



A compreensão de números e operações numéricas no sistema de numeração decimal como referência para a prática pedagógica

The understanding of numbers and number operations in the decimal numbering system as reference for pedagogical practice

Raquel Gomes de Oliveira¹

Faculdade de Ciências e Tecnologia – FCT – UNESP

Caique Alves do Nascimento²

Faculdade de Ciências e Tecnologia – FCT UNESP

Resumo

Alunos do 6º ano da Educação Básica têm demonstrado desempenhos insatisfatórios quanto à aprendizagem e à consolidação de conceitos e operações matemáticas relacionadas ao Sistema de Numeração Decimal (SND), que nos levaram a realizar uma pesquisa com o objetivo de analisar dificuldades apresentadas por alunos de 6º ano no desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas ao domínio de propriedades do SND, às ideias subentendidas nas operações de adição, multiplicação, subtração e divisão e aos seus respectivos algoritmos. As ações metodológicas caracterizam uma pesquisa de métodos mistos concomitantes. Os resultados mostraram que dificuldades relacionadas ao Sistema de Numeração Decimal demonstradas por esses alunos são maiores para a utilização de algoritmos quando comparadas com aquelas para identificar a operação matemática a que se referem. Concluímos que dificuldades demonstradas com algoritmos, em sua maioria, expressaram a não consolidação, por esses alunos de 6º ano, da aprendizagem sobre os conceitos de agrupamento e posicionalidade que compõem o Sistema de Numeração Decimal. Entendemos que estes resultados e conclusão possibilitam referenciar para a formação docente do professor de Matemática perspectivas para o ensino-aprendizagem de conceitos e operações relacionadas ao Sistema de Numeração Decimal e suas propriedades, dada importância de se consolidar esses conceitos curriculares tanto para a continuidade nos estudos, como para uma plena convivência social.

Palavras-chave: Currículo Escolar; Ensino-Aprendizagem, Sistema de Numeração Decimal.

Abstract

Students in the 6th grade of Basic Education have shown unsatisfactory performances regarding the learning and consolidation of mathematical concepts and operations related to the Decimal Numbering System (SND), which led us to conduct a research with the objective of analyzing difficulties presented by 6th grade students in the development of skills and abilities related to the domain of SND properties and the ideas implied in the operations of addition, multiplication, subtraction and division and their respective algorithms. The methodological actions characterize a concomitant mixed methods research. The results showed that difficulties related to the Decimal

¹ Doutora em Educação pela Faculdade de Educação da USP. Docente do Departamento de Educação e do Programa de Pós-Graduação em Educação da FCT-UNESP em Presidente Prudente, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Roberto Simonsen, 305, Presidente Prudente, São Paulo, Brasil, CEP: 19060-900. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0217-2629> Lattes: <http://lattes.cnpq.br/5507035725222959> E-mail: raquel.g.oliveira@unesp.br

² Licenciado em Matemática pela Faculdade de Ciências e Tecnologia – FCT – UNESP em Presidente Prudente, São Paulo, Brasil. Professor de Matemática em escolas de Educação Básica de Presidente Prudente, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Rua 12 de Outubro, 605, Presidente Prudente, São Paulo, Brasil, CEP: 19.020-520. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7521-1246>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/4381572266705772>. E-mail: caiquealvesnascimento@hotmail.com.

Numbering System, demonstrated by these students, are greater for the use of algorithms when compared to those for identifying the mathematical operation to which they refer. We conclude that difficulties demonstrated with algorithms, for the most part, expressed the non-consolidation, by these 6th grade students, of learning about the concepts of grouping and positionality that make up the Decimal Numbering System. So, we understand that these results and conclusion make it possible to refer perspectives for the teaching-learning of concepts and operations related to the Decimal Numbering System and its properties for the teacher education of Mathematics teachers, given the importance of consolidating these curricular concepts for the continuity of studies as for a full social coexistence.

Keywords: School Curriculum, Teaching and Learning, Decimal Numbering System.

Introdução

Conhecimentos, capacidades e atitudes necessários à plena inclusão social, ao utilizarem o pensamento lógico, a criatividade e intuição e a análise crítica para elaborar e adequadamente resolver problemas (BRASIL, 2017; SÃO PAULO, 2019) referenciaram e justificaram a realização da pesquisa que realizamos sobre o ensino-aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal (SND), na perspectiva de conhecimento curricular escolar com o qual se desenvolvem competências e habilidades gerais e específicas da Matemática (BRASIL, 2017; SÃO PAULO, 2019).

A pesquisa objetivou analisar dificuldades relacionadas às operações de adição, multiplicação, subtração e divisão realizadas no Sistema de Numeração Decimal e apresentadas por alunos de 6º ano da Educação Básica. Os resultados mostraram que dificuldades relacionadas a propriedades do SND são mais frequentes na utilização de algoritmos quando comparadas com aquelas para identificar a operação matemática a que se referem o que levou a concluir que essas dificuldades expressaram a não consolidação das ideias de agrupamento e posicionalidade que compõem o Sistema de Numeração Decimal

Fundamentação Teórica

Resultados de desempenhos de alunos em diferentes edições do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP, SÃO PAULO, 2007) permitem entender que alunos que concluíram os primeiros 5 anos do ensino fundamental chegam ao 6º ano demonstrando aprendizados insuficientes sobre Números, revelando dificuldades relativas quanto a este conteúdo, tais como: reconhecer as principais características do sistema decimal

(contagem, base e valor posicional); escrever um número natural em sua forma polinomial; relacionar a escrita numérica às regras do sistema posicional de numeração e resolver problemas que envolvam operações de adição, subtração, multiplicação e divisão em situações relacionadas a seus diferentes significados (SÃO PAULO, 2009).

