RIDEMA
Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática

Ideias Básicas de Função: uma abordagem historiográfica

Basic Function Ideas: a historiographical approach

Karina de Oliveira Castro[1]
Universidade Anhanguera

Chang Kuo Rodrigues[2]
Universidade Federal de Juiz de Fora

RESUMO

Este estudo é um recorte de um trabalho oriundo de uma dissertação de mestrado, que foi realizada, na ocasião, a partir de investigações que subsidiaram o tema Função. A problemática que o sustenta está ligada à compreensão desse conceito (Função) pelos estudantes do Ensino Fundamental. Julgamos pertinente, à época, sondar de que forma o educando lida com atividades que contenham as ideias básicas de Função, de modo que seja constatada a possibilidade da realização de um projeto que favoreça a construção de seu conceito. Atualmente, damos seguimento a este tema na pesquisa de doutorado, sendo que agora afunilamos nosso interesse em relação à ideia de generalização. Parece-nos conveniente, portanto, apresentar os apontamentos de outrora, uma vez que recorremos a estas ideias com frequência. Desse modo, o objetivo deste artigo é realizar um estudo historiográfico sobre a evolução das ideias básicas que compõem o conceito de Função. Há, ainda, algumas considerações a respeito dessa abordagem no ensino fundamental. Para isso, fizemos uma revisão bibliográfica a partir de arquivos disponíveis na literatura científica. A análise mostra, além dos resultados de algumas pesquisas que se ocupam do tema, que a evolução do conceito de Função foi lenta e que seus registros remontam desde a Antiguidade até o século XX.

Palavras-chave: Função; Ideias básicas; Evolução; Conceito; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This study is an excerpt of a work from a master's thesis, which was carried out, at the time, from investigations that supported the theme Function. The problem that sustains it is linked to the understanding of this concept (Function) by elementary school students. We thought it pertinent, at the time, to investigate how the student deals with activities that contain the basic ideas of Function, so that the possibility of carrying out a project that favors the construction of his concept is verified. Currently, we follow-up on this topic in our PhD research, and now we are narrowing our interest in relation to the idea of generalization. It seems convenient, therefore, to present our notes from the past, since we resort to these ideas frequently. Thus, the objective of this article is to carry out a historiographical study regarding the evolution of the basic ideas that make up the concept of Function. We will also discuss some considerations about this approach in elementary school.For this, we did a bibliographic review from files available in the scientific literature. The analysis shows, in addition to the results of some researches dealing with the theme, that the evolution of the concept of Function was slow and that its records go back from Antiquity to the 20th century.

[1]Mestre em Educação Matemática (USS). Doutoranda em Educação Matemática (UNIAN), São Paulo, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Maria Fernandes de Barros, 236, Vila Reis, Cataguases, MG, Brsil, CEP: 36770-238. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0315-2774 Lattes: http://lattes.cnpq.br/9634238955220127. E-mail:karinadeoliveiracastro@gmail.com

[2]Doutora em Educação Matemática (PUC-SP). Docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFJF, Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Senhor dos Passos, 2475, São Pedro, Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil. CEP: 36037-490. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8716-6078. Lattes: http://lattes.cnpq.br/1862842899466487 E-mail: changkuockr@gmail.com.

Keywords: Function; Ideas function; Evolution; Concept; Elementary school.

INTRODUÇÃO

Neste estudo, fizemos um apanhado das matrizes históricas que acompanham a evolução do conceito de Função em uma perspectiva historiográfica. Para isso, baseamo-nos em um estudo bibliográfico, com destaque para as obras de Pelho (2003) e Caraça (2010) mais os argumentos de Youschkevitch (1976 apud PELHO, 2003) sobre o tema como fonte de investigação. A problemática que deu origem a essa investigação é a compreensão da evolução do conceito de Função pelos estudantes do Ensino Fundamental. Percebemos que os trabalhos relacionados a essa temática percorrem as diversas fases de escolarização e, boa parte deles, revela restrições no pensamento algébrico dos estudantes. A nosso ver, essas restrições contêm uma estreita relação com a formação do conceito de Função propriamente dito.

A pesquisa de mestrado que originou este artigo tem como objetivo principal sondar de que forma o educando lida com atividades que contenham as ideias básicas de Função para que seja possível a formação de seu conceito (CASTRO, 2012). Para tal, nos debruçamos, à época, sobre as ideias de dependência funcional, correspondência, regularidade, generalização e variável.

Este artigo traz, portanto, um recorte dessa pesquisa. O objetivo aqui é apresentar um breve panorama histórico que possa revelar que ideias acompanharam o desenvolvimento do conceito de Função. O propósito é mostrar quais são essas ideias e qual a sua importância no desenvolvimento e construção do conceito. A base de nossos apontamentos está em Youschkevitch (1976 apud PELHO, 2003) e em Caraça (2010). Além dessa abordagem historiográfica, a última seção deste artigo traz considerações a respeito de alguns trabalhos que visam investigar essa temática no ensino fundamental.

Ao final do presente estudo, compilamos os dados em um quadro cuja pretensão é fazer um paralelo entre as ideias básicas de Função e o respectivo período histórico de seu desenvolvimento.

A ANTIGUIDADE E OS RUDIMENTOS DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Pode-se analisar o desenvolvimento do conceito de Função tomando por referência três períodos fundamentais: a Antiguidade, a Idade Média e o Período Moderno. Vamos traçar um paralelo entre essas fases, de acordo com o estudo de Youschkevitch (1976 apud PELHO, 2003) e os apontamentos históricos contidos em Caraça (2010). O objetivo é destacar as ideias fundamentais de Função desse período e de que maneira elas contribuíram no desenvolvimento do conceito. Comecemos pelo período da Antiguidade nesta seção.

