Revista de investigação e divulgação em Educação Matemática

A produção de significados para a noção de base a partir da leitura de livros-texto de Álgebra Linear

Amarildo Melchiades da Silva
Departamento de Matemática - UFJF
amarildo.melchiades@ufjf.edu.br

Janete Bolite Frant
Faculdade de Educação - UFRJ
janetebf@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta um estudo sobre a produção de significados para a noção de base em Álgebra Linear, para espaços vetoriais de dimensão finita, a partir da leitura de livros-texto. A questão que orientou nossa investigação foi: que significados matemáticos podem ser produzidos por um leitor para a noção de base a partir da leitura de livros-texto de Álgebra Linear? A base teórica que fundamentou o estudo foi o Modelo dos Campos Semânticos. Nesse contexto nossos informantes foram autores de livros com formação em Matemática. A leitura das obras permitiu identificar os diferentes significados matemáticos que podem ser produzidos para a noção de base.

Palavras-chave: Educação Matemática, Produção de significados, Ensino e aprendizagem, Álgebra Linear.

The production of meanings for the notion of base from the reading of textbooks of Linear Algebra

Abstract

This article presents a study on meaning production for the notion of Linear Algebra base. Our focus is on vector spaces with finite dimension as showed in textbooks. Our investigation question was: what mathematical meanings could be produced by a reader, of a textbook for Linear Algebra, to base for vector spaces? The theoretical foundation was the Model of Semantic Fields. Within this context our informants were book authors with mathematical backgrounf. It lead us to identify different mathematical meanings that could and can be produced for the base notion.

Keywords: Mathematics Education; Meaning Production, Teaching and Learning, Linear Algebra.

Introdução

No processo de transição da Álgebra Linear do campo de produção científica para a sala de aula, os livros tiveram um papel importante na divulgação da nova teoria. Principalmente na fase final de elaboração e popularização da teoria axiomática dos espaços vetoriais pois eles possibilitaram a organização das produções científicas da época. Podemos citar, por exemplo, a obra intitulada *Modern Algebra*, de Van Der Waerden, cuja primeira edição foi publicada em 1931. Segundo Dorier (1990) essa obra foi um passo a mais no esclarecimento das teorias algébricas da época e marcou, em particular, um progresso decisivo nos domínios da Álgebra Linear e na linearização da Álgebra. (cf. Dorier, 1990, p.78)

Nos dias atuais, o ensino desta teoria no meio acadêmico faz uso do grande número de livros disponíveis aos estudantes das mais diferentes áreas de conhecimento. Considerando este fato, pareceu-nos oportuno investigar o que pode ser dito sobre o objeto base, em um espaço vetorial de dimensão finita, a partir dessas obras.

Este artigo discute possíveis produções de significados para a noção de base quando um leitor se propõe a falar desse objeto a partir da leitura de livros-textos de Álgebra Linear. Nossa análise pretende sugerir que dependendo da leitura que as pessoas fazem do que o autor do livro escreve; diferentes significados matemáticos podem ser produzidos pelo sujeito que se constitui em um leitor e que podem não ser aqueles presentes nas expectativas do autor quando escreveu sobre o tema.

Porém, o ponto central do artigo é a nossa sugestão de que modos distintos de falar sobre base de um espaço vetorial de dimensão finita, implica, em diferentes produções de significados e, como consequência, diferentes conhecimentos sendo produzidos. Possivelmente esta consideração vai numa direção diferente da perspectiva de um matemático que poderia dizer se tratar apenas de definições equivalentes para o objeto base. O que também em termos de produção de significados é legítimo dizer. Porém, nosso interesse aqui vai em outra direção.

Entendemos que elucidar esses significados que podem partir da enunciação das pessoas e que muitas vezes, são entendidos com equivalentes pelo "expert" tem um papel importante para orientar os processos de ensino e aprendizagem de estudantes iniciantes no assunto.

Vale observar, que, neste momento, não estaremos interessados nos significados não matemáticos que poderiam ser produzidos para base. Estudos considerando significados não matemáticos para base e para outras noções da Álgebra Linear podem ser encontrados em Silva (1997, 2013), Oliveira (2002), Júlio (2007), Alves (2013) e Almeida (2013).

Assim, a questão que orientou nossa investigação foi: que significados matemáticos podem ser produzidos por um leitor para a noção de base a partir da leitura de livros-texto de Álgebra Linear? A base teórica que sustentará esta questão será apresentada na seção seguinte.

O Referencial Teórico e a Metodologia de Pesquisa

O lugar de onde partirá nossa análise e reflexões nesta pesquisa são os pressupostos presentes no Modelo dos Campos Semânticos proposto por Lins (por exemplo, LINS, 1999), um modelo epistemológico que em seu processo de construção partiu da seguinte formulação de conhecimento:

> Conhecimento é entendido como uma **crença** – algo que o sujeito acredita e expressa e que caracteriza-se portanto como uma **afirmação** – junto com o que o sujeito considera ser uma **justificação** para sua crença –afirmação. (LINS, 1993, p.86)

A extensão dessa concepção pode ser evidenciada nas suas próprias palavras:

> Indicamos, desta forma, que conhecimento é algo do domínio da enunciação – e que, portanto, todo conhecimento tem um sujeito – e não do domínio do enunciado; podemos também expressar esse fato dizendo que conhecimento é do domínio da fala, e não do texto. Desde este ponto de vista, a Matemática é um texto, e não conhecimento, tem-se conhecimento apenas na medida em que as pessoas se dispõe a enunciar este texto. A um conhecimento que fala a partir desse texto – a Matemática – chamaremos, naturalmente de conhecimento matemático. (LINS, 1994, p.29).

Esta consideração, ficará ainda mais clara, quando discutirmos o processo comunicativo logo a seguir. Porém, nos interessa realçar o fato de que segundo esta concepção não há, por exemplo, conhecimento em um livro de Álgebra Linear. Para o

MCS ali só existe – dito de uma maneira enfática na tentativa de elucidar a perspectiva – rabiscos a tinta em folhas de papel.