O currículo escolar do Estado de São Paulo há tempos objetiva o desenvolvimento de competências, identificadas como “... modos de ser, de raciocinar e de interagir, que podem ser apreendidos das ações e das tomadas de decisão em contextos de problemas, de tarefas ou de atividades.” (CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO, 2011, p. 12).

Assim, as competências se estabelecem enquanto parâmetros que devem orientar aprendizagens com explícita prioridade à competência de leitura e escrita (CURRÍCULO DO ESTADO DE SÃO PAULO, 2011). Em diferentes linguagens e em todas as áreas do conhecimento, ler e escrever implicam coordenação de competências identificadas com as ações de observar, realizar e compreender, considerando-se que existem as competências do sujeito, as do objeto e aquelas ditas relacionais, que considera o campo de interações entre várias competências e os contextos de atuação (MACEDO, 2005; TEIXEIRA, 2007).

Nessa perspectiva, afirma-se a necessidade de oportunizar sistematicamente essas ações no ensino-aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal (SND), o que leva a entender igualmente necessária a elucidação de parâmetros para a compreensão das propriedades que regulam o SND e suas formas de representação.

Do conceito de sistema de numeração decimal e sua compreensão

O Como todo sistema de numeração, o Sistema de Numeração Decimal (SND) é resultado de construções humanas diante problemas a serem resolvidos e limitações a serem superadas (CARAÇA, 2003), tal como o cálculo operatório realizado no Sistema Romano.

Apesar do Sistema de Numeração Decimal pressupor o conceito de número, consolidado a partir da coordenação das operações lógicas de classificação (agrupamento de unidades) e seriação (ideia de antes de, depois de) (PIAGET, 1896 – 1980), não é certo que isto implique a compreensão de suas propriedades relativas à ideia de agrupamentos (classes e subclasses) e disposição em unidades superiores e inferiores (posicionalidade).

Para Lerner e Sadovsky (2001) a não compreensão do SND pelo aluno é um problema didático, porque dificuldades demonstradas por crianças para relacionarem agrupamentos à escrita numérica e aquelas relativas às ideias de “vai um” e de “pedir emprestado”, não se vinculavam à ideia de posicionalidade expressa nos conceitos sistematizados por meio de ordens de grandezas. Esta constatação levou que buscassem responder à questão: “Como é que as crianças se aproximam do conhecimento do Sistema de Numeração?”.

Ainda Lerner e Sadovsky (2001) descrevem e criticam propostas pedagógicas e seus recursos para “... materializar o agrupamento.” (p. 114), no sentido de que nesses recursos a compreensão do SND depende de sua transformação em outro sistema, o que nada contribui para a abstração da ideia de posicionalidade. Por exemplo, no ábaco, consideram como redundante a representação de uma quantidade numérica por unidades, dezenas, centenas..., porque esta representação pode ser feita com a representação escrita.

Por um lado, como vimos, a noção de agrupamento não é a origem da posicionalidade: as crianças descobrem esse princípio de maneira totalmente independente das ações de agrupar e reagrupar objetos, o elaboram a partir de sua ação intelectual sobre as escritas numéricas que as rodeiam. Por outro lado, para que apelar a uma tradução se a versão original está ao alcance da mão? (LERNER; SADOVSKY, 2001, p. 115).

A rejeição da relação entre notação numérica e ações de agrupar e reagrupar objetos leva a entender que o aluno poderá compreender as características do SND no trabalho pedagógico com a própria representação numérica, escrita e oral, dado que essas características do SND poderão ser formadas no percurso: utilização, reflexão e busca de regularidades (LERNER; SADOVSKY, 2001).

Logo, o ensino-aprendizagem do SND deve ser fundamentado em ações didáticas focadas na relação de ordem e em operações aritméticas, pressupondo que os alunos tenham oportunidade de buscar padrões e regularidades, agindo, refletindo e argumentando sobre suas ações, partilhando suas ideias na convivência com outros colegas, desenvolvendo autonomia.

Em outra perspectiva, mas igualmente sobre dificuldades para a consolidação do Sistema de Numeração Decimal e operações numéricas, a partir da ideia na qual “Não se deve confundir um número com sua representação escrita.” (VERGNAUD, 2009, p. 167), encontramos a distinção de um número através de planos em que pode ser apresentado: 1) plano dos objetos; 2) plano do conjunto dos objetos; 3) plano dos cardinais de conjuntos e 4) plano das representações escritas desse número (VERGNAUD, 2009).