Na Antiguidade, os apontamentos históricos revelam que houve um desenvolvimento das ideias de dependência, correspondência e regularidade. E, nessa ordem, Pelho (2003, p.19) destaca que "[...] verifica-se o estudo de alguns casos de dependência entre duas quantidades, sem ainda destacar a noção de variáveis e de funções" enquanto Oliveira (1997) aponta que os babilônios, em 2000 a.C., já utilizavam tabelas de correspondência, revelando um instinto funcional. A autora afirma que os egípcios também utilizavam correspondência em suas tabelas. O estudo de Rodrigues (2007) mostra que na Antiguidade houve o desenvolvimento da noção de dependência, ainda que as ideias não fossem generalizadas de maneira formal, uma vez que não havia a presença das variáveis. Boyer (1986) também destaca que a presença das relações de dependência entre duas grandezas já podia ser encontrada nesse período. Vê-se, portanto, uma espécie de instinto funcional na Antiguidade. As ideias não possuíam ainda um caráter de formalidade e generalização mas vão contribuir no desenvolvimento algébrico do conceito, como veremos adiante no período moderno.

O estudo de Rogalski (2013) busca identificar alguns pontos sobre a história e a epistemologia das funções. Para isso, ele considera não três, mas duas etapas da história: 1) da antiguidade ao século XVII; 2) da metade do século XVII até nossos dias. Algumas considerações a respeito desta primeira fase: o autor destaca que essa época privilegia relações entre grandezas na interpretação de fenômenos naturais. Portanto, eram estudadas funções particulares, representadas de diferentes formas: tabulações, linguagem natural, grandezas, "latitudes de formas", curvas geométricas. Rogalski (2013) também ressalta que as funções não eram ainda unificadas e formalizadas, pois não existiam símbolos para representá-las, o que se inicia apenas com Viète e Descartes. O autor também constrói seu levantamento histórico associado ao trabalho de Youschkevitch (1976 apud OLIVEIRA, 1997) e destaca que, mesmo com muitos exemplos que possam indicar resquícios de dependência funcional, não havia, na Antiguidade, indícios de pensamento que contemplasse as relações de variável e, por consequência, de Função.

10.34019/2594-4673.

A ideia de variável é uma das que compõem do conceito de Função e, a esse respeito, Guimarães (2010) argumenta que não é prudente afirmar que havia a formação do conceito nos tabletes egípcios quando estes usavam a ideia de correspondência. Alguns autores, portanto, não admitem que ideias rudimentares possam auxiliar no desenvolvimento do conceito de Função. De qualquer forma, admitimos que o instinto de funcionalidade já estivesse presente há muito tempo.

De fato, a ideia de variável dá ao conceito uma amplitude inimaginável, mas defendemos que o próprio desenvolvimento matemático e algébrico contribuiu para sua evolução. No período da Antiguidade, portanto, vemos a presença das ideias de dependência, correspondência e regularidade, o que nos faz acreditar em uma espécie de instinto funcional já por volta de 2000 a.C.

A nosso ver, Caraça (2010) fornece uma abordagem muito conveniente a respeito da evolução do conceito de Função. O autor dá destaque para três ideias básicas: interdependência, fluência e regularidade. Segundo o autor, são elas que vão levar à construção desse conceito. Na próxima seção, ainda que maneira sucinta, pretendemos seguir o rumo histórico adotado pelo autor e, paralelamente, contextualizá-lo às outras fases indicadas por Youschkevich (1976 apud PELHO, 2003). Há, também, algumas considerações sobre o trabalho com as ideias básicas de Função no Ensino Fundamental.

AS NOÇÕES DE INTERDEPENDÊNCIA, FLUÊNCIA E REGULARIDADE

Caraça (2010) indica que o ser humano, desde os primórdios de sua existência, sentiu a necessidade de fazer previsões sobre os fenômenos naturais que o rondavam, uma vez que, a partir da previsão, é possível se precaver e tentar dominar a natureza. Contudo, há que considerar dois aspectos fundamentais da realidade em que o homem está inserido: a interdependência e a fluência.

Pela interdependência entende-se que todas as coisas do mundo estão interligadas, ou seja, dependem umas das outras. O mesmo autor (CARAÇA, 2010) cita como exemplo a análise de uma planta de determinada região. Verifica-se que, sobre ela, incidem vários aspectos e características. Pode-se citar o tipo de solo que favorece seu crescimento, os animais que dela se alimentam e aqueles que dela sobrevivem. Há ainda que se levar em conta os aspectos da região em que está inserida, de que forma o homem se aproveita de seu surgimento, sua posição numa cadeia de outras plantações e outros aspectos.

Já a noção de fluência está relacionada a um ciclo de evolução, de desenvolvimento, e pode ser encontrada no meio vegetal e animal, à exceção dos minerais. Assim, percebemos que os fenômenos se sucedem numa ordem de nascimento, crescimento e morte. A importância da interdependência e da fluência verifica-se no momento em que o pesquisador propõe-se a estudar determinado fenômeno.

Caraça (2010) explica que o fato de as coisas serem interdependentes e fluentes dificulta a análise de apenas um determinado aspecto. Para tanto, há que se tomar posse da noção de isolado. O isolado é, então, um recorte da realidade, já que torna inviável estudar tudo ao mesmo tempo. Porém, devido à fluência e desenvolvimento das coisas, até mesmo o isolado não está livre de mudanças, de evolução. A essa evolução dá-se o nome de Fenômeno Natural. O que se verifica, no entanto, é que há fenômenos regulares, ou seja, que se comportam de maneira idêntica, ao se preservarem suas condições iniciais. Essa característica é muito importante, uma vez que regularidade implica em repetição e, por sua vez, permite previsão, isto é, "[...] *repetir* e *prever* é fundamental para o homem na sua tarefa essencial de dominar a natureza. [...] Daqui resulta que uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da Natureza é a *procura de regularidades* dos fenômenos naturais" (CARAÇA, 2010, p. 112, *grifo do autor*).

