
A introdução da geometria analítica no ensino secundário português — a contribuição de José Adelino Serrasqueiro

José Manuel Matos

Universidade Federal de Juiz de Fora, Brasil

jmm@fct.unl.pt

Resumo

O artigo pretende contribuir para o estudo dos modos como a geometria analítica foi introduzida no final do século XIX como tópico escolar no ensino secundário português, quer em programas, quer em livros de texto. Para além do estudo da legislação apropriada, o trabalho debruçou-se sobre um capítulo de um dos primeiros livros escolares que incluíram o tópico da autoria de José Adelino Serrasqueiro, um autor de referência da época. Seguindo o programa, o texto privilegia essencialmente o estudo de temas geométricos através da álgebra. A sua abordagem mostra como o autor desenvolveu o tópico na ausência de uma tradição escolar consolidada sobre como ensinar geometria analítica no ensino secundário. As suas escolhas foram pois inovadoras, embora algumas delas tenham sido excluídas em futuros programas.

Palavras-chave: História da Educação Matemática. Geometria Analítica. Estudos Curriculares. Livros de Texto. História das Disciplinas Escolares.

The introduction of analytic geometry in Portuguese secondary school — the contribution of José Adelino Serrasqueiro

Abstract

The article intended to contribute to the study of the ways in which analytical geometry was introduced in the late nineteenth century as a school topic in Portuguese secondary education, both in programs and textbooks. In addition to the study of appropriate legislation, the paper looked at a chapter of one of the first textbooks that included the topic written by José Adelino Serrasqueiro, a leading author of the time. Following the program, the text essentially privileges the study of geometric themes through algebra. Its approach shows how the author developed the topic in the absence of a consolidated school tradition on how to teach analytical geometry in secondary education. His choices were therefore innovative, although some of them were excluded in future programs.

Keywords: History of Mathematics Education, Analytical Geometry, Curriculum Studies, Textbooks, History of School Disciplines.

Introdução

A geometria analítica nasceu no século XVII pelas mãos de René Descartes (1596–1650) e Pierre Fermat (*ca.* 1608–1665) que desenvolveram o tópico de modo independente e com motivações distintas. Enquanto Fermat estudou lugares geométricos procurando os tipos de curvas produzidos por expressões algébricas, Descartes pretendia recorrer a construções geométricas para encontrar as raízes de equações algébricas (BOYER, 2012).

Fermat explicita o seu programa do seguinte modo:

todas as vezes que numa equação final [isto é, irreduzível] encontramos duas quantidades desconhecidas, temos um lugar geométrico, descrevendo a extremidade de uma delas uma linha reta [no original, *ligne droite*, linha direita] ou curva. A linha reta é simples e única no seu género; as espécies de curvas são em número indefinido, círculo, parábola, hipérbole, etc. (FERMAT, 1896, p. 85)

Encontramos nesta frase todo um programa para o desenvolvimento da matemática: a ideia de variável algébrica, a da sua representação geométrica e a procura de uma classificação de curvas que está na génese da análise funcional.

Descartes, embora usando uma notação mais próxima dos tempos atuais, tem objetivos distintos. A frase de abertura da sua obra *La Géométrie* esclarece:

Todos os Problemas de Geometria podem facilmente ser reduzidos a termos tais, que não é necessário depois senão conhecer os comprimentos de certas linhas retas, para os construir. (DESCARTES, 1627, p. 297)

Contrariamente a Fermat, a ênfase de Descartes permanece no campo da resolução de problemas geométricos através de construções justificadas por procedimentos algébricos.

A distinção entre estes dois autores é aprofundada por Boyer (2012) chamando a atenção para que é possível distinguir entre a “geometria analítica no sentido de Descartes” — centrada nos problemas da geometria clássica e admitindo curvas na geometria apenas na medida em que fosse possível encontrar as suas equações —, e a “geometria analítica no sentido de Fermat” — centrada na álgebra e estudando curvas definidas por equações.

Apesar de estes dois autores serem reconhecidos como os inventores da geometria hoje denominada cartesiana, os seus trabalhos ainda estão longe do que designamos como geometria analítica. Embora ambos recorram ao simbolismo algébrico (mais parecido com o atual em Descartes do que em Fermat), nenhum deles recorre a coordenadas cartesianas, isto é, nenhum deles resolve os seus problemas recorrendo ao que hoje designamos por referencial ortonormado.

Em finais do século XIX o tópico geometria analítica começou a fazer parte dos programas oficiais da disciplina de matemática no ensino secundário português e este texto pretende contribuir para conhecer o modo como esse tópico foi integrado nos programas e em livros de texto.

Os conteúdos disciplinares são uma componente essencial das disciplinas escolares e, com base em abordagens historiográficas, tem sido apontado que, em particular no ensino pré-universitário, estas aparecem como dotadas de autonomia, quer perante tópicos académicos semelhantes, quer perante os grandes determinantes sociais (Chervel, 1988). Nesse sentido, é importante estudar os modos como essa autonomia se manifesta na elaboração dos livros de texto e dos currículos escolares.