No plano das representações, por exemplo, na escrita de um número evidencia-se “a regra da adição, que permite encontrar, a partir de dois números escritos em numeração de posição e em base dez, o número correspondente a sua soma (escrita igualmente em numeração de posição e em base dez).” (VERGNAUD, 2009, p. 168). Assim, concretiza-se o SND como um sistema também aditivo no qual agrupamentos em n elementos formam uma unidade imediatamente superior, ou seja, uma base numérica. O SND utiliza a base 10, possibilitando representar uma quantidade numérica pelo somatório da multiplicação de unidades de potências de 10. Por exemplo: $458 = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 8 = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$.

De acordo com Vergnaud (2009), a regra da adição se apoia nas operações internas a cada plano. No plano dos cardinais: a soma e no plano dos conjuntos: a união dos mesmos. Da mesma maneira, esta regra possibilita a passagem do plano do objeto ao plano dos conjuntos: o agrupamento; do plano dos conjuntos ao plano dos cardinais: a medida ou contagem e do plano dos cardinais ao plano das representações escritas: a escrita.

Logo, a aprendizagem da regra da adição necessita considerar, ao mesmo tempo, as aplicações, como homomorfismo entre os conjuntos dos diferentes planos. Como exemplo, a representação do cardinal da união dos conjuntos disjuntos A e B , aplicação denominada n , tem origem na composição das representações dos cardinais $n(a)$ e $n(b)$, respectivamente dos conjuntos A e B , ou seja, $n(A + B) = n(a) + n(b)$.

Essa composição é dada pela regra da adição, possibilitando a aprendizagem do sistema de numeração decimal “... quando o reagrupamento dos objetos em pacotes de dez, e dos pacotes de dez em pacotes de dez pacotes, etc... é colocado em paralelo com o código da numeração de posição (coluna das unidades, coluna das dezenas, coluna das centenas, etc.).” (VERGNAUD, 2009, p. 171).

Para Vergnaud (2009) duas relações caracterizam “O problema fundamental da aprendizagem da numeração e da regra da adição...” (p. 172), sendo estas: a relação entre o número escrito e quantidade que ele representa e a “relação entre a regra da adição e as operações que ela apresenta sobre os cardinais e sobre os conjuntos.” (p. 172).

Pressupostos de Vergnaud (2009) sobre a conceituação do SND, dada pela necessidade de se colocar, em paralelo, reagrupamentos de objetos e de conjuntos de objetos com o código

escrito, aliam-se à ideia de Duval (2010) sobre a origem de conceitos matemáticos implicar a passagem entre diferentes representações do mesmo conceito.

Nesse sentido, estabelecem-se como necessários processos de ensino que atentem para levar o aluno a compreender as relações sobre os objetos e conjuntos de objetos e suas correspondentes operações com símbolos numéricos (VERGNAUD, 2009, DUVAL, 2010).

Do contexto de desenvolvimento da pesquisa

Em 2018 realizamos uma pesquisa por métodos mistos e concomitantes (CRESWELL, 2019), sendo esta necessária na direção de ações metodológicas de um projeto de ensino de uma universidade pública paulista, que objetivava elaborar e implementar atividades pedagógicas para desenvolver e ampliar competências e habilidades associadas a números e operações no SND em alunos do 6º ano da Educação Básica.

Nesse sentido, a pesquisa foi realizada por um licenciando do 4º ano do curso de Matemática e por sua orientadora do projeto de ensino, objetivando analisar competências e habilidades relacionadas ao domínio de propriedades do SND, às ideias subentendidas nas operações de adição, multiplicação, subtração e divisão e aos seus respectivos algoritmos. A pesquisa foi aprovada por um Comitê de Ética, com Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE) nº 70173517.4.0000.5402.

Resultados da pesquisa e a consideração de alguns pressupostos da Metodologia da Teoria de Vida (WHITEHEAD, 2008), que subsidiam estratégias necessárias para a vivência do ciclo reflexão-ação: observar, refletir, agir, avaliar, modificar foram fundamentais para alcançar os objetivos do projeto de ensino.

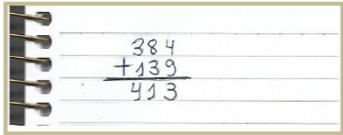
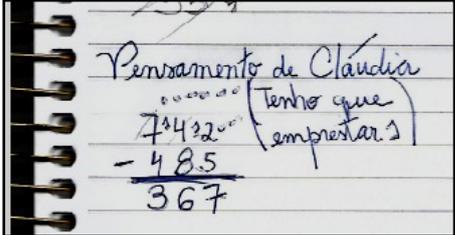
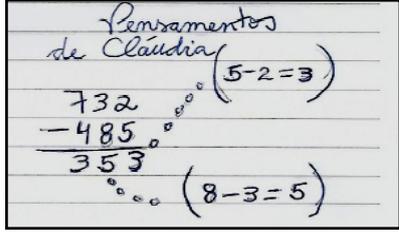
Das ações metodológicas

As ações metodológicas ocorreram a partir de pressupostos de uma pesquisa de concepção pragmática, caracterizada tanto pelo interesse em aplicações e na resolução do problema apresentado como pela orientação para a prática no mundo real (CRESWELL, 2010, p. 29). Como estratégia de pesquisa, procedemos a partir de dados mistos e coletados ao mesmo

tempo, por meio de uma avaliação diagnóstica, porque “... o pesquisador converge ou mistura dados quantitativos e qualitativos para realizar uma análise abrangente do problema de pesquisa. [...] e depois integra as informações na interpretação dos resultados gerais.” (CRESWELL, 2019, p. 39).