Portanto, temos contato aqui com uma das ideias fundamentais de Função já mencionada na seção anterior: a de regularidade. Algumas considerações a respeito do trabalho com essa noção básica no Ensino Fundamental: a nosso ver, isso pode ser dar já nos primeiros anos do Ensino Fundamental. A partir do contato com certos padrões, o estudante pode desenvolver a habilidade de previsão, ou seja, arriscar-se a apontar determinados resultados em algumas sequências de maneira intuitiva e, a seguir, em termos matemáticos. A esse respeito, Tinoco (2009, p.6) destaca que "o reconhecimento de regularidades em situações reais, em sequências numéricas, ou padrões geométricos é uma habilidade essencial à construção do conceito de Função". Na última seção, faremos outras considerações a respeito dessas abordagens no ensino fundamental.

doi 10.34019/2594-4673.

REGULARIDADE E LEIS MATEMÁTICAS NA IDADE MÉDIA

A segunda etapa apontada por Youschkevich (1976 apud PELHO, 2003) para o desenvolvimento do conceito de Função é a Idade Média. Nessa época, as noções do conceito eram expressas sob forma geométrica e mecânica. Percebe-se que as leis matemáticas, nessa época, privilegiam descrições mecânicas e verbais. Nestes termos, podemos afirmar que a noção de regularidade sugere uma análise das suas leis de formação, cujo cerne está em outra ideia básica de Função, a generalização. Nesta seção, vamos ver de que forma as leis matemáticas foram evoluindo em conceito e em generalidade até chegar nos rumos de sua formalização matemática.

Caraça (2010) discorre sobre o longo processo que está por trás do passo que se deu entre a identificação de uma lei natural e sua generalização na linguagem matemática – nesse caso, a própria formalização do conceito de Função. Para isso, ele apresenta a descrição de Lei Natural. Essa concepção está relacionada à ideia de regularidade, ou seja, fenômenos naturais regulares são chamados, por Caraça (2010), de leis naturais.

Há leis qualitativas e leis quantitativas. As primeiras estão ligadas à variação de qualidade e as segundas, de quantidade. Primeiro, citemos um exemplo utilizado em nossas aulas, cujo objetivo é definir qualidade e quantidade a partir do seguinte questionamento: se consideramos duas circunferências A e B, com 3cm e 5cm de raio, respectivamente. Podemos afirmar que a circunferência A é mais circular que a circunferência B? Outra questão: podemos dizer que a circunferência A é maior que a circunferência B? O que possibilita uma discussão sobre qualidade e quantidade, a saber: a característica da curvatura é relativa ao juízo de qualidade. Há qualidades que não nos permitem admitir graus diferentes de intensidade. Outras, contudo, permitem que façamos juízos de mais que*,* menos que*,* maior que e menor que. Assim, diz-se que esses casos admitem variação segundo a quantidade.

Continuando a discussão em torno da proposta de Caraça (2010), consideramos ainda exemplos sobre qualitativo e quantitativo para leis da Física, a saber: “cada planeta descreve em torno do Sol uma elipse, da qual o Sol ocupa um dos focos (1ª lei de Kepler)” (CARAÇA, 2010, p.113). Nesse caso, temos uma Lei qualitativa*.* Vejamos outro exemplo: “para todo gás existe uma temperatura, chamada temperatura crítica, acima da qual ele não pode ser liquefeito; logo que a temperatura desça abaixo da temperatura crítica, o gás pode liquefazer-se,

doi 10.34019/2594-4673.

submetendo-o a uma pressão conveniente" (CARAÇA, 2010, p.113). Aqui, um exemplo de Lei qualitativa – quantitativa. E, finalmente, "Para todo o corpo em queda livre no vácuo, as alturas de queda são diretamente proporcionais aos quadrados dos tempos de queda" (CARAÇA, 2010, p.113). Nesse último enunciado, tem-se uma Lei quantitativa.

Caraça (2010) chama a atenção para o fato de o desenvolvimento da Ciência estar diretamente ligado à atenção dada às leis quantitativas. Segundo ele, durante um tempo, os homens prenderam-se a explicações qualitativas dos fenômenos. A partir do Renascimento, contudo, os estudiosos deram "[...] novo rumo à barca da Ciência, dedicando-se à *observação* e *experimentação*, procurando *medir*, tentando explicar por variações de quantidade, tecendo uma teia de leis quantitativas" (CARAÇA, 2010, p.117, *grifo do autor*). A matematização dessas leis, como veremos a seguir, é o conceito formalizado de Função que ora conhecemos. Julgamos, contudo, que apontar esses fatos históricos contribui para a exaltação da grandeza do conceito de Função no seio da Matemática, uma vez que o caráter qualitativo das leis da Física consideradas anteriormente é que permite compreender a ideia de variação que são exploradas matematicamente por meio de representações algébricas, ou ainda, como relação entre quantidades representativas de grandezas. Caraça (2010) explica que

> [...] o rumo novo da Ciência, que a nova sociedade determina e vemos formulado nos escritos de *da Vinci*, é o rumo duma *ordenação matemática* do Universo. [...] Veja portanto o leitor como, ao cabo de 20 séculos, renasce das cinzas, onde parecia enterrado para sempre, aquele ideal de *ordenação matemática quantitativa* que víramos despontar com os pitagóricos. (CARAÇA, 2010, p.190, *grifo do autor*).

As leis matemáticas trazem, portanto, rudimentos de regularidade, generalização e, até mesmo, da noção de variável. Caraça (2010) destaca uma ordenação matemática dessas leis o que, indubitavelmente, indica uma aproximação à generalização formal do conceito de Função. Assim, fizemos, até aqui, uma incursão nos períodos da Antiguidade e da Idade Média. Na próxima seção, vamos explorar o desenvolvimento o conceito de Função no período moderno.