Embora a geometria analítica tenha sido incorporada durante o século XIX nos programas do ensino secundário de muitos países, são escassos os estudos abordando essa integração¹. No Brasil, no entanto, encontramos trabalhos sobre livros escolares, abordando o desenvolvimento do tema quer no ensino secundário (OLIVEIRA; SOARES, 2016, SOARES, 2013), quer no superior (VALENTIM JÚNIOR, 2013). Existe ainda outro texto que inclui a análise das propostas de Lacroix para a geometria analítica a partir de traduções espanholas (SÁNCHEZ; ASTUDILLO, 2015).

A introdução da geometria analítica em Portugal

O primeiro livro português a abordar a geometria analítica foram os *Principios mathematicos para instrução dos alumnos do Collegio de Saõ Lucas, da Real Casa Pia do Castello de Saõ Jorge* de José Anastácio da Cunha (1744-1787) publicados em 1790.

Esta obra era reputada como pouco adequada para o ensino, e após a reforma de Universidade de Coimbra em 1772, será nas traduções das obras de Étienne Bézout

¹ Por exemplo, no livro de referência editado por Karp e Schubring (2014), embora muitos capítulos refiram a geometria analítica, o tópico não é especificamente abordado em nenhum.

(1730-1783), publicadas ainda durante o século XVIII, que a geometria analítica aparece nos primeiros livros usados na Faculdade de Matemática.

A partir de 1838 os livros de Bézout são substituídos na Universidade de Coimbra pelo *Curso completo de mathematicas puras* em 2 volumes da autoria de Louis-Benjamin Francoeur (1773-1849), com tradução de Francisco de Castro Freire (1809-1884) e Rodrigo Ribeiro de Souza Pinto (1808-1893), professores da Faculdade de Matemática.

O desenvolvimento da geometria analítica nestas obras destinadas ao ensino superior é limitado. Bézout, por exemplo (1771), inclui dois capítulos dedicados às aplicações da álgebra, começando com as aplicações à aritmética e mostrando como a álgebra permite resolver problemas de progressões. Depois, seguindo de perto o “sentido de Descartes”, como o denominou Boyer, e, sem usar o termo *geometria analítica* e fazendo um escasso uso de eixos cartesianos, discute a construção geométrica de quantidades algébricas e a forma de colocar problemas de geometria em equação.

Francoeur, por seu lado (1838), inclui o capítulo “Geometria analítica” que se inicia pela “Aplicação da álgebra à geometria elementar” e passa depois para o tema de trigonometria. Tal como em Bézout, o uso de eixos coordenados para a resolução destes problemas geométricos é limitado. Apenas já no final da secção se discute o uso de eixos e são introduzidos os termos *abcissa* e *ordenada* (FRANCOEUR, 1838, p. 278). O sistema de eixos é depois ocasionalmente usado na secção sobre trigonometria.

Em contraste, o livro de Anastácio da Cunha, embora não usando o termo *geometria analítica*, desenvolve o tópico de um modo mais próximo do atual. O seu “Livro XIII” (CUNHA, 1790, p. 170) inicia-se com a descrição do sistema de eixos coordenados e a introdução dos termos *abcissa* e *ordenada*. Depois, acompanhando o “sentido de Fermat”, Cunha começa imediatamente com a discussão das “linhas” resultantes de equações específicas. O seu estilo é efetivamente difícil de acompanhar devido à grande concentração da sua exposição matemática, o que ajuda a explicar a razão porque, embora o livro seja matematicamente mais elaborado do que as obras de Bézout e de Francoeur, não tenha sido escolhido para o ensino superior.

Quanto ao ensino secundário, e acompanhando as tendências internacionais, o tópico encontrou o seu lugar nos programas dos liceus² portugueses pela primeira vez em 1886 e desde aí tem figurado em quase todos os programas.

É meu propósito neste texto contribuir para o estudo dos modos como a geometria analítica foi introduzida como tópico³ escolar no ensino secundário português quer em programas quer em livros de texto. Para isso recorri à legislação e a um dos primeiros livros escolares que incluíram o tópico.

As primeiras propostas curriculares

No ensino secundário português, a geometria analítica é mencionada pela primeira vez em 1886 no programa da disciplina de “Matemática elementar” do 6.º ano do curso dos liceus que correspondia ao atual 10.º ano de escolaridade (PORTUGAL, 1886). Marcando precisamente essa inovação, o tópico denomina-se “Primeiras noções de geometria analítica” e especifica os seguintes temas⁴:

Primeiras noções de geometria analítica

Representação geométrica das quantidades negativas.

Equações do ponto; equação da linha reta.

Problemas relativos à linha reta.

Equação do círculo referido ao centro ou a uma extremidade de um diâmetro como origem.

Tangentes ao círculo. (PORTUGAL, 1886, p. 3391, **negrito no original**)

Trata-se do último tópico do programa e a sua inclusão é feita à custa do encurtamento do espaço dedicado à geometria descritiva. O programa não contém mais nenhuma menção de temas de geometria analítica, nem conhecemos outra documentação que orientasse de algum modo professores e autores de manuais. Ficava pois ao critério de cada um a concretização do tópico.