Os dados se identificaram com as respostas escritas e individuais de 25 alunos do 6º ano a uma avaliação diagnóstica composta por 8 questões. A questão 7 era formada por 9 itens. Na avaliação diagnóstica havia questões abertas e fechadas (Figuras 1 e 2), abordando competências e habilidades relacionadas ao domínio de propriedades do SND, às ideias subentendidas na adição, multiplicação, subtração e divisão e aos seus respectivos algoritmos.

Figura 1 – Questões de 1 a 6 da atividade diagnóstica

<p>Para as questões 1 e 2, marque APENAS uma alternativa</p> <p>1) Carlos escreveu em seu caderno o número 83 246. Nesse número, o valor posicional do algarismo 3 é: (a) 3 (b) 30 (c) 300 (d) 3000</p> <p>2) O número natural correspondente a 6 unidades de milhar mais 3 centenas mais 5 unidades é: (a) 60 305 (b) 6 305 (c) 6 035 (d) 635</p>	
<p>3) Dudu precisou somar 384 com 139. Então ele fez a seguinte conta abaixo. Dudu errou ou acertou? Por quê?</p>	
	
<p>4) Cláudia precisou fazer duas operações:</p> <p>a) subtrair 485 de 742 e</p> <p>a)</p>	<p>b) subtrair 485 de 732.</p> <p>Cláudia acertou ou errou? Por quê?</p> <p>b)</p>
	

5) Na multiplicação abaixo, qual é o algarismo que deve ser colocado no lugar do quadradinho para que o resultado fique correto?

- (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

$$\begin{array}{r}
 648 \\
 \times 23 \\
 \hline
 19\boxed{4} \\
 + 1296 \\
 \hline
 1\boxed{9}04
 \end{array}$$

6) Ana e Patrícia realizaram as seguintes divisões. Aponte acertos e erros em cada uma, caso existam.

Ana:
$$\begin{array}{r}
 13 \\
 23 \overline{) 313} \\
 \underline{-23} \\
 11
 \end{array}$$

Patrícia:
$$\begin{array}{r}
 13 \\
 23 \overline{) 313} \\
 \underline{-23} \\
 13
 \end{array}$$

Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 2 – Questões 7.1 a 8 da atividade diagnóstica

7.1) Para uma competição de corrida com obstáculos, o professor de Educação Física formou equipes, arrumando os alunos em 4 filas, com 7 alunos em cada fila. Quantos alunos ao todo ele arrumou?
7.2) Um elevador tem capacidade para 350 kg. Quantas pessoas com peso igual a 70 kg poderão entrar ao mesmo tempo nesse elevador?
7.3) Helena tem 680 figurinhas e Zeca tem 120 figurinhas. Quantas figurinhas Helena tem a mais do que Zeca?
7.4) Pedro quer oferecer 15 docinhos para cada um dos 256 convidados do casamento. Quantos docinhos ele precisa encomendar?
7.5) Romeu comprou 8 caixas de lápis com 35 lápis em cada uma. Quantos lápis ele comprou?
7.6) Um padeiro quer colocar 480 pães em cestas, sendo que cada cesta deverá ter 80 pães. Quantas cestas ele precisa ter?
7.7) Uma instituição recebeu 370 bonecas, 410 carrinhos e 55 bolas. Quantos brinquedos foram recebidos no total?
7.8) João tinha 680 figurinhas, mas perdeu em um jogo 120 figurinhas. Com quantas ele ficou?
7.9) Ana Maria nasceu em 1995. Em que ano ela terá 34 anos?
8.0) O preço de um ingresso de cinema é 15 reais. Quanto gastará com ingressos uma família de 6 pessoas?

Fonte: Elaborado pelos autores

Na análise dos resultados consideramos pressupostos teóricos sobre o ensino-aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal e abordagens de confirmação de resultados, pois "... quanto mais convergentes forem os resultados observados utilizando diferentes tipos

de dados e/ou técnicas, mais consistentes são os resultados da pesquisa.” (PARANHOS et al., 2016, p. 390) e de complementariedade quanto à integração de dados quantitativos e qualitativos, cujo objetivo “... é ponderar as vantagens e limitações de cada técnica específica e/ou tipo de dado.” (PARANHOS et al., 2016, p. 390), permitindo “... maximizar a quantidade de informações incorporadas ao desenho de pesquisa, favorecendo o seu aprimoramento e elevando a qualidade das conclusões do trabalho.” (PARANHOS et al., 2016, p. 390).

Resultados e análises

A questão 1 tratava da escrita numérica e das características que definem o Sistema de Numeração Decimal (valor posicional e agrupamento), tornando possível saber se o aluno conseguiu relacionar a escrita numérica às regras do SND. A frequência de acertos na questão foi de 96%. A dificuldade para compreender o valor posicional em uma escrita numérica foi apresentada por 4% dos alunos, que não diferenciaram o posicionamento da unidade de centena e da unidade de milhar. Nenhum aluno deixou a questão em branco.