O PERÍODO MODERNO E A IDEIA DE GENERALIZAÇÃO

Percebemos que houve um longo período na história em que as leis qualitativas imperavam em uma "[...] tendência para fugir de tudo aquilo que viesse ligado às concepções quantitativas e dinâmicas [...]" (CARAÇA, 2010, p.185). Com efeito, Oliveira (1997) indica que Nicole Oresme (1323-1382) pode ser considerado o precursor da representação gráfica de

10.34019/2594-4673.

uma Função. Seu objetivo era representar intensidades de uma determinada característica, por meio de segmentos, ou seja, uma figura geométrica ilustrava as intensidades de uma qualidade, por exemplo, das velocidades. A autora destaca que essas representações podem ser consideradas um passo em direção ao conceito de Função, contudo, Oresme utilizava descrições imaginárias e qualitativas, tendo em vista que ele não utilizava medidas.

A partir do século XI, Caraça (2010) indica que a Europa assiste a uma grande transformação que foi provocada, principalmente, pelo desenvolvimento das primeiras cidades. Tal fato fez surgir uma nova sociedade, com a criação de uma classe nova de indivíduos, a qual impôs à Filosofia e à Ciência um novo rumo.

> As necessidades do Comércio e da Indústria exigem um estudo do mundo exterior tal como ele se nos apresenta. [...] Os problemas da navegação, por exemplo, levam a uma investigação cada vez mais cuidadosa dos movimentos dos astros e, duma maneira geral, exigem um estudo mais rigoroso do movimento, um estudo *quantitativo*, que permita *medir* e *prever*. (CARAÇA, 2010, p.187, *grifo do autor*).

Para matematização das leis matemáticas, Pelho (2003) afirma que Galileu Galilei (1564-1642) deu um tratamento quantitativo às representações gráficas, uma vez que as relações funcionais eram expressas em palavras e em linguagem de proporção. Galileu estudou o movimento dos corpos e, com o desenvolvimento do simbolismo algébrico de sua época, determinou a equação do movimento uniformemente acelerado. Ele procurou quantificar as leis que observava e estudava. Segundo Garbi (2010), Galileu foi um convicto defensor de que o Universo obedece a leis matemáticas. Chegamos, portanto, à terceira e última fase do desenvolvimento do conceito de Função corresponde ao Período Moderno, segundo Youschkevich (1976 apud OLIVEIRA, 1997).

No final do século XVI e durante o século XVII, começaram a prevalecer as expressões analíticas, o que, segundo mesmo autor, conferiu ao conceito de Função um lugar de destaque nas ciências exatas e revolucionou a Matemática. Essa transição entre a idade média e o período moderno é marcada, portanto, pelo conflito entre as leis matemáticas qualitativas e as quantitativas. Das ideias básicas do conceito que viemos destacando, é a ideia de generalização que carrega consigo um passado que traz embutidas essas noções de leis qualitativas e quantitativas. A generalização é, portanto, a ideia que está em uma zona de conflito. Ela acompanhou a gênese do conceito, quando ainda era rudimentar, informal, e está presente também em sua formalização.

É verdade que a generalização das leis quantitativas em termos matemáticos, simbólicos, algébricos, deu-se de maneira lenta na história. Mas somente a partir desse feito é que o conceito de Função adquiriu uma formalização que, segundo Youschkevich (1976 apud PELHO, 2003), revolucionou a Matemática devido à sua eficácia e fez com que Função assumisse um lugar de destaque no meio das ciências exatas. O desenvolvimento da álgebra simbólica foi, portanto, fundamental para a expressão das leis em termos quantitativos. Para Eves (2008), o simbolismo matemático teve um bom incremento no século XVI. Assim, "o campo estava preparado para os notáveis avanços do próximo século" (EVES, 2008, p.314).

De fato, a ideia de generalização pode revelar o passado tortuoso do conceito de Função. A partir do instante em que há a formalização, teremos contato com outras ideias que compõem o conceito: variável, correspondência (de variável) e dependência variacional. Essas ideias embasam o conceito, quando já está formalizado. Vejamos, brevemente, como isso aconteceu.

A IDEIA DE VARIÁVEL E A FORMALIZAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Caraça (2010) destaca a necessidade da existência de um instrumento matemático adequado ao estudo das leis quantitativas. Contudo, segundo o autor, tal feito não se deu de maneira linear. Ou seja, "deu-se uma gestação lenta em que necessidade e instrumento interactuaram, ajudando-se e esclarecendo-se mutuamente" (CARAÇA, 2010, p.118). Podemos afirmar que as condições históricas do momento não favoreciam o desenvolvimento das ideias básicas de Função ligadas à sua formalização. Não vamos nos estender em questões históricas mais profundas, mas cabe aqui apontar pequenas notas que possam mostrar, ainda que de maneira muito breve, o contexto desse desenvolvimento.

De acordo com Caraça (2010), a Ciência e a Filosofia gregas impuseram algumas limitações ao pensamento da época, do século V para o século IV a.C. Tais limitações estavam ligadas à "[...] rejeição do *devir* como base duma explicação racional do mundo; rejeição do *manual* e do *mecânico* para fora do domínio da Cultura" (CARAÇA, 2010, p.180, *grifo do autor*). Assim, era impraticável a existência da ideia de variável na sociedade, uma vez que essa noção possui, segundo o autor, uma natureza contraditória, pois é e não é ao mesmo tempo. Disso, resulta, como já mostramos brevemente, a abordagem qualitativa dos fenômenos

10.34019/2594-4673.

naturais, devido à “[...] incapacidade da ciência grega para construir o conceito de Função [...]” (CARAÇA, 2010, p.180). E o mesmo autor reitera que:

> Estas características vão manter-se durante quase duas dezenas de séculos na Europa. O seu reinado só devia terminar quando uma sociedade nova, dominada por uma classe nova, portadora de interesses e problemas novos, impusesse à Filosofia e à Ciência um rumo diferente (CARAÇA, 2010, p.186).