Na direção de nosso propósito, elucidaremos agora, as concepções de significado e produção de significados, que orientarão nossas argumentações. O termo produção de significados deve ser entendido no sentido proposto por Lins (2012) em que o significado de um objeto será entendido como aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre um objeto no interior de uma atividade[1]. Como consequência, dizer que um sujeito produziu significados é dizer que ele produziu ações enunciativas a respeito de um objeto no interior de uma atividade.

Assim, produzir significados não se refere a tudo o que numa dada situação o sujeito poderia ou deveria dizer de um objeto, mas sim o que ele efetivamente diz sobre aquele objeto no interior daquela atividade. E, como parte da produção de significados acontece a produção de conhecimento, no processo de produzir justificações para a enunciação de crenças-afirmações.

Outra noção central para a nossa discussão se refere ao nosso entendimento sobre o processo comunicativo. Este processo foi desenvolvido por Lins (1999) a partir de sua discordância com duas posições opostas: uma que assume a possibilidade de uma comunicação efetiva, no sentido de uma transmissão de uma mensagem do emissor ao receptor; outra que é a posição assumida por Jaques Derrida ao afirmar que o fato de conseguirmos nos comunicar é um acidente, sendo a norma a não comunicabilidade. (cf. DERRIDA, 1991)

Divergindo dessas posições, Lins formula uma nova proposta para o processo comunicativo cujos elementos constitutivos são: autor, texto e leitor. O autor é aquele que, no processo, produz a enunciação. O leitor é aquele que, no processo, se propõe a produzir significados para o resíduo das enunciações do autor. Já o texto é entendido como qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor produz algum significado. Sobre o que vem a ser um texto, Lins (2001) esclarece:

> Por um texto [...] entenderei não somente o texto escrito – como em Ecriture, de Derrida (1991), mas qualquer resíduo de uma enunciação: sons (resíduos de elocução), desenhos e diagramas, gestos e todos os

[1] Designamos pelo termo atividade "os processos que são psicologicamente determinados pelo fato de aquilo para que tendem no seu conjunto (o seu objeto) coincidir sempre com o elemento objetivo que incita o sujeito a uma dada atividade, isto é, com o motivo" (LEONTIEV, 1978, p.315).

> sinais do corpo. O que faz do texto o que ele é, é a crença do leitor que ele é, de fato, resíduo de uma enunciação, ou seja, um texto é delimitado pelo leitor; além disso, ele é sempre delimitado no contexto de uma demanda de que algum significado seja produzido para ele. (LINS, 2001, p.59)

Olhemos para o processo de comunicação, inicialmente, pela perspectiva do autor:

> Quando o autor fala, ele sempre fala para alguém. Porém, por mais que um autor esteja diante de uma platéia, este alguém não corresponde a indivíduos, pessoas nessa platéia e, sim, ao leitor que o autor constitui: é para este 'um leitor' que 'o autor' fala (LINS, 1999, p.81).

A este "um leitor" chamaremos de interlocutor. O interlocutor deve ser identificado como sendo uma direção na qual o autor fala e não com pessoas, com "rostos" com quem falamos, mas com modos de produzir significados.

Por outro lado, na perspectiva do leitor, ele "sempre constitui um autor, e é em relação ao que este 'um autor' diria que o leitor produz significado para o resíduo de enunciação e que neste momento se constitui (ou transforma) em texto". (LINS, 1999, p.82)

Sobre o leitor, Lins observa: "é apenas na medida em que o leitor fala, isto é, produz significados para o texto, colocando-se na posição de autor, que ele se constitui como leitor". (LINS, 1999, p.82)

Considerando esta perspectiva, os livros que analisaremos aqui serão considerados resíduos de enunciação para o qual um leitor produzirá significados para o objeto base.

Na análise da produção de significados de sujeitos, a partir do MCS, nosso olhar como leitores se dirige a observar alguns elementos[2] constitutivos da produção de significados. Neste estudo, em particular, observaremos os objetos, as estipulações locais, os núcleos, as operações e suas lógicas.

Assim, nesse processo observamos, por exemplo, quais objetos estão sendo constituídos pelo sujeito; isto é, as coisas sobre as quais ele sabe dizer algo e diz – o que

---

[2] Para aprofundar este tema veja Silva (2013)

nos permite observar tanto os novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados produzidos para esses objetos.

Além disso, no processo de produção de significados, existem algumas afirmações que a pessoa faz e que, tomando-as como absolutamente válidas, não sente necessidade de justificá-las. A essas crenças-afirmações, chamaremos de estipulações locais. E ao conjunto de estipulações locais constituídas no interior de uma atividade denominamos núcleo. Nesta direção, Lins (1997) comenta:

> Os elementos de um núcleo funcionam como estipulações locais: localmente são "verdades absolutas", coisas que assumimos sem que haja a necessidade de uma infinita cadeia regressiva de justificações. O que é importante e revelador é que esse "localmente" se refere ao interior de uma atividade, e que no processo dessa atividade esse núcleo pode se alterar pela incorporação de novas estipulações (elementos) ou pelo abandono de algumas estipulações até ali assumidas. (LINS, 1997, p.194)

Assim, nosso olhar se dirige também a formação de um núcleo: um processo que envolve as estipulações locais, as operações e sua lógica. Na observação dos núcleos, numa dada atividade, podemos identificar a maneira de operar dos sujeitos, bem como a lógica das operações ligadas ao processo de produção de significados para um texto. Segundo Lins e Gimenez (1997, p.114), "toda operação é realizada segundo uma lógica", e é essencial a investigação dessas lógicas se queremos entender aqueles que produzem significados. Nesse contexto, as operações dizem respeito ao que o sujeito faz com os objetos e a lógica é o que garante que ele pode fazer.