Lerner e Sadovsky (1996) apontam que dificuldades das crianças na compreensão do valor posicional do algarismo, em uma representação numérica, têm origem no fato de não serem induzidas a pensar de uma maneira correta sobre o Sistema de Numeração Decimal e sim de uma forma mecânica utilizada para resolução de exercícios e não para uma real compreensão das propriedades que o definem: agrupamento e posicionalidade.

A questão 2 era sobre a composição numérica de uma quantidade a partir de sua descrição em classes (milhar, centena, dezena e unidade). Assim, 72% dos alunos que acertaram esta questão mostraram a habilidade de compor números naturais no SND.

A maior frequência de erros (16%) ocorreu na alternativa (D), que apresentava numerais da questão escritos na mesma ordem do enunciado na mesma, sem considerar as classes de agrupamento na base 10 (unidade, dezena, centena, unidade de milhar...).

Logo, 16% dos alunos demonstraram não compreender que a ausência da unidade de dezena, na representação do número em língua materna (por extenso), deve ser representada por zero em sua representação numérica. A questão 2 evidenciava a compreensão de propriedades do SND a partir do trânsito entre diferentes representações de um número.

O desenvolvimento de um conceito matemático, transitando por diferentes representações (oral, verbal, algébrica, geométrica, gráfica, pictórica...) e entendendo a presença de suas propriedades no conteúdo dessas representações, tem sido o interesse das pesquisas de Duval (2010), cujos resultados direcionam compreensões afinadas com a definição de um conceito dada por Vergnaud (2009), na qual sempre estão associados situações e contextos que tornam o conceito significativo, invariantes operatórios (propriedades, características, relações, funções, operações...), que formam o conceito e suas representações simbólicas, com seus conteúdos e propriedades.

A questão 5 apresentava o algoritmo da multiplicação de 648 por 23, no qual havia um algarismo a ser preenchido, em diferentes posições. Tal como na questão 3, que teve 72% de acerto ao apresentar o algoritmo da soma, com necessidade de agrupamento de unidades e passagem de uma grandeza para outra, a quantidade de acertos (60%) na questão 5 ocorreu pela composição de unidades e aumento da unidade de grandeza imediatamente superior.

Já na ação contrária ou o “empréstimo do 1”, necessário nas subtrações da questão 4, a frequência de acerto foi de 48%. Esses dados remetem à defesa de Vergnaud (2009) sobre o trabalho pedagógico com diferentes bases numéricas no sentido de oportunizar a apreensão, por exemplo, do agrupar e do desmembrar, que certamente encontra limitações em processos didáticos que se limitam à fala do professor que se remete a “emprestar 1”, “vai 1”, tal como somente o trabalho com o registro escrito de um número.

Somente 4% das provas apresentaram resposta em branco, provavelmente porque se tratava de uma questão que apresentava alternativas de resposta.

Houve erros distribuídos no assinalar de 2 alternativas (20%) e aqueles referentes a uma única alternativa (16%). Os alunos que marcaram a alternativa (a) mostraram não ter consolidado a reapresentação das características do SND no algoritmo da multiplicação. Neste caso, 2 hipóteses foram levantadas quanto às ações que levaram ao erro: 1) repetiram a dezena do resultado da multiplicação de 3 por 8, ou 2) utilizaram o algarismo 2 que estava acima do lugar do algarismo a ser preenchido no algoritmo.

Ainda quanto aos erros, ter assinalado os itens (b) ou (d), diferentemente do item (a), não permite realizar uma análise que os explique. Isto porque esses itens eram compostos de

números que foram tomados propositadamente de modo a não serem associados a nenhum procedimento errado quanto à utilização das propriedades do SND.

Na questão 3 apresentava-se o algoritmo da adição contendo o erro de não considerar a dezena formada com o agrupamento de unidades. Portanto, seguir a sequência de passos no algoritmo levaria ao erro. Assim, as frequências de respostas corretas (72%) considerando suas justificativas e não justificativas demonstram o entendimento das composições dadas, pela regra da adição, tais como elucidadas por Vergnaud (2009) e o domínio das características de posicionalidade e de agrupamento presentes no algoritmo da adição.

A mesma análise é realizada para 28% de frequência de erros na questão, revelando que quando foram somadas 4 unidades com 9 unidades, totalizando 13 unidades, houve a desconsideração da conversão dessas 13 unidades para 1 uma dezena e 3 unidades. Assim, não houve a compreensão da regra da adição, que levaria ao agrupamento; à contagem e à representação escrita (VERGNAUD, 2009).

Os itens (a) e (b) da questão 4, ambos incorretos, deveriam ser analisados considerando-se o algoritmo da subtração com as explícitas associações de pensamento apresentado junto aos algoritmos. O item (a) explicitava o pensamento de “empréstimo” entre as unidades de grandeza, sem apresentar a diminuição de unidade das grandezas das quais se tomou o 1. Os acertos neste item, ao se reconhecer este erro, foram de 48%.

Não mais que 12% desses alunos apresentaram justificativas em termos da compreensão da composição entre unidades, entre conjuntos e entre conjuntos de conjuntos, tal como explicada por Vergnaud (2009) como necessária para a consolidação do Sistema de Numeração Decimal e suas operações. Justificativas para a resposta correta apresentaram o entendimento da estrutura e funcionamento do algoritmo da subtração em termos da apresentação das propriedades de posicionalidade e de agrupamento do SND.