A ideia de variável aparece, portanto, como basilar para a formalização do conceito. Antes dela, temos contato com aspectos rudimentares, ou seja, aqueles que compõem a noção de Função, mas, ao mesmo tempo, não dão conta de formalizá-la em termos matemáticos. Assim, poderíamos dizer que o instrumento ainda está, de certa forma, incompleto, pois não se tem contato com suas grandiosas ferramentas. Somente a partir do século XI, a sociedade dá sinais de que uma grande transformação estava por vir. Portanto, a introdução dessa ideia – de variável – foi fundamental para o desenvolvimento da noção de Função.

De fato, para Caraça (2010), há que se criar um instrumento matemático que seja suficiente para estudar as variações de quantidade descritas nas leis quantitativas. Para isso, o autor aponta como tais leis podem ser traduzidas: é pela forma como as grandezas se correspondem. O autor cita o exemplo da queda de corpos no vácuo, e apresenta uma tabela que, segundo sua concepção, dá apenas uma ideia da referida lei (Tabela 1).

Tabela 1 - Valores para a lei da queda de corpos no vácuo.

Tempos (em segundos)	0	1	2	3	4	5
Espaços(em metros)	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5

Fonte: Caraça, 2010, p.118.

Caraça (2010) mostra-nos, na Tabela 1, dois conjuntos postos em correspondência. Nesse contexto, a lei da queda dos corpos no vácuo está em correspondência entre o conjunto <u>tempo</u> e o conjunto <u>espaço</u>. O instrumento matemático apropriado ao estudo das leis quantitativas deve conter, essencialmente, a correspondência entre dois conjuntos.

Aparece-nos, portanto, mais uma ideia básica associada ao conceito de Função: a correspondência. Caraça (2010) faz uma observação interessante, em relação à correspondência, e julgamos pertinente destacar o seu argumento:

> Está o leitor notando que novamente nos aparece, no seio desta questão vital para a Ciência, aquele maravilhoso instrumento da *correspondência* que nos surgiu logo no conceito de número natural [...]? Como tudo isto, afinal, é simples! (CARAÇA, 2010, p.119, *grifo do autor*).

Cabe destacar que a ideia de correspondência, ligada ao conceito de Função, está relacionada à correspondência de variáveis, ou seja, para formalizar o conceito ainda é necessário desenvolver outra noção básica, a de variáveis. Contudo, acreditamos na importância do desenvolvimento da noção de correspondência, ainda que não esteja ligada, diretamente, às variáveis. Conforme vimos em Caraça (2010), o próprio ato de contar pressupõe-se que seja a associação de um objeto a um número. Ou seja, essa situação não encontra relação com variável, mas, a nosso ver, é basilar para o desenvolvimento da correspondência variacional.

A ideia de variável aparece como artifício para o aperfeiçoamento da formalização do conceito. Assim, é necessária a criação de uma representação simbólica para os conjuntos que serão correspondidos, do contrário "[...] teríamos sempre que estar pegados a tabelas de resultados particulares e não obteríamos a generalidade conveniente" (CARAÇA, 2010, p.119).

Autores como Caraça (2010), Pavan (2010) e Tinoco (2009) citam que a ideia de variável é uma das noções de maior obstáculo na compreensão do conceito de Função pelos estudantes. Tal fato estaria ligado à própria noção de variável, pois "é um número qualquer de determinado conjunto, mas não é especificamente nenhum dos números desse conjunto" (TINOCO, 2009, p.5). Santos (2004) também diz que, devido à representação das variáveis acontecer em forma de letras, os obstáculos dos estudantes são ainda maiores, pois equações, expressões algébricas e funções admitem o contato com a álgebra de formas totalmente diferentes.

Retornando aos aspectos matemáticos da ideia dentro do conceito de Função, a variável é o símbolo que representa qualquer um dos elementos de um conjunto; é, assim, uma entidade de natureza superior, ou seja, é o símbolo da vida coletiva do conjunto (CARAÇA, 2010).

A ideia de variável formaliza o conceito de Função, o qual se revela o instrumento próprio para o estudo das leis quantitativas. O exemplo anterior da lei da queda dos corpos consiste na correspondência entre o conjunto dos tempos e o conjunto dos espaços. Se t é a variável do conjunto dos tempos e e a variável do conjunto dos espaços, a lei consiste numa correspondência entre t e e. Assim, a variável e é Função da variável t. Simbolicamente: $e = f(t)$, sendo t, a variável independente; e e,dependente.

Na Tabela 1, apresentada anteriormente, observamos apenas alguns pares de valores da lei da queda dos corpos, enquanto $e = f(t)$ implica que qualquer valor de t corresponde a um valor (e um só) de e.

Segue a definição de Função dada por Caraça (2010):

Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é Função de x e escreve-se ***y = f(x)*** *se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido* $x \rightarrow y$.

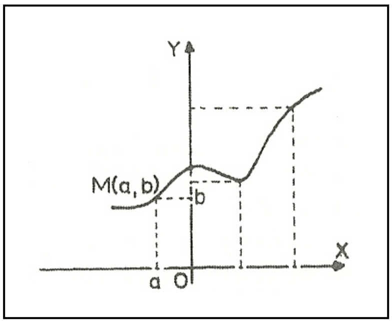
Para **x,** chama-se variável independente e **y,** variável dependente.

O autor chama a atenção para o fato de a expressão matemática do conceito (neste caso, $e=f(t)$) permitir a seguinte afirmativa: para qualquer valor de t corresponde um (e só um) de e, ao passo que as tabelas apresentam apenas alguns pares dos valores da correspondência. Essa noção, para Caraça (2010), é um exemplo do poder que o conceito de Função traz em si.

A partir das ideias básicas de Função, chega-se a um nível de formalização matemática que nos leva a lidar com expressões analíticas, descrevendo as leis quantitativas. Assim, ainda no exemplo dado sobre a queda dos corpos no vácuo, a expressão que representa essa lei é $y=4,9x^2$. Para Caraça (2010), a lei de associação entre as duas variáveis fecha a cadeia: lei quantitativa – Função – definição analítica. Mas o autor ainda destaca que essa não é a única forma de estabelecer a correspondência entre as duas variáveis, já que, muitas vezes, o conceito de Função é inapropriadamente confundido com o de expressão analítica, e salienta que esse é apenas o terreno em que a Função vai nutrir-se (CARAÇA, 2010), mas pode-se dar uma interpretação geométrica ao conjunto dos pontos.