² Desde 1836 até finais da década de 1970, as escolas de ensino secundário públicas portuguesas foram denominadas de Liceus.

³ Distingo entre “tópico”, a geometria analítica, e “temas”, que se referem a assuntos tratados no âmbito daquele tópico, por exemplo, equação da reta ou a distância de um ponto a uma reta.

⁴ A grafia foi atualizada em todas as citações.

O primeiro livro de geometria analítica dedicado ao ensino secundário é da autoria de João Inácio do Patrocínio da Costa (1837-1901), *Primeiras noções de geometria analytica*, e é publicado em 1887, embora um texto litografado datado de 1878, *Apontamentos de geometria analytica*, da autoria de Carlos Augusto Morais de Almeida (1843-1919) tenha circulado anteriormente (HENRIQUES, 2004).

Seguindo as orientações do programa, dois outros livros de texto para o ensino secundário passam a incorporar elementos de geometria analítica a partir de 1888: Joaquim Casimiro Ivo de Carvalho publica as *Primeiras noções de Geometria analytica* e José Adelino Serrasqueiro (1835-?), o autor mais importante na época, acrescenta um capítulo sobre o tópico à 3.^a edição do seu tratado de trigonometria para os últimos anos liceais. Foi de curta duração esta inclusão pois no final desse ano o tópico é retirado dos programas (PORTUGAL, 1888) e só regressou em 1895. A 4.^a edição do manual de Serrasqueiro, datada de 1891, já não refere a geometria analítica.

Em 1895, com a reforma Jaime Moniz que estabiliza o ensino lineal, e após um hiato de sete anos, a geometria analítica regressará, passando a ocupar um lugar quase permanente nos programas (com excepção dos períodos 1926-1930 e 1936-1948).

Nesse ano de 1895 o tema merece uma curta referência quase no final do 5.^o ano liceal (atual 9.^o ano de escolaridade):

Coordenadas rectilíneas. Determinação da posição de um ponto pelas suas distâncias a dois eixos fixos: equação do ponto. Lugar geométrico de uma equação a duas variáveis: construção da curva por pontos. O lugar geométrico da equação $y=ax+b$ é uma linha reta. (PORTUGAL, 1895, p. 2518)

Embora explicitando menos temas do que nos programas anteriores, sublinho a abordagem centrada nos lugares geométricos das equações a duas variáveis, tal como Fermat propunha e a quase total ausência de temas usuais próprios da geometria, perspectiva diferente da anteriormente adoptada. Aparentemente, o legislador não tinha como prioridade que os alunos apreciassem os modos como a álgebra esclarecia a geometria, mas o seu inverso, usar a representação geométrica para ilustrar a álgebra.

A reforma de 1905 apresenta, pela primeira vez, em toda a sua extensão o conjunto dos temas de geometria analítica que se repetirão, embora com alguns hiatos até ao princípio da década de 1970. Esta inovação é tanto mais significativa por estar

integrada numa alteração legislativa que procurava modificar alguns aspetos do decreto de 1895, nomeadamente integrando o ensino da análise (MATOS, 2014).

O programa de 1905 estabelece o seguinte:

Noções elementares de geometria analítica plana — Equações de um ponto num sistema de coordenadas retangulares. Equação da reta; coeficiente angular. Determinar as coordenadas do ponto de interseção de duas retas; condição para que duas retas sejam paralelas. Achar a equação da reta determinada por dois pontos dados. Achar o ângulo de duas retas; condição de perpendicularidade. Determinar a distância de dois pontos dados. Equação de um lugar geométrico; equação da circunferência referida a dois diâmetros perpendiculares; equações da elipse e hipérbole referidas aos eixos; equação da parábola referida ao eixo e à tangente ao vértice. Representação gráfica das funções circulares. (PORTUGAL, 1905, p. 3872)

A geometria é recolocada no centro, sendo discriminados diversos assuntos dotando temas geométricos de uma linguagem algébrica. Por exemplo a equação da reta já não aparece como um lugar geométrico, nem se discutem representações gráficas genéricas de equações de duas variáveis, mas surgem equações das cónicas. Este afastamento da abordagem “fermatiana” é ainda mais notório quando reparamos que o tópico está no final do programa imediatamente após a interpretação geométrica do conceito de derivada. Para os autores do programa, parece que a geometria analítica é um aprofundamento de temas geométricos enquanto que o estudo da análise, e em particular, a sua interpretação geométrica, é feito de forma independente. Todos os programas posteriores até 1936 (PORTUGAL, 1918, 1919, 1930, 1931, 1934, 1935) mantêm esta perspetiva sendo o tópico lecionado após o estudo de gráficos de funções.

Os livros de Serrasqueiro

Temos acesso a um conjunto de livros através dos quais podemos apreciar os modos como o programa foi apropriado pelos autores de manuais, mas neste texto centrar-me-ei no caso do *Tratado Elementar de Trigonometria Rectilinea e Noções de Geometria Analytica* de José Adelino Serrasqueiro (1835-?).