É possível inferir que para esses alunos, o número 1, quando transita de uma classe para a outra (unidade, dezena, centena, unidade de milhar...), passa a ser uma unidade desta classe, portanto necessitando ser acrescentado ou subtraído das unidades que nela se encontram. Ao se realizar o empréstimo de 1 unidade, a classe emprestada não ficou com 1 unidade a menos. Neste caso, é necessário saber do aluno o significado do algarismo 1, na utilização dos algoritmos da adição, subtração e divisão.

O exemplo do aluno C, para quem, houve acerto “Porque se não empresta, ele ficaria incompleto”, corrobora as afirmações de Lerner e Sadovsky (1996) sobre dificuldades geradas por questões didáticas associadas a regras de “emprestar” e “subir um”, que levam a não compreensão pelo aluno do que realizou.

Acertar a questão não implicou justificar o porquê do erro na subtração utilizando seu algoritmo. Assim, mesmo utilizando as propriedades do SND no algoritmo, esses alunos tiveram dificuldades para escrever sobre elas ou para representá-las verbalmente, evidenciando questões discutidas por Duval (2010) sobre demonstração ou não da consolidação de um conceito matemático através do trânsito entre diferentes representações (escrita, numérica, algébrica, algorítmica, geométrica...).

O item (a) teve 28% de respostas incorretas das quais 8% foram justificadas, revelando o desconhecimento das propriedades do SND. As respostas em branco foram 24%. O item (b) da questão 4, com 48% de acerto e 20% de respostas em branco, representava o não entendimento da regra de adição entre elementos e entre conjuntos, que formam as unidades de grandeza e sua posicionalidade, que necessariamente se apresenta nos algoritmos.

As justificativas de acerto, em termos das propriedades do SND, foram o dobro do item (a), caracterizando-se tanto pela referência às propriedades do SND como à estrutura e funcionamento do algoritmo da subtração: "ela errou pois colocou $(5 - 2)$ e não é assim, ela deveria ter emprestado e assim ela fazia a conta" (ALUNO W).

Uma nova subtração com o algoritmo foi justificada por 8% dos alunos que também acertaram o item (b). Justificativas sem sentido quanto a características do SND e à regra de adição (VERGNAUD, 2009) representaram 20%.

Apesar de serem diferentes, possivelmente o conteúdo representado no item (b) tenha sido melhor assimilado pelos alunos, pois o algoritmo apresentava unicamente os pensamentos de Cláudia para os resultados encontrados na grandezas de unidade, dezena e centena. Somente entrevistas podem confirmar ou não esta hipótese.

Os erros no item (b) foram de 32% e as justificativas que se aproximavam do entendimento do SND foram 4%. Ainda para o erro, 52% das justificativas não puderam ser caracterizadas diante respostas sem nexos e 44% foram em branco.

Quadro 1 – Resultados de respostas para questões mistas

Questão 6 – parte 1			Questão 6 – parte 2		
Acerto	Erro	Em Branco	Acerto	Erro	Em Branco
40%	32%	28%	40%	32%	28%
Justificativas <ul style="list-style-type: none">• Soube justificar utilizando propriedades de agrupamento e do SND – 8%• Em branco – 84%• Não soube justificar utilizando propriedades de agrupamento e do SND – 8%			Justificativas <ul style="list-style-type: none">• Soube justificar utilizando propriedades de agrupamento e do SND – 12%• Em branco – 88%• Não soube justificar utilizando propriedades de agrupamento e do SND – 0%		

Fonte: Elaborado pelos autores.

A questão 6 apresentava 2 operações de divisão realizadas com seu algoritmo. Diferentemente da questão 4, a questão 6 possuía uma resolução incorreta (parte 1 do quadro 1), a realizada por Ana e uma resolução correta (parte 2 do quadro 1), a realizada por Patrícia.

Reconhecer erros nos procedimentos junto ao algoritmo da divisão possibilitou que 40% dos alunos acertassem a questão, resolvendo-a em suas folhas de respostas e apontando o erro no raciocínio explicitado no algoritmo.

Desses apontamentos 8% estavam relacionados à apreensão das propriedades de agrupamento e de posicionalidade, que se apresentam necessárias em passos do algoritmo da divisão, independentemente da operação de divisão estar associada ao conceito de partilha ou de medida, como no caso da questão 6. No algoritmo resolvido por Ana estava explícita a divisão entre unidades de grandezas e somente uma unidade de grandeza do divisor. Por exemplo, 3 dividido por 2.

Em 8% das justificativas no acerto da questão 6, percebe-se que reconhecer erros no algoritmo não diminuiu as dificuldades dos alunos para escrever sobre suas origens. Desse modo, cabem as ideias de Orton (2003) quanto a não se poder afirmar que a execução correta de passos de um algoritmo implique a apreensão das propriedades operatórias que os apoiam. Por exemplo, o uso do “vai um”, sem entender o “um”, significa que ações realizadas nos algoritmos nem sempre possuem significado matemático para os alunos, demonstrando uma compreensão mais instrumental do que relacional (SKEMP, 1976 apud ORTON, 2003).