Esta pesquisa caracterizou-se como uma abordagem qualitativa de investigação no sentido proposto por Bogdan e Biklen (2013). O estudo se desenvolveu a partir de uma revisão bibliográfica em que foram analisados livros de Álgebra Linear. Assim nossos informantes foram matemáticos que se encontravam na posição de autores.

A seleção dos livros foi feita considerando aqueles, entre os vários analisados, que permitisse a partir da leitura do encaminhamento dado pelo autor para chegar à definição de base, identificar diferentes modos de produção de significados para este objeto. Seguindo esta proposta, os livros selecionados foram: Birkhoff e Maclane (1980), Boldrini e outros (1986), Carvalho (1979), Gonçalves (1978), Halmos (1978) e Steinbruch e Winterle (1987).

Textos matemáticos e a noção de base

Nesta seção procuramos responder à seguinte pergunta: que frases podem ser geradas para a noção de base de um espaço vetorial de dimensão finita, a partir da leitura de livros-texto? Para maior clareza e fidelidade das ideias reproduziremos as partes centrais desses textos matemáticos que nos levarão a tais frases.

Uma análise inicial das obras selecionadas evidenciou que todos os autores partiram da definição axiomática de espaços vetoriais, seguida da definição de subespaços vetoriais para chegar a noção de base. Sendo assim, começaremos nossa análise e descrição pela definição de combinação linear.

O primeiro livro analisado foi Gonçalves (1978) em que a definição de combinação linear é dada nos seguintes termos:

> Um vetor x é dito combinação linear dos vetores x_1, x_2, ... , x_n em V(K)[3] se existirem escalares c_1, c_2, ... , c_n em K , tais que $x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$. (GONÇALVES, 1978, p.70)

Em seguida ele apresenta a definição de geração de um espaço vetorial, a saber:

> Dizemos que o conjunto de vetores $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ em V (K) gera um espaço vetorial V (K) se todo vetor em V (K) puder ser escrito como combinação linear do conjunto $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$. (GONÇALVES, 1978, p.70)

Na sequência, ele introduz dependência e independência linear nos seguintes termos:

> Sejam $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vetores do espaço vetorial V (K). Consideremos a equação vetorial (*) $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n = 0$ Tal equação admite , pelo menos, a solução trivial $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Ele então apresenta a definição:

> Se a única solução da equação (*) for a solução trivial dizemos que o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é linearmente independente. Se a equação (*)

[3] V(K) representa um espaço vetorial V sobre o corpo K.

> admitir soluções não triviais dizemos que o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é linearmente dependente. (IBID, p.74)

Daí, o autor relaciona as noções de geração e independência linear para motivar a definição de base a partir do seguinte comentário:

> Os conjuntos de vetores $\{(1,0), (0,1)\}$ e $\{(1,2), (2,1), (3,3)\}$ são ambos geradores de IR^2. Tais conjuntos são distintos em natureza e em número de elementos. Observe que o primeiro conjunto de geradores é linearmente independente e o segundo é linearmente dependente. Os conjuntos geradores de um dado espaço vetorial V(K) que são linearmente independentes, são da maior importância no estudo da álgebra linear e recebem um nome especial. (IBID, p.79)

Ele então dá a definição:

> Uma base de um espaço vetorial é um conjunto ordenado de vetores do espaço, tais que: 1) são linearmente independentes, 2) geram o espaço vetorial.[4] (IBID, p.79)

A partir da leitura desse texto geramos a seguinte frase para base:

- Base de um espaço vetorial é um conjunto ordenado de vetores que possui as propriedades de gerar o espaço e ser linearmente independente.

Por sua vez, Birkhoff e Maclane (1980) apresentam a definição usual de base da seguinte maneira:

> Uma base de um espaço vetorial é um subconjunto linearmente independente que gera todo o espaço. (BIRKHOFF e MACLANE, 1980, p. 178)

Note que eles não se preocupam no momento da definição em impor que base seja ordenada. A seguir eles enunciam o seguinte teorema:

> Qualquer conjunto independente de elementos de um espaço vetorial V de dimensão finita é parte de uma base. (BIRKHOFF e MACLANE, 1980, p.178)

[4] Referiremos a essa definição, pela frequência com que aparece nos livros-texto, como definição usual de base.

A partir desse resultado eles retiram o corolário:

> Para que n vetores x_1, x_2, ... , x_n de um espaço vetorial n-dimensional forme uma base, é suficiente que eles gerem V ou que sejam linearmente independentes. (BIRKHOFF e MACLANE, 1980, p.179)

Este corolário garante que conhecendo-se a dimensão do espaço vetorial será suficiente verificar apenas uma das condições da definição usual de base, sendo a outra condição automaticamente válida. Essa é uma outra caracterização de base a partir da noção algébrica de dimensão. Sob a ótica do MCS, a justificação que inclui a noção de dimensão como estipulação local de um sujeito que se propõe a falar de base, a partir desse texto, caracteriza um conhecimento diferente daquele que fala a partir da definição usual. Então, a partir do corolário podemos gerar duas novas frases que motivam significados distintos para base, a saber:

- Uma base é um conjunto de vetores linearmente independente de um espaço vetorial tal que o número de vetores desse conjunto é igual a dimensão do espaço.

E,

- Uma base de um espaço vetorial é um conjunto de vetores geradores do espaço tal que o número de vetores desse conjunto é igual a dimensão do espaço.