Professor e publicista, nascido em Castelo Branco, frequentou o Liceu de Coimbra em 1857/58 onde teve como professor de matemática José Joaquim Manso Preto (1823-?), autor de manuais para o ensino secundário. No ano seguinte, matriculou-se em Filosofia da Universidade de Coimbra, curso onde se estudavam quase todas as ciências naturais (física, química, mineralogia, zoologia, etc.). Na

Universidade teve um lento percurso escolar com algumas interrupções, e termina o curso apenas em 1880, tendo obtido alguns prêmios escolares nos últimos anos⁵. Foi professor de Matemática no Liceu Central de Coimbra.

Com início em 1869, e ainda aluno da Universidade, Serrasqueiro escreve uma série coerente de livros destinados a todas as matérias e todos os anos do ensino secundário sob a denominação geral de “Curso de Matemáticas Elementares”. Foi a primeira vez que um autor português publica um conjunto de obras ambicionando abranger toda a matemática do ensino secundário. Serrasqueiro publica ainda outras obras de matemática para o ensino liceal. Serrasqueiro é, pois, um autor de manuais de matemática de destaque nas três últimas décadas do século XIX.

A adoção do seu *Tratado de Álgebra Elementar* entre 1891 e 1928 pelo Colégio de Pedro II no Rio de Janeiro, instituição de referência no Brasil, vai-lhe granjear um prestígio considerável, levando a que outros dos seus manuais fossem anotados em escolas brasileiras (GUSSI, 2011, ROCHA, 2012).

Em Portugal, o sucesso dos seus livros será interrompido em 1895 quando a reforma Jaime Moniz impõe livros únicos para o ensino secundário e são escolhidos outros autores. Após 1905, quando a disposição sobre livros únicos é revogada, o seu “Curso” vai perder em Portugal a notoriedade de que vinha gozando anteriormente, embora os seus livros continuem a ser editados até quase ao final da década de 1930.

Pelo menos a partir do final da década de 1910 as re-edições dos livros de Serrasqueiro não apresentam alterações substanciais. As capas e as folhas de rosto mantêm a grafia do século XIX, incluindo a afirmação (falsa, como veremos) de conformidade com os programas oficiais e apenas se altera a data de publicação e o número da edição.

A geometria analítica nas obras de Serrasqueiro

Conforme o tópico de geometria analítica foi sendo ou não incluído no programa, Serrasqueiro foi acrescentando ou retirando um capítulo “Noções de geometria analítica” ao final do seu tratado de trigonometria, mudança que em 1888 (3.^a

⁵ Os elementos sobre o percurso escolar de Serrasqueiro foram obtidos através da consulta da *Relação dos estudantes da Universidade de Coimbra* (disponível em <https://digitalis-dsp.uc.pt/republica/UCBG-RP-15-2/rosto.html>, acessado em 12/7/2019) e do *Anuário da Universidade de Coimbra* (disponível em <https://digitalis-dsp.uc.pt/republica/UCBG-8-118-1-3/rosto.html>, acessado em 12/7/2019)

edição) e 1918 (6.^a edição) se reflete também no título. A tabela 1 lista todos os livros da autoria de Serrasqueiro que contêm geometria analítica.

Quadro 1 - Obras de Serrasqueiro contendo geometria analítica por ano.

Ano	Título	Edição
1888	Tratado Elementar de Trigonometria Rectilinea e noções de geometria analítica, composto segundo o programma official para o ensino desta sciencia nos Lyceus	3. ^a edição
1918	Tratado Elementar de Trigonometria Rectilinea e noções de geometria analítica	6. ^a edição
1920	Tratado Elementar de Trigonometria Rectilinea para uso dos Lyceus	7. ^a edição
1927	Tratado Elementar de Trigonometria Rectilinea e Noções de Geometria Analytica segundo o programma official para o ensino d'esta sciencia nos lyceus / Obra approvada pelo Conselho Superior de Instrucção Publica	8. ^a edição
1938	Tratado Elementar de Trigonometria Rectilinea e Noções de Geometria Analytica segundo o programma official para o ensino d'esta sciencia nos lyceus / Obra approvada pelo Conselho Superior de Instrucção Publica	9. ^a edição

Fonte: Porbase e coleção particular.

Analisarei a 8.^a edição do seu *Tratado de Elementar de Trigonometria Retilínea* (SERRASQUEIRO, 1927) que termina com o capítulo “Noções de geometria analítica relativas à reta e ao círculo” (Figura 1).