Não justificaram seu acerto na questão 84% dos alunos. Igualmente os alunos (32%) que a erraram não justificaram, somente respondendo que Ana fez a conta corretamente. No total, a parte 1 da questão 6 teve 28% de respostas em branco.

Na segunda parte da questão 6 houve 40% de acertos, 32% de erros e 28% de respostas em branco. Para acertá-la, o aluno deveria reconhecer que Patrícia, que resolveu o algoritmo, dominava as propriedades do SND e a regra da adição (VERGNAUD, 2009), explicitando as necessárias mudanças de unidades entre grandezas (empréstimos) para que se pudesse realizar a divisão de 313 por 23.

Possivelmente a apresentação dessa solução oportunizou que os alunos acompanhassem passos realizados corretamente no algoritmo, o que garantiu a frequência de acerto que é próxima da qual o algoritmo possuía passos errados (Parte 1, questão 6). Novamente cabem as ideias de Orton (2003) sobre o que efetivamente se pode garantir em termos de domínio conceitual ao atentar-se para passos corretos em um algoritmo.

Quando perguntamos aos alunos por que não responderam a questão 6, deixando-a em branco, suas respostas eram sobre não conseguir efetuar divisão com dois números na chave.

Os itens 7.1 a 8 objetivavam avaliar se, em diversificados contextos, que imprimiam diferentes significados para os dados numéricos, o aluno era capaz de associar a operação numérica ou as operações numéricas (adição, subtração, multiplicação e divisão) que possibilitariam responder corretamente à pergunta realizada em cada item.

Os itens 7.1, 7.4, 7.5 e 8 teriam resposta correta tanto quando associados à adição como à multiplicação. Contudo, a associação à operação de multiplicação prevaleceu em todos eles, com frequência de 80% (Itens 7.1 e 7.5) e de 60% (item 7.4). Certamente as expressões “com 7 alunos em cada fila” (Item 7.1), “15 docinhos para cada ...” (Item 7.4) e “com 35 lápis em cada uma” (item 7.5) levaram ao pensamento multiplicativo, dado não como síntese da adição reiterada, mas como relação fixa entre duas variáveis, utilizando o invariante conceitual do campo multiplicativo (NUNES et al, 2005; VERGNAUD, 2009).

É possível que essas expressões carreguem para esses alunos unidades de sentido (DUVAL, 2010), que possibilitam transitar entre representações de um mesmo conceito. Neste caso, o conceito de multiplicação representado em língua materna. Essa hipótese se apoia no

item 8 que, apesar de estar associado à multiplicação, teve uma frequência baixa de acertos (56%) comparada a outros itens.

O item 8 não explicitava a relação fixa entre pessoa e ingresso a pagar. Para se chegar a esta relação era preciso elaborá-la a partir da informação na qual a família era composta por 6 pessoas. Igualmente não havia nenhuma expressão tal como: ao todo, no total..., que levasse à solução por a adição reiterada.

Para os itens 7.2 e 7.6 as respostas corretas poderiam ser dadas tanto por adição, subtração como por divisão. Esses itens tratavam da divisão como medida, o que facilitaria a adição reiterada da unidade 70 kg no item 7.2 e da unidade 80 pães no item 7.6. Pode-se intuir que a identificação do conceito de divisão como medida levou a que nestes itens, a adição tivesse 16% de frequência e a subtração 8% de frequência, evidenciando o quanto a percepção de unidades de sentido em cada representação (DUVAL, 2010) é fundamental para a identificação de conceitos e operações numéricas.

Apesar de não haver explícita representação escrita associada a uma multiplicação, o item 7.2 teve 8% de respostas com esta associação. Não houve respostas para o item 7.6.

A divisão apresentou as maiores frequências para o item 7.2 (52%) e para o item 7.6 (64%). Neste item, a expressão “... quer colocar 480 pães em cestas...” parece possuir para os alunos a unidade de sentido (DUVAL, 2010), que permitiu identificar uma divisão. Esta mesma explicação ocorre para o item 7.2 com a expressão “... poderão entrar ao mesmo tempo nesse elevador?”, em que a expressão “ao mesmo tempo”, dá ideia de agrupamento ou unidade de medida.

Tanto a adição como a subtração poderia levar à resposta correta para os itens 7.3 e 7.8, que apresentaram a mesma frequência de acertos para a operação de adição (12%) e para a operação de subtração (68%).

As expressões “... tem a mais do que...”, do item 7.3 e “... perdeu em um jogo...”, do item 7.8, certamente se constituem para os alunos unidades de sentido (DUVAL, 2010) que permitem corresponder operações matemáticas assinaladas ao seu registro verbal em cada item, evidenciando o quanto o verbo perder está associado à subtração, diferentemente da expressão “tem a mais do que”. Esta análise leva a pensar sobre os contextos nos quais o conceito de subtração é pedagogicamente desenvolvido.

Somente os itens 7.7 e 7.9 poderiam ser corretamente associados à adição, o que não levou a frequências muito diferentes das encontradas para os itens associados a mais de uma operação matemática. Portanto, entende-se que a quantidade de operações matemáticas associadas a um contexto, neste caso, não pode ser considerada como um fator de dificuldade para esta associação.