Na continuação, Birkhoff e Maclane apresentam o seguinte texto:

> O significado real de uma base está no fato de que os vetores de qualquer base de F^n podem ser considerados como os vetores unitários do espaço, sob um sistema de coordenadas convenientemente escolhido. (BIRKHOFF e MACLANE, 1980, p. 193)

A afirmação realça a estreita ligação existente entre a noção de base e a de um sistema de coordenadas. Essa associação também é sugerida na definição proposta por Halmos (1978), a saber:

> Uma base (linear) (ou um sistema de coordenadas) em um espaço vetorial V é um conjunto X de vetores independentes tal que todo vetor em V é combinação linear de elementos de X. (HALMOS, 1978, p.19)

Na sequência Birkhoff e Maclane caminham na direção de mostrar que espaços vetoriais de dimensão finita n são isomorfos a F^n. Em linhas gerais, eles partem do seguinte teorema:

> Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V se, somente se, todo vetor de V puder ser escrito, de maneira única, como combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. (BIRKHOFF e MACLANE, 1980, p.193)

A demonstração deste teorema permite observar o papel das noções de geração e independência linear na constituição do objeto matemático base. Pode-se constatar que a noção de geração tem o papel de garantir que para todo $v \in V$ existe uma representação do vetor como combinação linear dos vetores básicos e a independência linear garantirá, por sua vez, que esta representação é única. Assim, na noção de base, pode-se dizer que enquanto a noção de geração está associada à existência de uma representação tal que todo vetor do espaço pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base, a independência linear está associada à unicidade dessa decomposição.

Daí eles enunciam o teorema do isomorfismo:

> Qualquer espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo F é isomorfo a um e somente um espaço F^n. (BIRKHOFF e MACLANE, 1980, p. 194)

Porém, a associação proposta em Birkhoff e Maclane e também por Halmos abre a perspectiva de que alguém venha a produzir significados que poderíamos chamar de "geométricos" para base. Isto é, uma leitura que sugere pensar em base como um sistema de coordenadas se baseia no fato de que se $\beta = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ é uma base de um espaço vetorial F^n, esses vetores básicos formam um sistema de coordenadas de F^n e os subespaços de F^n gerados por cada um dos v_i são os eixos coordenados do dado sistema de coordenadas. Desse modo, uma base é um sistema de coordenadas e a unicidade da representação de um vetor, como combinação linear de vetores básicos, nada mais é que a "decomposição" do vetor em suas coordenadas ao longo de vários eixos coordenados. Nessa linha de raciocínio o teorema apresentado acima poderia ser reformulado da seguinte maneira: As coordenadas de um vetor são determinadas de modo único pelo sistema de coordenadas. Isto nos leva a produzir uma outra frase para base, a saber:

- Uma base é um sistema de coordenadas.

Um outro encaminhamento pode ser identificado em Carvalho (1979). Após as definições de combinação linear, subespaços gerados, dependência e independência linear, ele apresenta a seguinte definição:

> Um conjunto finito S= $\{v_1, v_2, \ldots , v_n\}$ onde $v_i \in V$, i = 0, 1, ... , n é linearmente independente maximal se:
>
> l) os vetores $v_1, v_2, \ldots , v_n$ são linearmente independentes;
>
> 2) qualquer que seja o vetor $v \in V$, os vetores $v_1, v_2, \ldots , v_n, , v$ são linearmente dependentes. (CARVALHO, 1979, p. 23-4)

Ele então define espaço vetorial de dimensão finita:

> Um espaço vetorial V sobre um corpo K é de DIMENSÃO FINITA se existe um inteiro positivo N tal que N vetores quaisquer do espaço são linearmente dependentes. (CARVALHO, 1979, p. 24)

Em seguida ele enuncia o lema:

> Em um espaço vetorial V de dimensão finita existem conjuntos linearmente independentes maximais. (CARVALHO, 1979, p.25)

Esse lema dá condições para que o autor apresente a seguinte definição de base:

> Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ formam uma base finita para V sobre K se o conjunto $\{ v_1, v_2, \dots, v_n \}$ é linearmente independente maximal. Ou seja,, base finita é outra denominação para um conjunto linearmente independente maximal. (CARVALHO, 1979, p.25)

A leitura do texto produzido por Carvalho nos induz a gerar a seguinte frase para base:

- Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto linearmente independente maximal.

Por outro lado, a leitura de Steinbruch e Winterle (1987) indicou-nos uma sequência de apresentação do conteúdo bastante próxima daquela proposta por outros autores e autoras, por exemplo, Gonçalves (1978) e Boldrini e outros (1986). Porém, chamou-nos a atenção a ênfase dada a noção de geração em relação aos autores mencionados. Steinbruch e Winterle reservam um parágrafo para discutir a idéia de subespaços gerados e outro para definir espaços finitamente gerado. Existe também um detalhamento das noções de dependência e independência linear.

Passaremos, agora, a analisar o projeto desses autores para chegar à definição de base, segundo nossa perspectiva.

Após a caracterização de subespaços gerados eles apresentam algumas propriedades dos conjuntos geradores que vão culminar na definição de base.

Por simplicidade considere o exemplo: Seja o espaço vetorial $V = IR^2$. Considere os seguintes conjuntos geradores deste espaço: $\{(1,0),(0,1)\}$, $\{(1,0),(0,1),(2,3)\}$ e $\{(1,0),(0,1), (2,3),(0,0)\}$. Temos que:

$$IR^2 = [(1,0), (0,1)] = [(1,0), (0,1),(2,3)] = (1,0), (0,1), (2,3), (0,0)].$$

Note que podemos afirmar que $[(1,0), (0,1)] = [(1,0), (0,1), w]$ desde que w seja combinação linear de (1,0) e (0,1). Pois assim todo vetor u que for combinação linear de (1,0), (0,1) e w, também será combinação linear de (1,0) e (0,1).