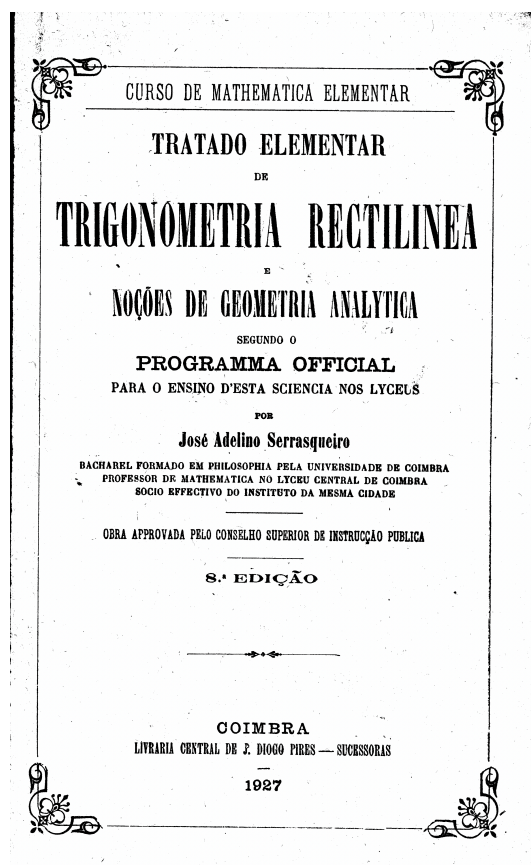
Quanto à estrutura, o capítulo está organizado nas seguintes secções que reproduzem a estrutura e a terminologia contidas no programa de 1886 (PORTUGAL, 1886) que citei acima:

- § 1.º Definições e princípios gerais
- § 2.º Equação da linha reta
- § 3.º Problemas relativos à linha reta
- § 4.º Equação do círculo
- § 5.º Tangente ao círculo (SERRASQUEIRO, 1927, p. 156)

Apesar de publicado em 1927, decidi tomar este livro como representante das primeiras abordagens à geometria analítica do autor devido, em primeiro lugar à correspondência entre a estrutura do capítulo e o programa de 1886, em segundo, à ausência do estudo das cónicas, tema obrigatório a partir de 1905, o que tornava, a partir dessa data, o livro desajustado do programa oficial e, em terceiro, ao facto de que entre 1926 e 1930 o tópico não fazia parte dos programas, embora a folha de rosto declare que o livro estava conforme o “Programa oficial”, o que nesse ano era falso. Suponho

pois tratar-se de um livro que vai sendo republicado tendo como alvo um público diferente do dos alunos das escolas portuguesas mas que deixa como rasto histórico vestígios do final da década de 1880.

Figura 1 - Folha de rosto do *Tratado de Elementar de Trigonometria Retilínea e noções de geometria analítica*



Fonte: (Serrasqueiro, 1927)

Existem, como veremos, outros argumentos em apoio desta hipótese que, por incidirem sobre situações mais particulares, discutirei adiante. Suspeito que algo de semelhante aconteça com os outros livros de Serrasqueiro. Não são claras as razões para tal longevidade. Os livros destinam-se-iam a apoiar professores na preparação das aulas? Teria Serrasqueiro um público fiel no Brasil? Sabemos, que os seus livros foram adotados por outras escolas brasileiras para além do Colégio de Pedro II (ROCHA, 2012).

Regressando ao conteúdo do último capítulo do *Tratado* de 1927, e focando-me agora na concretização dos tópicos programáticos, Serrasqueiro esclarece logo no início

que a geometria analítica é “a ciência que ensina a resolver por meio da álgebra as questões relativas às grandezas geométricas” (1927, p. 131). Depois, após uma apresentação das coordenadas cartesianas, o autor discute longamente (quatro páginas) a interpretação geométrica dos sinais em especial dos negativos.

A regra dos sinais, estabelecida por Descartes, tem a vantagem de generalizar as fórmulas, como se vê facilmente no exemplo seguinte:

Sejam A e B dois pontos fixos, situados numa reta indefinida, e suponhamos um ponto móvel nesta reta. Seja a a distância



dos dois pontos fixos, x a distância do ponto A ao ponto móvel, e y a distância do ponto B ao mesmo ponto móvel; e consideremos os diferentes casos, que se podem apresentar.

1.º O ponto móvel está em M, à direita de B; então é

$$x = AB + BM = a + y.$$

2.º O ponto móvel está em M', entre A e B; será

$$x = AB - BM' = a - y.$$

3.º O ponto móvel está em M'', à esquerda de A; então é

$$x = BM'' - AB = y - a.$$

que aplica a três tipos de equações do primeiro grau, consoante os sinais dos coeficientes.

Considerando porém como positivas as distâncias de contadas no sentido de A para B e como negativas as distâncias contadas de B para A, a primeira equação é geral, isto é, dá sempre a distância do ponto A ao ponto móvel nas suas diferentes posições (SERRASQUEIRO, 1927, p. 133)

O autor prossegue explicando detalhadamente esta última afirmação. Não é apenas ele que necessita recorrer a longas explicações envolvendo o uso dos sinais positivo e negativo. Durante o século XIX outros sentiram a mesma necessidade (RIBEIRO, 2009, SÁNCHEZ; ASTUDILLO, 2015, SILVA, 2001).