O item 7.7 se caracteriza por ser um contexto comum para o desenvolvimento da adição. Assim, para os alunos que acertaram a questão, a soma de diferentes cardinalidades de objetos se identifica com cardinalidade da união de diferentes conjuntos (VERGNAUD, 2009). Esse contexto, familiar aos alunos, contribuiu para a frequência de 72% para a adição. As outras operações tiveram uma distribuição de frequências iguais (8% para as operações de subtração e de multiplicação) e bem próximas (12% para a operação de divisão). Os alunos que erraram a questão (28%) demonstram não compreender o conceito de adição.

Mesmo associado a uma única operação matemática, o item 7.9 não pode ser considerado uma adição, como a caracterizada por Vergnaud (2009), porque era preciso somar 34 anos ao ano de 1995 para obter a resposta correta. Assim, 1995 é um estado inicial a ser considerado na operação. A distribuição de frequências de erros entre as alternativas leva a concluir sobre o papel da familiaridade dos alunos com esse tipo de questão, na qual a comparação realizada é diferente daquela entre anos com o mesmo número de dígitos, por exemplo, 2029 e 1995, cuja diferença é de 34 anos.

Não mais que 41% dos alunos acertaram a questão. Havendo índices próximos de frequências para as operações de subtração (25%) e de multiplicação (21%). A correspondência com a operação de divisão foi de 13%. Neste contexto, 59% dos alunos demonstraram compreender a adição.

Conforme os resultados, acertos e erros dos alunos e justificativas, têm origem na coordenação das ações de observar, realizar e compreender o que cada questão apresentava, ou seja, nas competências do aluno e as relacionais ou de contextos de atuação (MACEDO, 2005; TEIXEIRA, 2007). Igualmente os resultados certificam os pressupostos de Vergnaud (2009) no ensino-aprendizagem de um conceito matemático, que considere a diversidade de situações, capacidades e representações associadas ao mesmo.

Considerações Finais

Elaborar um projeto de ensino-aprendizagem sobre o Sistema de Numeração Decimal (SND) e suas operações matemáticas levou ao diagnóstico da compreensão de alunos do 6º ano sobre conceitos e propriedades associadas a este tema.

Nesse sentido, resultados e suas discussões puderam ser considerados orientadores deste projeto ao mostrarem que as dificuldades apresentadas pelos alunos podem ter origem na identificação da operação ou operações numéricas associadas a um problema, como na compreensão das regras do SND principalmente quando devem ser reapresentadas em algoritmos operatórios. Em alguns casos, evidenciaram-se dificuldades relacionadas à compreensão de passos que caracterizam um determinado algoritmo. Isto porque a compreensão das características do SND, quando demonstradas pelos alunos em respostas para determinadas situações, necessariamente não implica que os mesmos as utilizarão em algoritmos associados à adição, subtração, multiplicação e divisão.

Nessa perspectiva, podemos concluir, assim como Lerner e Sadovsky (1996), que algumas dificuldades relacionadas à compreensão do Sistema de Numeração Decimal e a utilização de algoritmos de operações numéricas é realmente um problema didático, que evidencia a ausência de um trabalho pedagógico que apresente propriedades de números e operações em diferentes contextos, com diferentes representações.

Dados os resultados e suas análises pudemos concluir que ter êxito em atividades com números e operações numéricas no Sistema de Numeração Decimal decorre da coordenação de esquemas de ação, identificados com as competências de observar, realizar e compreender, necessariamente a serem desenvolvidos e ampliados em processos didático-pedagógicos que necessitam de referências didáticas para seus desenvolvimentos e ampliações.

Referências

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5. ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, Cecília; SAIZ Irmã; [et al] (Org.). **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

MACEDO, L. Competências e Habilidades: Elementos para uma Reflexão Pedagógica. In: **Exame Nacional do Ensino Médio (Enem): fundamentação teórico-metodológica/Inep**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira (INEP), 2005.

NUNES, T; CAMPOS, T. M. M; MAGINA, S.; BRYANT, P. **Educação Matemática 1: Números e Operações Numéricas**. São Paulo: Cortez, 2005.

ORTON, A. **Didáctica de las Matemáticas**. 4. ed. Madrid: Ediciones Morata, 2003.

PARANHOS, R. ET AL. Uma introdução aos métodos mistos. **Sociologias**, Porto Alegre, ano 18, nº 42, mai/ago 2016, p. 384-411.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias** / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – 1ª edição atual. – São Paulo : SE, 2011.72 p.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. **Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo**. São Paulo: SEESP, 2007. Disponível em: <<https://www.educacao.sp.gov.br/saresp>>. Acesso em: 16 set. 2017.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. **Currículo Paulista**. São Paulo: SEESP, 2019.

TEIXEIRA, L. R. M. A Noção de Competência: uma Visão Construtivista. In: **Eixos Cognitivos do Enem**. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), 2007.

VERGNAUD, G. **A Criança, a Matemática e a Realidade**. Curitiba: Editora UFPR, 2009.

HISTÓRICO

Submetido: 14 de junho de 2021.

Aprovado: 06 de outubro de 2021.

Publicado: 02 de novembro de 2021.