Eles provam este resultado para o caso geral: “Dados n vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ de um espaço vetorial V, se w e V é tal $w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ então: $[v_1, \dots, v_n , w] = [v_1, \dots, v_n]$, pois todo vetor v que é combinação linear de $v_1, \dots, v_n$”, w é também combinação linear de $v_1, \dots, v_n$” (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987, p.46)

Daí segue o seguinte comentário:

Assim, sendo S um subespaço gerado por um conjunto A, ao acrescentarmos vetores de S a esse conjunto A, Os novos conjuntos continuarão gerando o mesmo subespaço S. Esse fato faz entender que um determinado subespaço S pode ser gerado por uma infinidade de vetores, porém existe um número mínimo de vetores para gerá-lo. (IBID, p. 47)

Eles "mostram" através de exercícios a afirmação acima e propõe, por exemplo, o seguinte exercício: "Seja V = IR^3. Determinar o subespaço gerado pelo conjunto A = { v_1, v_2} sendo v_1 = (1, -2, 1) e v_2 = (2, 1, 1)". (STEINBRUCH e WINTERLE, 1987, p.49)

A resolução do exercício nos dá: [v_1, v_2]= {(x, y, z) $\in$ IR^3: x + 3y - 5z = 0}. Eles então comentam: "o subespaço gerado pelos vetores v_1, v_2 $\in$ IR^3, não-colineares, é um plano π que passa pela origem (fig.1). Se a esses dois vetores acrescentarmos v_3, v_4 , ... vetores continuará sendo o mesmo plano π : [v_1, v_2] = [v_1, v_2 , v_3] = [v_1, v_2 , v_3, v_4] = ..." (fig.2) (vide p.70). Segue a isto a representação gráfica:

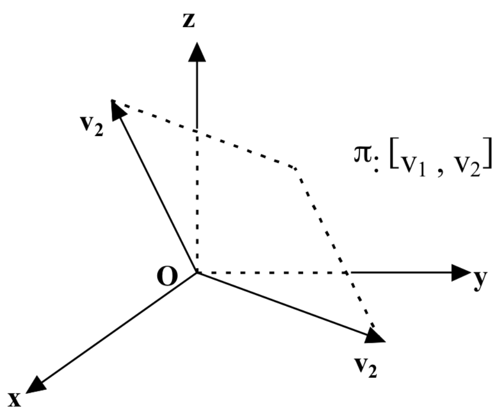

Figura 1

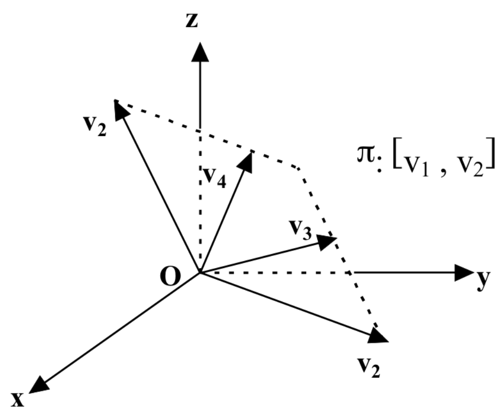

Figura 2

Em seguida eles propõem e resolvem outro exemplo, análogo ao anterior, onde o conjunto A escolhido é {(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)}; que possui a propriedade de gerar o IR^3.

Considerando então este exemplo, Steinbruch e Winterle retornam à análise anteriormente feita. Eles chamam a atenção para o fato de que o IR^3 pode ser gerado por um número mínimo de três vetores, não possuindo um número máximo de vetores para gerá-lo. Então observam que se o conjunto gerador possui mais de três vetores, existirão aí vetores que poderão ser excluídos sem que com isto o conjunto perca a propriedade de se expressarem como combinação linear dos vetores do conjunto gerador.

Como consequência dessa análise, Steinbruch e Winterle expressam novamente o interesse por conjuntos geradores que sejam o menor possível.

Este é, portanto, o elo necessário entre o conceito de geração e o de independência linear que constituirá o conceito de base. Para chegar a isto poderia ser colocada a seguinte pergunta: Para determinar o menor conjunto gerador de um espaço vetorial qual propriedade além da geração do espaço este conjunto deverá possuir?

Portanto, por este caminho, o leitor deveria perceber que, por exemplo, enquanto conjuntos como {(1,0), (0,1)} e {(1,0), (0,1), (2,3)} geram o mesmo espaço vetorial, por outro lado, eles possuem uma propriedade diferenciadora. No primeiro caso nenhum vetor pode ser escrito como combinação linear do outro e caso um deles seja retirado do conjunto, este perderá a propriedade de geração do espaço. Já no segundo caso, temos que (2,3) = 2(1,0) + 3(0,1) isto é, o vetor (2,3) é combinação linear de (1,0) e (0,1). Assim, caso este vetor seja retirado do conjunto gerador, tal conjunto não perderá sua propriedade de gerar o espaço. Este é, portanto, um vetor supérfluo. Além disso, este novo conjunto gerador adquire a propriedade de que todo vetor do espaço será escrito como combinação linear, de modo único, dos vetores desse conjunto.

A partir desse texto produzimos a seguinte frase:

- Uma base de um espaço vetorial V é um conjunto gerador sem vetores supérfluos ou um conjunto gerador minimal.

Assim, nossa leitura dos textos matemáticos - definições, teoremas, propostas de encaminhamento do autor - nos permitiram gerar algumas frases a partir das quais poderemos expressar os significados matemáticos. O parágrafo seguinte será dispensado à discussão de como as frases propostas podem caracterizar diferentes Campos Semânticos, entendido como a atividade de produzir significado em relação a um núcleo.

Possíveis Produções de significados

A fim de identificar possíveis significados que podem ser gerados a partir de núcleos constituídos pelos significados matemáticos, apresentaremos uma tarefa de sala de aula, presente nos livros de Álgebra Linear onde justificações são elaboradas por sujeitos envolvidos na atividade de resolver o exercício proposto pelo enunciado: “Sejam o espaço vetorial IR^3 e o conjunto A= {u = (1,0,0), v = (0,1,-1), w = (0,0,2)}. Mostre que A é uma base de IR^3.”