Após apresentar as “equações do ponto” ($x = a$, $y = b$) e discutir longamente o significado de coordenadas negativas, Serrasqueiro apresenta a proposição seguinte:

Uma equação entre duas variáveis $f(x,y) = 0$, em geral representa uma curva, cujos pontos têm por coordenadas os valores de x e y , que satisfazem a equação. (SERRASQUEIRO, 1927, p. 135, itálicos nos original)

O tema, que remete para uma geometria analítica “no sentido de Fermat” (BOYER, 2012), figurou nos programas entre 1895 e 1926, com uma breve menção em 1930 que foi retirada logo em 1931. O autor acrescenta que construindo pares de pontos e unindo os pontos através de uma curva contínua se obtém a “curva da equação” (explicando que a recíproca seria a “equação da linha”). As linhas dividem-se ainda em algébricas e transcendentais. O livro consagra muito pouco espaço a este tema que é apenas abordado através de afirmações genéricas.

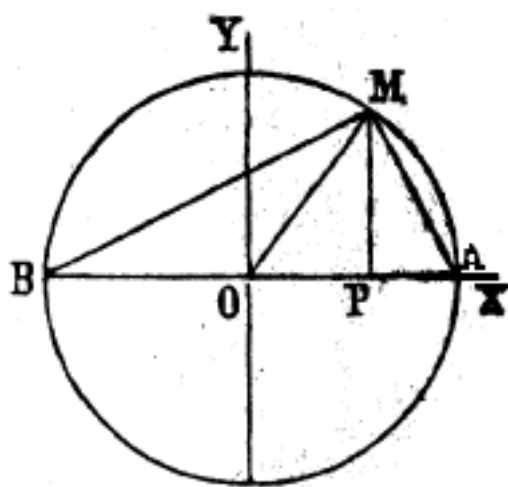
Após esta primeira secção, o autor prossegue discutindo as equações das retas paralelas aos eixos. Segue-se o caso de uma reta passando pela origem das coordenadas cuja forma é justificada recorrendo à semelhança de triângulos. O coeficiente a da equação $y = ax$ é associado à tangente trigonométrica do ângulo que a reta faz com o eixo dos x , no caso dos eixos retangulares, e com a razão dos senos dos ângulos que a reta faz com cada eixo, no caso dos eixos oblíquos. A equação de uma reta que não passa pela origem é depois discutida, bem como a representação da equação geral do primeiro grau a duas incógnitas e é apresentado um exemplo. Nesta segunda secção são também introduzidos os termos *coeficiente angular* e *ordenada na origem*.

A terceira secção lida com um conjunto de “Problemas relativos à linha reta”, terminologia usada apenas no programa de 1886 e ausente nos seguintes. Este programa não especifica que problemas deveriam ser abordados e apenas a partir de 1905 a legislação os passa a discriminar. Serrasqueiro aborda os seguintes problemas: 1) achar a equação de uma reta que passa por dois pontos dados; 2) calcular o ângulo de duas retas; 3) por um ponto “tirar” uma reta paralela ou perpendicular a uma reta dada; 4) por um ponto dado tirar uma reta que faça um ângulo dado com uma reta dada; 5) achar a interseção de duas retas; 6) achar a distância entre dois pontos; 7) achar a distância de um ponto a uma reta.

Note-se que, a partir dos programas de 1905, o problema 6) recua na sequência programática e passa a estar incluído na exploração inicial do sistema cartesiano. Os problemas 3), 4) e 7) não são referidos por nenhum programa até 1927, data da publicação do livro (este último problema apenas figura nos programas posteriores a 1948). Podemos conjecturar que Serrasqueiro escolheu os sete problemas numa fase muito inicial do desenvolvimento curricular do tópico para o ensino secundário, o que reforça a ideia de que apesar de 1927 ser a data de publicação do livro, estamos perante a re-edição de outro com data anterior.

A quarta secção do livro de Serrasqueiro foca-se na determinação da equação da circunferência (“círculo” na terminologia de Serrasqueiro), seguindo de perto as propostas do programa de 1886. Inicia-se com o estabelecimento da equação de uma circunferência com centro na origem discutindo, quer o caso dos eixos perpendiculares, quer o dos oblíquos. Este tema é omitido no programa de 1895 e, a partir de 1905, os programas referem apenas o caso de eixos ortogonais. Segue-se o desenvolvimento da “equação do círculo referida à extremidade de um diâmetro” (SERRASQUEIRO, 1927, p. 147), formulação muito próxima da do programa de 1886 e cujo estudo é feito quer no caso dos eixos perpendiculares quer dos oblíquos. Iniciando-se com o caso de um diâmetro sobre o eixo dos x e terminando com o caso geral da equação da circunferência com centro em qualquer ponto do plano e em eixos oblíquos. A secção termina mostrando como “as principais propriedades do círculo” (p. 149) se deduzem da equação de uma circunferência centrada na origem com eixos perpendiculares: 1) a perpendicular baixada do centro sobre uma corda divide a corda em dois segmentos de igual comprimento; 2) a ordenada de qualquer ponto sobre a circunferência é a meia proporcional entre os dois segmentos do diâmetro determinados pela abscissa do ponto (isto é, $BP : MP :: MP : AP$ na figura 1); e 3) a corda tirada pela extremidade de um diâmetro é a meia proporcional entre o diâmetro e a sua projeção sobre ele (isto é, $AB : BM :: BM : BP$ na figura 2); o ângulo inscrito no semicírculo é reto.