A imagem geométrica de uma Função (Figura 1) corresponde ao conjunto de pontos do plano, tal que, a cada valor a de x corresponda um, e um só valor b de y, de modo que possamos construir o ponto $M(a, b)$ no plano cartesiano. Assim, qualquer que seja o modo de definição de uma Função, fato é que será possível construir uma imagem geométrica, e essa imagem é o conjunto de pontos do plano, tratando-se, portanto, em nossa investigação, de funções de uma variável real a valores reais.

Figura 1 - Imagem geométrica de uma Função de uma variável real a valores reais.



Fonte: Caraça, 2010, p.127

A imagem geométrica é a tradução da expressão analítica para o campo geométrico. Portanto, o conceito de Função permitiu que se fizesse uma correspondência entre as expressões analíticas e seu lugar geométrico, ou seja, é o instrumento que unificou dois campos, os quais, segundo Caraça (2010), foram considerados separados por quase vinte séculos.

Assim, beneficiado pelo simbolismo e por meio de expressivo caráter geométrico, René Descartes (1596-1650) declarou que uma equação de duas variáveis "[...] indica uma relação de dependência entre quantidades variáveis" (GUIMARÃES, 2010, p.22). Zuffi (2001 apud RODRIGUES, 2007, p.27) reitera que Descartes "estabeleceu uma relação de dependência entre quantidades variáveis, utilizando uma equação em x e y, possibilitando o cálculo de valores de uma variável a partir dos valores da outra".

Partindo desse contexto, nota-se que a definição matemática de Função pela noção de correspondência entre variáveis implica ideia de dependência, uma vez que uma das variáveis é dependente da outra. Tinoco (2009) salienta que a ideia de dependência deve surgir lentamente no desenvolvimento do conceito, de modo que o professor possa explicitá-la, naturalmente, até o final do processo, aos estudantes. Dessa forma, trabalhando com essa ideia, Pavan (2010) sugere que:

> Para fortalecer a ideia de Função como relação de dependência entre duas variáveis, é importante propor aos alunos problemas com duas variáveis, nos quais se peça a determinação do valor de uma em Função da outra. Ex: o preço que se tem de pagar por certa mercadoria é feito de acordo com a quantidade de mercadoria que se compra. Assim, o preço depende da quantidade (peso), logo o preço é Função da quantidade (PAVAN, 2010, p.25).

Apesar de tratarmos aqui da ideia de dependência após a formalização do conceito em termos matemáticos, Rodrigues (2007) destaca que essa noção já estava presente na

Antiguidade, conforme afirmamos anteriormente, ainda que as ideias não fossem generalizadas de maneira formal, tendo em vista que não havia a noção de variável. Boyer (1986, p.25) diz que “as relações de dependência entre duas grandezas já tinham sido percebidas e registradas na Antiguidade”.

A respeito da matematização do conceito, Isaac Newton (1643-1727), já no século XVIII, introduziu o termo “variável independente” (SÁ *et al*, 2003, p.6), e Leibniz (1646-1716) parece ter utilizado a palavra “Função”, pela primeira vez, em um de seus manuscritos de 1673 (EVES, 2008). Ainda em relação à formalização, Caraça (2010) afirma que, durante algum tempo, definiu-se Função a partir das expressões analíticas que descreviam a correspondência entre as duas variáveis. De fato, Sá e outros (2003, p.136) indicam que o matemático Johan Bernoulli, em 1718, definiu Função como “Função de uma magnitude variável à quantidade composta de alguma forma por esta magnitude variável e por constantes”. Logo a seguir, Leonhard Euler (1707-1783) “[...] considerou uma Função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes” (EVES, 2008, p.661).

Caraça (2010) aponta que relacionar Função à sua expressão analítica prevaleceu durante muito tempo e ainda hoje está impregnada na linguagem. Contudo, o mesmo autor mostra que houve a necessidade da depuração do conceito, de modo que se evidenciasse o que ele interpreta como essencial na noção de Função: a correspondência das duas variáveis. Sá e outros (2003, p.138) mostram que, em 1837, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) definiu Função como: “Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é Função da variável independente x”. Zuffi (2001 apud PELHO 2003, p.21), por sua vez, diz que “essa definição é bastante próxima daquelas encontradas nos livros didáticos atuais, além de ter sido muito usada até meados do século XX, sendo generalizada por Nicolas Bourbaki, em 1968”.

Eves (2008) também destaca o fato de o conceito de Função ter passado por evoluções acentuadas. Segundo o autor, “a história do termo *Função* proporciona [...] exemplo interessante da tendência dos matemáticos de generalizar e ampliar os conceitos” (EVES, 2008, p.660, *grifo do autor*). Com efeito, percebemos que, a partir do instante em que o conceito foi formalizado, houve uma depuração cada vez maior da simbologia matemática que o define da maneira como é apresentado ao estudante; é apenas o último capítulo de uma história que acompanhou a própria evolução das Ciências e do pensamento matemático.

Para encerrar, Rodrigues (2007) mostra que, no século XX, a teoria dos conjuntos ampliou a formalização de Função, abrangendo relações entre dois conjuntos de elementos. Assim, Função é definida como “[...] um certo subconjunto do produto cartesiano A x B, o que nada mais é do que a definição de Função como um conjunto de pares ordenados” (OLIVEIRA, 1997, p.22). Rodrigues (2007) considera, ainda, que o conceito de Função evoluiu em três etapas, de forma que, primeiramente, houve a definição em forma de dependência entre variáveis; a seguir, como expressão analítica; e, finalmente, como relação entre conjuntos. Compactuamos com a ideia do autor e, a nosso ver, essas fases já estão presentes no Período Moderno defendido por Youschkevich (1976 apud OLIVEIRA, 1997).

