: “Movimentando os pontos extremos da corda, ela aumenta e diminui, mas a medida dos segmentos da corda determinados pelo diâmetro sempre fica igual e a reta perpendicular corta a circunferência em duas”.

A<sub>3</sub>: “Que os valores não ficam diferentes um do outro, mesmo se movimentando”.

A<sub>4</sub>: “Que o movimento dos arcos acompanha o movimento dos pontos da corda; movimentando os pontos extremos da corda, ela aumenta e diminui, mas a medida dos segmentos da corda determinados pelo diâmetro fica sempre igual. E a reta perpendicular corta a circunferência em duas partes”.

A<sub>5</sub>: “Eu posso concluir que a corda da circunferência é um segmento que liga os pontos. Podemos observar que a corda aumenta e diminui e mesmo movimentando os pontos eles ficam com os mesmos valores”.

A<sub>6</sub>: “No momento em que eu movo a corda na circunferência, ela e o arco aumentam na mesma proporção e o arco é dividido pela corda perpendicular”.

A<sub>7</sub>: “Eu posso concluir que a corda da circunferência é um segmento que liga os pontos. Pode-se observar que a corda aumenta e diminui também e, mesmo movimentando os pontos, eles ficam com os mesmos valores”.

A<sub>8</sub>: “Concluí que o movimento feito não interfere e que os segmentos da corda não mudam quando movimentados”.

A<sub>9</sub>: “O comprimento do arco não muda, mesmo se movimentarmos”.

A<sub>10</sub>: “Pude concluir que a corda da circunferência é um segmento que liga os pontos. Pude observar que a corda aumenta e diminui. Mesmo movimentando os pontos, eles ficam com os mesmos valores”.

A<sub>11</sub>: “Construí uma circunferência, uma corda, uma reta perpendicular e arcos. Conforme movimentava os pontos da circunferência, percebi que os segmentos da corda, tais quais os arcos, possuíam medidas que aumentavam e diminuía, mas eram as mesmas dos dois lados”.

A<sub>12</sub>: “Pode-se concluir que a corda da circunferência é um segmento que liga os pontos, aumenta e diminui e, mesmo movimentando-os, eles ficam com os mesmos valores”.

Nota-se, na culminância das atividades, que em nenhum momento os conceitos e relações foram surgindo por meio de fórmulas matemáticas, ou seja, houve uma obtenção de relações oriundas da observação, da criatividade, da exploração por meio de um software, possibilitando não uma demonstração, mas uma obtenção de conceitos e relações que levaram Klein (1927) a caracterizar Geometria Sintética, ou seja, dar um tratamento aos objetos geométricos, sem utilização de coordenadas, como é feito na Geometria Analítica, por meio de leis matemáticas, ou mesmo na Euclidiana.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao analisar as conclusões transcritas dos alunos, pode-se comprovar que, a partir da proposta de atividade investigativa e prazerosa, com o uso do computador, internet e, em especial, com o software GeoGebra, foi possível obter uma proximidade ao teorema enunciado, numa construção passo a passo, em que os alunos foram explorando as ferramentas disponíveis no software e os conceitos geométricos envolvidos, quer pela própria exploração, no ambiente computacional, quer pela busca, na internet, daqueles que não lembravam ou desconheciam, sendo, por isso, relevante a chamada ao que indica a BNCC para o Ensino Fundamental uma vez que os estudantes deveriam chegar ao Ensino Médio com tais conceitos formulados.

A atividade não tinha a pretensão de que os alunos partissem do enunciado do teorema, separassem em hipótese e tese e seguissem uma demonstração rigorosa, como é usual em textos matemáticos. Buscava-se, com o número de passos, nortear os alunos, principalmente, para o reconhecimento de ferramentas disponibilizadas pelo GeoGebra e o seu potencial para a descoberta de relações geométricas importantes para obter conclusões, especialmente, utilizando os aspectos visuais oferecidos. Por essa razão, indicou-se no artigo todas as etapas, mesmo que a análise de algumas tenha sido superficial para não delongar o artigo.

Com a realização da atividade piloto, os estudantes comprovaram que é possível utilizar o software GeoGebra em demonstrações visuais de Geometria Sintética bem como visualizar, de formas diferentes, um teorema e auxiliar na compreensão do comportamento geométrico em tais demonstrações.

Assim, considera-se que o objetivo de analisar como os alunos do primeiro ano do Ensino Médio utilizam o software GeoGebra para desenvolver habilidades visuais, na demonstração de um teorema da Geometria Euclidiana, foi alcançado. Um procedimento de Geometria Sintética proporcionou a construção de formas e lugares geométricos por si mesmo, utilizando, nesse processo, a GD.

No que diz respeito à investigadora, a atividade piloto realizada proporcionou um conhecimento maior sobre a utilização do software e uma segurança para a mestrandia analisar e reavaliar a forma utilizada para a replicação da atividade na sua dissertação de mestrado, cumprindo-se o objetivo, tanto do presente trabalho, quanto o de um projeto piloto.

## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. **Informática e Educação Matemática** 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEF, 2017.
- CARNEIRO, J. P. Q. Pesquisa de lugares geométricos com o auxílio da Geometria Dinâmica. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 61, p 4 – 8. 2006.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.
- GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M. de O. **Geometria Euclidiana plana: um estudo com o software GeoGebra**. Maringá: Eduem, 2010.
- GRAVINA, M. A.; **Os ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético dedutivo**, tese de doutorado. Porto Alegre, RS, UFRGS, 2001.
- GRAVINA, M. A. *et al.* **Matemática, mídias digitais e didática: tripé para formação de professores de matemática**. Porto Alegre: Evangraf, 2012.
- IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria**. São Paulo: Atual, 2006.v. 3.
- KLEIN, F. **Matemática Elemental desde un punto de vista superior**. Trad. Roberto Araújo. Madrid: Biblioteca Matemática, 1927.
- LAKATOS, E. M; MARCONI, M. de A. **Fundamento de Metodologia Científica**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2003.
- NASSER, L.; TINOCO, L. **Curso básico de geometria: enfoque didático**. 3 ed. Rio de Janeiro: UFRJ/IM Projeto Fundação, 2004.
- OLIVEIRA, L. de. **Tratado de Metodologia Científica**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 3 ed. Revista e ampliada. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

REZENDE, E. Q. F. **Geometria Euclidiana plana e Construções geométricas**/ Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz – Campinas, SP: Editora da Unicamp: São Paulo, 2000.

RICH, B. **Teoria e problemas de geometria**. 3 ed. Porto Alegre: Bookman, 2003. (coleção Schaun)

SANTOS, A. R. dos. **Construções Concretas e Geometria Dinâmica: Abordagens Interligadas para o Estudo de Cônicas**. São Carlos, SP: SBMAC, 82 p. 2009.

SEVERIANO, A. J. **Metodologia do Trabalho Científico**, 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

## HISTÓRICO

**Submetido:** 27 de novembro de 2021.

**Aprovado:** 13 de junho de 2022.

**Publicado:** 14 de junho de 2022.