Figura 2 - Proporcionalidade entre segmentos



Fonte: (SERRASQUEIRO, 1927, p. 149).

Estas quatro proposições são bem conhecidas da geometria euclidiana e Serrasqueiro demonstra-as recorrendo apenas a manipulações algébricas e não a propriedades de igualdade e semelhança de triângulos. Reconheça-se aqui o “estilo de Descartes” de que falava Boyer (2012).

A última secção do capítulo de geometria analítica do livro de Serrasqueiro trata da tangente à circunferência. O autor começa por definir o conceito de tangente a uma curva e, rejeitando a definição usual na época (tangente é a reta que toca numa curva apenas num ponto), apresenta a seguinte definição:

Tangente a uma curva num ponto dado, (sic) é a reta para que tende a secante que passa por esse ponto, e que gira em volta dele até que outro ponto de intersecção se confunda com o primeiro. (SERRASQUEIRO, 1927, p. 150-151, itálico no original)

Fiel a esta definição, o autor vai inicialmente construir a equação da tangente à circunferência num ponto pertencente à circunferência determinando o seu coeficiente angular através de uma secante que se vai aproximando do ponto de tangência. Apresenta depois um segundo processo que recorre à perpendicularidade entre a tangente e o raio da circunferência no ponto de tangência. A determinação da equação da tangente à circunferência a partir de um ponto não pertencente à circunferência é uma aplicação das fórmulas anteriores.

Em suma, as propostas didáticas de Serrasqueiro constituem-se como uma das primeiras abordagens ao tema da geometria analítica para o ensino secundário português. O seu capítulo de geometria analítica quase não contem exemplos e não encontramos nele nenhum exercício. Embora o autor não tenha optado por uma abordagem lógica formal, o seu texto está ancorado em definições e demonstrações detalhadas.

Concluindo

Este texto pretendeu contribuir para conhecer o modo como a geometria analítica foi integrada nos programas e em livros de texto portugueses abordando um manual de referência. Foi escolhido um autor de referência na época e, após estabelecer que, apesar de publicado em 1927, o texto tinha de facto sido elaborado nos primórdios da introdução do tópico no ensino secundário, foi possível elencar o modo como o autor

desenvolveu o tópico na ausência de uma tradição escolar consolidada sobre como ensinar geometria analítica no ensino secundário. As suas escolhas foram pois inovadoras, embora algumas delas tenham sido excluídas em futuros programas. Notámos ainda a predominância de uma abordagem seguindo o estilo de Descartes, seguindo a terminologia de Boyer, isto é, procurando mostrar como a álgebra esclarece alguns problemas de geometria. Ocasionalmente o estilo de Fermat foi também ser detectado, embora sem o desenvolvimento dado ao primeiro. Será interessante compreender em textos futuros os modos como os manuais dos autores que se seguiram abordaram o tópico.

Fontes primárias

ALMEIDA, C. A. **Apontamentos de Geometria analytica**. 1878.

BÉZOUT, É. **Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Troisième Partie**. Paris: Ph.-D. Pierres, 1781.

CARVALHO, J. **Primeiras noções de Geometria analytica**. Lisboa: Typ. Belenense, 1888.

COSTA, J. P. **Primeiras noções de Geometria analytica**. Lisboa: Bertrand, 1887.

CUNHA, J. A. D. **Principios mathematicos para instrucção dos alumnos do Collegio de São Lucas, da Real Casa Pia do Castello de São Jorge**. Lisboa: Off. Antonio Rodrigues Galhardo, 1790.

DESCARTES, R. **Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences , plus la dioptrique, les météores et la géométrie qui sont des essais de cette méthode**. Leyde: L'imprimerie de Jan Maire, 1637. Disponível em: < <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86069594?rk=321890;0> >.

FERMAT, P. D. **Oeuvres de Fermat / publiées par... Paul Tannery et Charles Henry.... T. III., Traductions par P. Tannery. 1 , Des écrits et fragments latins de Fermat . 2 , de l'Inventum Novum de Jacques de Billy. 3 , du commercium epistolicum de Wallis**. Paris: Gauthier-Villars, 1896. Disponível em: < http://numerique.bibliotheque.toulouse.fr/ark:/74899/B315556101_LMB_000906_003 >.

FORTES, M. **Logica racional, geometrica e analytica, obra utilissima e absolutamente necessaria para entrar em qualquer sciencia, e ainda para todos os homens que em seu particular, quizerem fazer uso do seu entendimento**. Lisboa: Oficina de José Antônio Plates, 1744.