Consideremos então a justificação dos sujeitos envolvidos nessa atividade:

Adilson[5] - *Queremos mostrar que o conjunto A é linearmente independente e gera o espaço vetorial IR^3 . No conjunto de vetores A, u é o primeiro vetor, v é o segundo e w é o terceiro vetor. Sabemos que um sistema homogêneo sempre tem solução e que sistemas possíveis e determinados tem solução única; que no caso do sistema linear ser homogêneo a solução é a nula. Assim, se tomarmos a equação* $a(1,0,0) + b(0,1,-1) + c(0,0,2) = (0, 0, 0)$, *seremos levados a um sistema homogêneo, que escalonado nos indica que a solução encontrada será $a = b = c = 0$, o que implica que o conjunto A é linearmente independente. Por outro lado, tomando o vetor genérico $t = (x, y, z)$, representante de todos os vetores de IR^3, devemos verificar se existem escalares* a_1, a_2, a_3, *tal que* $t = a_1u + a_2v + a_3w$. *Essa equação leva a um sistema de equações lineares. Todo sistema linear é equivalente a um sistema escalonado. Assim, o sistema acima ao ser escalonado produz um sistema equivalente escalonado e nos informa que é possível e determinado, o que implica que os escalares existem. Portanto, todo vetor do espaço se escreve como combinação linear dos vetores de A, isto é, A gera o espaço vetorial IR^3. Portanto A é uma base ordenada de IR^3.*

A leitura da enunciação de Adilson sugere a constituição dos seguintes objetos: vetores, conjunto de vetores, sistema de equações lineares, vetor genérico, combinação linear, independência linear, geração de um espaço vetorial, base. Suas estipulações locais são:

- Vetor genérico é o vetor representante de todos os vetores do espaço;

- Os vetores do conjunto A estão ordenados, isto é, o primeiro é u; o segundo é v e o terceiro é w.

[5] A utilização, neste momento, do primeiro nome dos autores dos livros analisados como sendo o nome dos sujeitos da enunciação tem um duplo propósito: primeiro, sugerir que da perspectiva do MCS, todo conhecimento tem um sujeito e segundo, para indicar os significados que um leitor poderia produzir para o que foi escrito por aquele autor.

- Um sistema homogêneo é sempre possível e se possui solução única, esta solução é a nula.

- Todo sistema é equivalente a um sistema na forma escalonada;

- Sistema linear possível e determinado possui solução única;

Portanto, o núcleo de Adilson é constituído por essas estipulações locais. Ele opera com a ideia de que se um conjunto é linearmente independente e gera o espaço, ele é base. A lógica das operações diz respeito aos sistemas de equações lineares para obter as informações que necessita a partir da análise dos sistemas escalonados. Por exemplo: se o sistema linear homogêneo tem solução única, o conjunto é linearmente independente. Se o sistema não homogêneo admite solução para todo x, y e z, então o conjunto gera o espaço vetorial.

Por outro lado, uma outra enunciação seria:

Garret: - *"O* IR^3 *é um espaço vetorial. Podemos criar uma matriz "simbólica" em que suas linhas são os vetores do conjunto A. Podemos efetuar as operações elementares nas linhas da matriz até chegarmos a uma matriz equivalente, na forma escalonada. Fazendo isto e escalonando a matriz, concluímos que ele não possui uma linha nula na forma escalonada, logo A é linearmente independente. A dimensão do* IR^3 *é 3 e como A é um conjunto com três vetores e é linearmente independente então A é uma base de* IR^3.

A enunciação de Garret sugere que ele, ao falar, vai constituindo os seguintes objetos: o espaço vetorial IR^3, vetores, dimensão, matriz, independência linear, base. Suas estipulações locais são:

- É possível criar uma matriz onde suas linhas são vetores do espaço.
- Uma matriz possui uma equivalente na forma escalonada.
- Uma matriz escalonada, cujas linhas são constituídas por vetores de um conjunto A, em que não ocorre uma linha de zeros, é linearmente independente.
- O espaço vetorial IR^3 tem dimensão 3.

Assim seu núcleo é constituído por estas estipulações locais. Ele opera com a ideia de que uma base de um espaço vetorial é um conjunto linearmente independente desse espaço em que o número de vetores é igual a dimensão do espaço. A lógica das operações utilizada é o fato de que é possível formar uma matriz simbólica – apenas para expediente de cálculo – em que suas linhas são os vetores do conjunto. Ao escalonar a matriz, se não ocorrer uma linha de zeros na matriz escalonada, então é possível concluir que o conjunto em questão é linearmente independente.

Uma comparação entre a produção de significados de Adilson e de Garret, sugere que a suas constituições de objetos, seus núcleos, suas operações e lógicas são diferentes. Note que a noção de geração não é constituída em objeto ou crença-afirmação por Garret. Isto sugere, que eles estão operando em Campos Semânticos diferentes.

Consideremos agora que a enunciação de Saunders para a tarefa proposta seja:

Saunders: - *"Consideremos o vetor genérico t = (x, y, z), representante de todos os vetores de IR^3. Devemos verificar se existem escalares* a_1, a_2, a_3, *tal que t =* $a_1u + a_2v + a_3w$. *Resolvendo a equação chegamos a um sistema de equações lineares. Se o sistema for possível e determinado ele possui solução única. Além disso, devemos obter um sistema escalonado, pois todo sistema linear é equivalente a um sistema na forma escalonada. Escalonando o sistema, obtemos o sistema na forma escalonada cujo número de equações restantes e igual ao número de incógnitas, logo, o sistema é possível e determinado. O que implica que os escalares existem. Portanto, todo vetor do espaço se escreve como combinação linear dos vetores de A, isto é, A gera o espaço vetorial IR^3 e como a dimensão do* IR^3 *é 3, A é uma base de IR^3.*

A produção de significados de Saunders sugere que ele, ao falar, constitui os objetos, vetor genérico, o IR^3, como espaço vetorial, equação, sistemas de equações lineares, geração de um espaço vetorial, dimensão, combinação linear, base. Suas estipulações locais são:

- Vetor genérico é o vetor representante de todos os vetores do espaço;
- Sistema possível e determinado possui solução única;
- Todo sistema é equivalente a um sistema na forma escalonada;
- Sistema possível e determinado possui solução única;
- O espaço vetorial IR^3 tem dimensão 3.