O TRABALHO COM IDEIAS BÁSICAS DE FUNÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Santos e outros (2004) defendem a ideia de que a regularidade pode ser trabalhada desde a Educação Infantil.

> A ideia de relações funcionais inicialmente deve ser desenvolvida na pré-escola e nas séries iniciais do ensino fundamental, através da observação de regularidades em eventos, formas, composições e conjuntos numéricos. Nas sequências, os alunos, além de descrever, entender, analisar, criar e relacionar uma variedade de padrões, devem representá-los analiticamente, através de letras, em expressões algébricas e equações. As representações gráficas em tabelas, em diferentes tipos de gráficos e diagramas, devem acompanhar todo o percurso da construção do conceito (SANTOS *et al*., 2004, p.6).

A regularidade é ainda indicada por Souza e Diniz (2008) como um contributo para o estudo da Álgebra. A esse respeito, as autoras defendem que observar regularidades a partir de sequências e padrões “[...] parece especialmente interessante, pois permite que as letras surjam de modo natural como variáveis propriamente ditas. Além disso, essa abordagem possibilita o trabalho informal com o conceito de funções [...]” (SOUZA; DINIZ, 2008, p.11). Percebe-se que as autoras buscam um trabalho que alcance outra ideia básica de Função: a variável, que será analisada logo a seguir, partindo da observação de sequências regulares e padrões.

No caso da questão algébrica, Trindade e Moretti (2000) fazem um interessante exame sobre a espécie de “simbiose” que há entre Função e Álgebra.

> Se por um lado, a falta de certa familiaridade com a álgebra dificulta ou até mesmo inviabiliza o conhecimento de funções, por outro, saber algébrico acompanhado da

10.34019/2594-4673.

> crença na força de álgebra para resolver quase automaticamente muitos tipos de problemas, pode ser um *impedimento ao entendimento do conceito geral de Função,* como mostra a História da Matemática (TRINDADE; MORETTI, 2000, p.42, *grifo nosso*).

Os autores esclarecem que esse impedimento na compreensão do conceito de Função está ligado, historicamente, a um destaque dado à Álgebra ocorrida nos séculos XVII e XVIII, o que proporcionou a visão de que somente as relações que pudessem ser escritas sob a forma de expressão analítica eram denominadas Função. Nesse sentido, inferimos que uma abordagem excessivamente técnica e mecânica é um empecilho ao entendimento do conceito, ainda que, com isso, não estejamos abandonando o poder subjacente à questão algébrica no campo da Função. Não se trata de privilegiar um campo em detrimento do outro, mas de analisar o impacto que visões polarizadas somente na Álgebra e na Função podem causar.

Assim, notamos que essa fragilidade no ensino de Função é uma questão que não pode passar despercebida pelo professor. Ao mesmo tempo em que a álgebra formaliza o conceito de Função, devemos pensar que uma abordagem que privilegie apenas o caráter algébrico impede a compreensão das ideias centrais que compõem o conceito. Nessa direção, Castro e Rodrigues (2011, p.12) chamam de "zona de confluência de ideias" esses dois tipos de pensamentos, o algébrico e o funcional. Segundo as autoras, "[...] o pensamento funcional, em suas bases mais primárias, auxiliando o desenvolvimento do raciocínio algébrico e a própria álgebra incumbindo-se de formalizar o pensamento funcional contribuindo, assim, para a abstração do conceito de Função (CASTRO; RODRIGUES, 2011, p.12).

Inferimos que trabalhar essas noções na Educação Básica implica oportunizar aos estudantes que manifestem seu pensamento generalizado, seja em termos simbólicos matemáticos, seja na linguagem materna, já que a própria evolução do conceito assistiu a esse feito. Tinoco (2002 apud PAVAN, 2010, p.26) considera que é importante o estudante ter contato "[...] com as diversas formas de representar funções: verbal (em palavras, oralmente ou por escrito), gráfica (gráficos formais e informais, tabelas) e analítica (por expressões matemáticas)", o que, segundo Pavan (2010), facilita o desenvolvimento das noções de generalização. Santos e outros (2004) confirmam esse argumento, quando diz que é

> [...] preciso que os alunos desenvolvam a capacidade de apresentar argumentos na linguagem corrente, que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, realizando diferentes representações e concluindo esta etapa com o registro das leis em linguagem algébrica, o que é decisivo para a construção do conceito de Função. (SANTOS *et al*, 2004, p.9)

Os autores concluem que o registro, em termos algébricos das leis, é passo importante para a construção do conceito. Concordamos com essa ideia, mas defendemos uma prática que valorize, ainda mais, a transição da linguagem materna para a matemática, para que os estudantes tenham a oportunidade de conjecturar e de testar suas hipóteses.

Trabalhar, portanto, a ideia de generalização na escola implica em duas situações: lidar com as concepções em linguagem materna dos estudantes e/ou com a generalização em termos matemáticos. Nesse último caso, parece-nos, indubitavelmente, a questão algébrica. Conforme afirmado anteriormente, é prudente tecer alguns comentários sobre a forma como a Álgebra articula-se com as ideias básicas de Função, ainda que de forma breve.

Nesse contexto, Trindade e Moretti (2000) alegam que o conceito de Função deve surgir após um trabalho feito a partir de representações numéricas e gráficas:

> É óbvio que o estudo analítico de funções continua, naturalmente, a ser importante, mas ele deve surgir com base em atividades, sistematicamente feitas a partir das representações numéricas e gráficas. Dessa forma, a expressão algébrica adquire significado próprio. Trata-se de *primeiro desenvolver o conceito intuitivo de Função, para depois formalizá-lo*. (TRINDADE; MORETTI, 2000, p.44, *grifo nosso*).

Observamos o cuidado que os autores têm ao citar a importância do trabalho com noções básicas de Função, antes de sua formalização.