FRANCOEUR, L. B. **Curso Completo de mathematicas Puras por L. B. Francoeur, traduzidos do Francez da ultima edição Tomo Primeiro / Primeira edição de Coimbra.** Coimbra: Imprensa da Universidade, 1838.

PORTUGAL. **Programas do ensino secundário.** *Diário do Governo*, 267, 23/11/1886, Lisboa, p. 3389-3394, 1886.

PORTUGAL. **Programas do ensino secundário.** *Diário do Governo*, 198, 31/11/1888, Lisboa, p. 2435-2440, 1888.

PORTUGAL. **Programas do ensino secundário.** *Diário do Governo*, 208, 16/9/1885, Lisboa, p. 2509-2528, 1885.

PORTUGAL. Decreto n.º 3, **Programas dos liceus.** *Diário do Governo*, 250, 4/11/1905, Lisboa, p. 3866-3873, 1905.

PORTUGAL. Decreto n.º 5.002, **Programas do Ensino Secundário.** *Diário do Governo*, 257, 28/11/1918, Lisboa, p. 2015-2034, 1918.

PORTUGAL. Decreto n.º 6.132, **Programas e quadros de distribuição das disciplinas do Ensino Secundário.** *Diário do Governo*, 261, 23/12/1919, Lisboa, p. 2562-2576, 1919.

PORTUGAL. Decreto n.º 18.885, **Programas do Ensino Secundário.** *Diário do Governo*, 225, 27/9/1930, Lisboa, p. 1995-2037, 1930.

PORTUGAL. Decreto n.º 20.369, **Programas para todas as classes do Ensino Secundário.** *Diário do Governo*, 232, 8/10/1931, Lisboa, p. 2166-2207, 1931.

PORTUGAL. Decreto n.º 24.526, **Programas do Ensino Secundário.** *Diário do Governo*, 235, 6/10/1934, Lisboa, p. 1793-1837, 1934.

PORTUGAL. Decreto n.º 25.414, **Programas do Ensino Secundário.** *Diário do Governo*, 121, 28/5/1935, Lisboa, p. 750-781, 1935.

SERRASQUEIRO, J. A. **Tratado Elementar de Trigonometria Rectilinea e Noções de Geometria Analytica segundo o programma official para o ensino d'esta sciencia nos lyceus / Obra approvada pelo Conselho Superior de Instrucção Publica.** 8.^a edição. Coimbra: Livraria Central de J. Diogo Pires, 1927.

Fontes secundárias

BOYER, C. **History of Analytic Geometry.** Mineola: Dover Publications, 1956/2012.
CHERVEL, A. L'histoire des disciplines scolaires. **Histoire de l' éducation**, v. 38, p. 59-119, 1988.

GUSSI, J. **O ensino da matemática no Brasil: análise dos programas de ensino do Colégio Pedro II (1837 a 1931)**. Tese de doutoramento. Piracicaba: Universidade Metodista de Piracicaba, 2011.

HENRIQUES, H. **O percurso da matemática no Ensino Técnico durante a monarquia**. Tese de doutoramento. Porto: Universidade Portucalense, 2004.

KARP, A.; SCHUBRING, G., Eds. **Handbook on the History of Mathematics Education**. Londres: Springer. 2014.

MATOS, J. M. Mathematics education in Spain and Portugal. Portugal. In: KARP, A. e SCHUBRING, G. (Ed.). *Handbook on the History of Mathematics Education*. London: Springer, 2014. p.291-302.

OLIVEIRA, M. C. A.; SOARES, S. R. O papel dos livros e das apostilas de Geometria Analítica na configuração de uma disciplina acadêmica. **Interfaces Científicas - Humanas e Sociais**, v. 5, p. 33-44, 2016.

RIBEIRO, S. **Um estudo sobre as “quantidades negativas” em José Joaquim Rivara**. Dissertação de mestrado. Braga: Universidade do Minho, 2009.

ROCHA, I. D. **A presença da Matemática na Escola Liceu Cuiabano: uma perspectiva histórica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, 2012.

SÁNCHEZ, I. M. A.; ASTUDILLO, M. T. G. L. Analytical geometry in An elementary treatise on plane and spherical trigonometry, and on the application of algebra to geometry by S. F. Lacroix. In: BJARNADÓTTIR, K.; FURINGHETTI, F., *et al* (Ed.). **“Dig where you stand” 3. Proceedings of the Third “International Conference on the History of Mathematics Education” September 25-28, 2013, at Department of Education, Uppsala University, Sweden**. Uppsala: Uppsala University, 2015. p.361-375. ISBN ISBN: 978-989-97487-2-9.

SILVA, C. Os “espinhos” da álgebra para Lacroix. **Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 13, n. 1, p. 219-237, 2011. ISSN ISSN 1983-3156.

SOARES, S. R. **Um estudo histórico do ensino de geometria analítica no curso de matemática da UFJF nas décadas de 1960 e 1970**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.

VALENTIM JÚNIOR, J. L. **A geometria analítica como conteúdo do ensino secundário: análise dos livros didáticos utilizados entre a Reforma Capanema e o MMM**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2013.