Assim seu núcleo é constituído por estas estipulações locais. Saunders opera com a ideia de que se um conjunto de três vetores gera um espaço vetorial de dimensão

3, ele é uma base desse espaço. A lógica das operações é utilizar sistemas de equações lineares para obter as informações que necessita a partir da análise dos sistemas escalonados. Considerando, por exemplo, que se o sistema não homogêneo admite solução para todo x, y e z, sem restrições às variáveis, então o conjunto gera o espaço vetorial. Daí conhecendo a dimensão do espaço é só contar o número de vetores do conjunto gerador, para concluir que é uma base.

Note que, em relação a produção de significados de Garret, Saunders não opera com o objeto independência linear. Ele opera com o objeto geração de um espaço vetorial. Isto sugere que eles produzem significados diferentes para o objeto base.

Vejamos a gora a justificação de Paul para a tarefa proposta. Ele diz:

Paul: -*"O* IR^3 *é o espaço tridimensional, os vetores de A não são colineares nem coplanares, eles têm direções diferentes. Eu tenho, então, três vetores com direções diferentes e cada um define um eixo coordenado. Assim, A representa, geometricamente, um sistema de coordenadas oblíquas de* IR^3 *determinado pelos vetores u,v e w. Assim, todo vetor do* IR^3 *pode ser representado como combinação linear dos vetores de A. Então, A é uma base de* IR^3.

A produção de significados de Paul, sugere que ele opera com os objetos vetores (como segmentos orientados), o IR^3 como um sistema tridimensional de eixos. Suas estipulações locais são:

- Cada vetor de A gera um eixo coordenado;
- O IR^3 é o espaço tridimensional;
- Se três vetores não são coplanares e nem colineares, eles definem três eixos coordenados;
- Sistemas tridimensionais de eixos não são, necessariamente, ortogonais.
- Todo vetor do IR^3 pode ser representado como combinação linear dos vetores de A.

Assim estas estipulações constituem o núcleo de Paul. Ele opera com a ideia que uma base de IR^3 representa um sistema de eixos coordenados. Assim, ele opera segundo uma lógica que poderia ser: se tenho três vetores em direções diferentes, cada um gera um eixo coordenado. Logo, tenho um sistema de eixos oblíquos que caracterizam o espaço tridimensional. Assim, todo vetor do IR^3 pode ser representado como combinação linear dos vetores de A, isto é, A é uma base de IR^3.

Por outro lado, temos a seguinte enunciação sobre a resolução da tarefa:

João: - *Sabemos que um sistema linear homogêneo é sempre possível. Um sistema linear homogêneo ou tem uma única solução ou ele tem infinitas soluções. O conjunto A é linearmente independente pois a única solução da equação vetorial homogênea au + bv + cw = 0 é a lista (0,0,0). Um conjunto linearmente independente não é necessariamente uma base. Observamos que qualquer outro vetor v que for incluído no conjunto A se escreve como combinação linear dos vetores de A, transformando A em um conjunto linearmente dependente. Assim, A é o maior conjunto L.I. de* IR^3. *Isto é, A é uma base de* IR^3.

Os significados produzidos por João sugerem que ele opera com os seguintes objetos: vetores como ternas de números reais, conjunto linearmente independente e linearmente dependente, equação vetorial, sistema homogêneo. Suas estipulações locais são:

- Um sistema linear homogêneo é sempre possível.
- Um sistema homogêneo possui solução única ou infinitas soluções.
- Se um conjunto é linearmente independente ele não é necessariamente uma base de um espaço vetorial.

Estas estipulações locais constituem o núcleo a partir de onde João opera. Como consequência, a operação é identificar se o conjunto A é o maior conjunto linearmente independente do espaço vetorial IR^3. A lógica das operações é: a resolução do sistema linear homogêneo informa se o conjunto é linearmente independente ou linearmente dependente e se a inserção de novos vetores ao conjunto A o torna linearmente dependente então é linearmente independente maximal.

A produção de significados de Alfredo vai em outra direção como, como podemos observar:

Alfredo: - *"Sabemos que subespaços vetoriais de IR^3 podem ter dimensões 0, 1, 2 e 3. O conjunto formado por {u = (1,0,0)} gera um subespaço vetorial de IR^3 de dimensão 1. E o conjunto {u = (1,0,0), v = (0,1, -1)} gera um subespaço vetorial de IR^3, agora de dimensão 2. Observamos que o conjunto A = {u = (1,0,0), v = (0,1,-1), w = (0,0,2)} gera o IR^3, pois todo vetor v = (x,y,z) se escreve como combinação linear de u, v e w. Daí qualquer vetor que incluirmos nesse conjunto gerador, será um vetor supérfluo, pois u, v e w já geram o espaço vetorial. Logo, A é um* *conjunto gerador com o mínimo de vetores que geram o espaço de dimensão 3. A é uma base de IR^3.*

A produção de significados de Alfredo sugere que ele, ao falar, constitui os objetos, vetor, vetor supérfluo; IR^3, como espaço vetorial, equação, geração de um espaço vetorial, dimensão, combinação linear, base. Suas estipulações locais são:

- Subespaços vetoriais de IR^3 tem dimensão menor ou igual a 3;
- O conjunto formado pelo vetor u gera um subespaço vetorial de IR^3 de dimensão 1;
- O conjunto formado pelo vetor u, v gera um subespaço vetorial de IR^3 de dimensão 2;
- Um vetor é supérfluo se sua inclusão no conjunto gerador não altera a geração do espaço;
-

Estas estipulações locais constituem seu núcleo. Ele opera com a ideia de que um conjunto gerador minimal de três vetores no espaço vetorial IR^3 é base de IR^3. A lógica das operações é: se um conjunto de três vetores gera um espaço vetorial de dimensão 3, a inserção de um novo vetor ao conjunto gerador, não altera a geração do espaço, isto é, este vetor é supérfluo e, portanto, este conjunto é uma base desse espaço.