> Da mesma forma que as demais representações, as representações algébricas têm um papel essencial na construção do conceito de Função. Elas não só produzem um resumo de um grande número de dados, mas, mais importante que isso, elas conduzem à noção de uma "regra" bem melhor do que as representações numéricas ou gráficas (TRINDADE; MORETTI, 2000, p.45).

Para finalizar, o Quadro 1 seguinte, destaca os três períodos históricos abordados nesta discussão e as ideias básicas de Função correspondentes.

Quadro 1 – Evolução do conceito de Função

IDEIAS BÁSICAS DE FUNÇÃO	ALGUNS APONTAMENTOS HISTÓRICOS	PERÍODO DE ACORDO COM YOUSCHKEVICH
- Dependência Funcional - Correspondência - Regularidade	- Babilônios e Egípcios utilizavam tabelas de correspondência por volta de 2000 a.C. - Instinto funcional.	Antiguidade

doi 10.34019/2594-4673.

<table>
<tr><td rowspan="2">Generalização</td><td>Qualitativa</td><td>-Descrições verbais das leis.
-Rejeição do manual e do mecânico.
- Nicole Oresme (1323-1382) utilizou descrições qualitativas ao representar, graficamente, intensidades por meio de segmentos.</td><td>Idade Média</td></tr>
<tr><td>Quantitativa</td><td rowspan="2">-Galileu Galilei (1564-1642) dá um tratamento quantitativo às leis matemáticas.
- René Descartes (1596-1650) estabelece uma relação de dependência entre as variáveis.
- Isaac Newton (1643-1727) introduz o termo variável independente.
- Leibniz (1646-1716) utiliza a palavra “Função”.
- Johan Bernoulli (1667-1748) e Leonhard Euler (1707-1783) utilizam expressões analíticas para definir Função.
-Depuração do conceito, a partir do século XX, através da relação entre conjuntos.</td><td rowspan="2">Período Moderno</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Correspondência de variáveis
- Variável
- Dependência variacional</td></tr>
</table>

Fonte: Dados do estudo.

Ainda em destaque o Quadro 1, chamamos a atenção para a noção de generalização e como ela se relaciona com as leis matemáticas quantitativas e qualitativas, na visão de Caraça (2010). Atente-se, ainda, que essa ideia está numa região de transição: entre a idade média e o período moderno. Desta feita, pontuamos alguns fatos históricos que de forma alguma substituem a exposição historiográfica realizada até aqui.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi apresentar, em cunho historiográfico, de que forma o conceito de Função evoluiu por meio de algumas ideias básicas. A partir de três fases históricas, de acordo com Youschkevich (1976 apud PELHO, 2003), discorremos sobre as ideias fundamentais: dependência funcional, correspondência, regularidade, generalização e variável.

Optamos pela abordagem de Caraça (2010) pois, a nosso ver, o autor descreve muito bem como se deu a passagem das leis matemáticas qualitativas para as quantitativas. Essa transição foi basilar para a evolução do conceito de Função. Além disso, essa exposição mostra como a ideia de generalização parece ter um local de destaque, pois parece fazer a ligação entre as duas fases do conceito: pré e pós formalização matemática.

As considerações que fizemos a respeito da abordagem dessas ideias no Ensino Fundamental têm o objetivo de pontuar algumas pesquisas e práticas que são desenvolvidas a partir dessas ideias básicas. Acreditamos que essas abordagens podem suscitar o interesse no tema e o desenvolvimento de outros trabalhos nessa mesma vertente.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**.Trad. Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1986.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2010.

CASTRO, K. **Ideias e conceitos básicos de Função no 7º ano do ensino fundamental:** possibilidades e desafios. (2012) Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Severino Sombra. Vassouras, RJ, 2012.

CASTRO, K. O; RODRIGUES, C. K. O pensamento e o raciocínio algébrico no estudo de Função na educação básica. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13, 2011, Recife. **Anais eletrônicos...** Recife: UFPE, 2011. Disponível em <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/XIIICIAEM/>. Acesso em: 23 out. 2011.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas-SP: Unicamp, 2008.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GUIMARÃES, R. S. **Atividades para aprendizagem do conceito matemático de Função**. São Carlos. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos.

OLIVEIRA, N. **Conceito de Função**: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. São Paulo, 1997. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PAVAN, L. R. **A mobilização das ideias básicas do conceito de Função por crianças da 4ª série do ensino fundamental em situações-problema de estruturas aditivas e/ou multiplicativas**. Maringá, 2010. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a

10.34019/2594-4673.

Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá.

PELHO, E. B. B. **Introdução ao conceito de Função**: a importância da compreensão das variáveis. São Paulo, 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

RODRIGUES, M. U. **Narrativas no ensino de funções por meio de investigações matemáticas.** Rio Claro, 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista.

ROGALSKI, M. Quelques points sur l'histoire et l'epistemologie des fonctions, pouvant et clairer certain es questions didactiques sur leur enseignement. **JIEM; IJSME**. v.6(1), 2013.

SÁ *et al*. A construção do conceito de Função: alguns dados históricos. **Traços**, v.6, n.11, p. 123-140, ago, 2003.

SANTOS *et al*. A construção do conceito de Função no Ensino Fundamental. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Recife. **Anais eletrônicos...** Recife: UFPE, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/Index.htm>. Acesso em: 11 jul. 2011.

SOUZA, E.R.; DINIZ, M. I. S. V. **Álgebra**: das variáveis às equações e funções. São Paulo: CAEM/IME-USP, 2008.

TINOCO, L. A. A. (Coord.). **Construindo o Conceito de Função**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática / UFRJ, 2009.

TRINDADE, J. A. O.; MORETTI, M. T. Uma relação entre a teoria histórico-cultural e a epistemologia histórico-crítica no ensino de Funções: a mediação. **ZETETIKÉ**. v.8, n. 13-14, p. 29-50, jan.dez. 2000.

HISTÓRICO

Submetido: 05 de novembro de 2021.
Aprovado: 10 de março de 2022.
Publicado: 05 de abril de 2022.