Uma leitura global sugere, por exemplo, que comparando as justificações de Garret e Saunders à justificação de Adilson, vemos que aqueles incorporam ao núcleo a noção algébrica de dimensão. Como já mencionamos anteriormente, sob a ótica do MCS isso altera a produção de significados. A noção de dimensão, para esses sujeitos, é uma estipulação local e, portanto, passa a constituir o núcleo.

Por outro lado, observamos a atividade de produzir significado em relação a um núcleo constituído pela noção de conjunto linearmente independente maximal ou de conjunto gerador minimal envolve a constituição de diferentes modos de produzir significados.

Esses são, portanto, alguns campos semânticos onde uma pessoa pode operar a partir dos significados matemáticos.

Algumas considerações finais

Nossa leitura dos livros nos permitiu gerar frases a partir das quais apresentamos possíveis significados matemáticos para a noção de base. Para isto, assumimos a posição de um leitor ideal que possuía o poder de ler nas entrelinhas dos textos matemáticos, interpretando teoremas e corolários; relacionando as diversas noções constitutivas da noção de base, que em geral se apresentam de forma dissociada nos livros. Além disso, naquela ocasião assumimos como estipulações locais as noções que eram apresentadas linearmente precedendo a noção de base e que seriam constitutivas - do ponto de vista dos significados matemáticos - da noção de base. Buscávamos com isso reproduzir a crença de muitos professores de que colocando à disposição todos os elementos prévios que comporão a definição de base este objeto estaria então constituído. Por exemplo, após as definições de espaço vetorial, combinação linear, independência linear e geração todos os elementos constitutivos do objeto base estariam à disposição; logo ao acumular estas informações o sujeito teria condições de saber o que é base.

Por outro lado, a partir desse estudo sugerimos que há vários significados matemáticos para a noção de base. Em consequência disso chamamos a atenção para o fato de que outros leitores podem vir a gerar outras frases para os textos matemáticos analisados e constituir novos núcleos a partir de onde operarão produzindo significados.

Reiteramos que existem pessoas que dirão que todas as frases geradas são equivalentes e, portanto, expressam um único significado para a noção de base. Mas, sob a ótica do MCS, se uma pessoa em suas justificações usa a noção algébrica de dimensão e de geração na constituição da noção de base e outra pessoa justifica falando de conjunto linearmente independente maximal; teremos aí justificações distintas alterando a produção de significados. Assim, para o pesquisador que fundamenta sua análise no MCS os significados que podem ser produzidos a partir das frases geradas, constitui-se, como sugerimos, em núcleos distintos, que caracterizam diferentes campos semânticos.

Referências

ALMEIDA, Vitor R. **Álgebra Linear como um curso de serviço para a licenciatura em Matemática: o estudo das transformações lineares**. 2013. 172p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

ALVES, Aretha F. **Álgebra Linear como um curso de serviço para a licenciatura em Matemática: o estudo dos espaços vetoriais**. 2013. 176p. Dissertação (Mestrado em

Educação Matemática) Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

BIRKHOFF, G.; MACLANE, S. **Álgebra Moderna Básica**. 4 ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

BOGDAN, R. BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 2013.

BOLDRINI, L.J. e outros. **Álgebra linear**. 3 ed. São Paulo: Harbra, 1986.

CARVALHO, J.B. **Álgebra Linear: introdução**. 2 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos / Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 1979.

DERRIDA, J. **Limited inc**. Campinas/SP: Papirus, 1991.

DORIER, Jean-Luc. **Analysis historique de l'emergence des concepts élémentaires d'algebre linéaire.** Chier Didirem n.7, IREM de Paris 7, 1990.

GONÇALVES, A. **Introdução à álgebra linear**. São Paulo: Edgard Blücher, 1978.

HALMOS, P. **Espaços Vetoriais de Dimensão Finita**. Rio de Janeiro: Campus, 1978.

JULIO, Rejane S. **Uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para dimensão**. Rio Claro: 2007, 118p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

LEONTIEV, A. N. **O Desenvolvimento do psiquismo**. São Paulo: Editora Moraes, 1978.

LINS, R.C. Epistemologia, história e educação matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. Campinas/SP: **Revista Dynamis**, 1(7)75-91, set, 1993.

LINS, R.C. O Modelo dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. Blumenau: **Revista da SBEM-SP**, 1(1)29-39, abril/ Junho, 1994.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. 4. ed. Campinas: Papirus, 1997. (Coleção perspectivas em Educação Matemática)

LINS, R.C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999. p. 75-94.

LINS, R.C. The production of meaning for álgebra: a perspective based on a theorical model of semantic fields. In: SUTHERLAND, R. et al (Ed.) **Perspectives on school algebra**. London: Kluver Academic Publishers, 2001.

OLIVEIRA, Viviane C.A. de. **Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear**. Rio Claro: 2002, 187p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

SILVA, Amarildo M. **Uma análise da produção de significados para a noção de base em álgebra linear.** Rio de Janeiro: 1997, 162p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Departamento de Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula/USU.

SILVA, Amarildo M. Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática. **JIEEM- Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. V.6(2), 2013, p.1-30.

STEINBRUCH, A. ; WINTERLE, P. **Álgebra linear**. 2 ed. São Paulo: Mcgraw-Hill, 1987.

WAERDEN, Van D. **Modern Algebra**. New York: Frederick Ungar Publishing C.O., 1949.