Instrumento
revista de estudo e pesquisa em educação

DOI 10.34019/1984-5499.2019.v21.27840 | ISSN 1984-5499

A dialética de ostensivos e não-ostensivos no contexto da álgebra escolar

The dialectic of ostensive and non-ostensive in the context of school algebra

La dialéctica de lo ostensivo y lo no ostensivo en el contexto del álgebra escolar

Manoel Lucival da Silva Oliveira[1]
Professor da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará, Belém/PA, Brasil
Gleison de Jesus Marinho Sodré[2]
Professor da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará, Belém/PA, Brasil

Recebido em: 31/08/2019
Aceito em: 17/10/2019

Resumo
Neste trabalho problematizamos sobre que condições a dialética de objetos ostensivos/não-ostensivos pode contribuir para o ensino da álgebra escolar. Nesse sentido, o objetivo deste trabalho é criar condições para o ensino da matemática escolar, em particular, a noção de operações com polinômios a partir de materiais manipulativos, tomando como base o uso de objetos geométricos, em que assumimos como pressuposto teórico as noções da teoria antropológica do didático. Os resultados obtidos apontaram que o uso de materiais manipulativos inspirados na Geometria Plana deu sentido e significado ao ensino da álgebra escolar, além de apontar fatores determinantes na construção de saberes do discente, como a noção de Geometria Analítica e novas formas de relações com problemas polinomiais.
Palavras-chave: Educação Matemática. Dialética ostensivo/não-ostensivo. Teoria Antropológica do Didático.

Abstract
In this paper we discuss the conditions the dialectic of ostensive/non-ostensive objects can contribute to the teaching of school algebra. In this sense, the objective of this work is to create conditions from manipulative materials, based on the use of geometric objects, which we assume as theoretical assumption the notions of anthropological theory of didactics. The results showed that the use of manipulative materials inspired by geometric materials gave sense and meaning to the teaching of school algebra, besides pointing out determining factors in the construction of student knowledge, such as the notion of analytical geometry and new forms of relationships with polynomial problems.
Keywords: Mathematical education. Ostensive/non-ostensive dialectic. Anthropological Theory of Didactics.

Resumen
En este trabajo problematizamos en qué condiciones la dialéctica de los objetos ostensivos / no ostensivos puede contribuir a la enseñanza del álgebra escolar. En este sentido, el objetivo de este trabajo es crear condiciones para la enseñanza de matemáticas, en particular, la noción de operaciones con polinomios, a partir de materiales manipulativos, basados en el uso de objetos geométricos, donde asumimos como presuposición

[1] E-mail: mlso@ufpa.br
[2] E-mail: profgleisoneaufpa@gmail.com

teórica las nociones de la teoría antropológica de la didáctica. Los resultados mostraron que el uso de materiales manipuladores inspirados en materiales geométricos proporcionó sentido y significado a la enseñanza del álgebra escolar, además de señalar factores determinantes en la construcción del conocimiento del estudiante, como la noción de geometría analítica y nuevas formas de relación con problemas polinómicos.
Palabras clave: Educación Matemática. Dialéctica ostensiva / no ostensiva. Teoría Antropológica. de la Didáctica.

Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais da Matemática, daqui em diante, PCN (BRASIL, 1997) revela a existência de um consenso que o ensino de matemática, de modo mais específico na posição do Ensino Fundamental da escola básica, deve considerar "o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria)" (BRASIL, 1997, p. 38) e, de modo mais inclusivo, as relações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria (BRASIL, 1997).

Nessa perspectiva, o ensino de álgebra escolar parece considerar, como modelo dominante, a aritmética generalizada, sobretudo, quando analisamos os trabalhos de Chevallard (1989), Gascón (1999), Gascón, Bosch e Bolea (2001) e mais recente os de Pereira (2017), que encaminham uma caracterização da álgebra escolar em relações com outros objetos de ensino, como os sistemas de numerações ou a aritmética prática, que nos remetem diferentes modelos epistemológicos, isto é, distintos modos de compreensões sobre a álgebra a partir de relações com a aritmética ou com a geometria, que parece dominante nas instituições de ensino da escola básica.

Segundo Chevallard (1989) uma análise com maior detalhamento da organização da matemática escolar, que encaminha muitos aspectos da algebrização não vão muito além da aritmética generalizada, o que configura impedir em algum momento, uma dependência do aspecto numérico em relação ao algébrico. Essa compreensão, levou o autor a postular a álgebra como uma certa generalização da aritmética.

Essa compreensão revela, em algum sentido, a estreita relação da álgebra com outros modelos epistemológicos, nesse caso, assentado nas ideias da aritmética prática que funcionam como uma matriz de percepção, apreciação e ação que podem ser transferidas para as experiências algébricas. Nesta perspectiva, temos que as relações algébricas são dotadas de sentidos a partir de noções numéricas, que funcionam como *filtro de percepção* (CHEVALLARD, 2005) para o sujeito criar novas relações com a álgebra escolar.

Pereira (2017, p.85) destaca, a partir de enfoques histórico-epistemológicos, que “a Álgebra Elementar Escolar, perpassa pelos modelos da Aritmética Generalizada, Geometria e Cálculo Algébrico Funcional”. Ou seja, esses enfoques são conectados por meio da álgebra escolar de maneira que possa contribuir no processo de ensino, mediado por relações com outros objetos de ensino, tais como as noções da Geometria. Essas evidências, destacadas pelo autor, se apoiam em “algumas obras de diferentes épocas: Girard (1634,1884); Viète (1630); Maclaurin (1753); Lacroix (1799); Peacock (1842, 1845); Burat (1876); Pereira (2017).”

Recortes do estudo de Pereira (2017) sobre a álgebra escolar revelam, por exemplo, que a álgebra Elementar de Viète (1630) inspira-se em noções da Geometria Euclidiana e toma maiores proporções nos dois primeiros volumes da obra de Peacock (1842,1845). No segundo volume desse autor, notamos que as investigações são ampliadas em relação ao primeiro volume, em que se destaca:

> O simbolismo algébrico alcança a Geometria. Essa característica vinculada a Geometria, surgiu na obra de Viète (1630), mas em Peacock está anunciada como aplicações à Geometria de Posição. O cálculo algébrico de medidas de áreas de figuras geométricas consta no texto praxeológico do autor, assim como, a obtenção da expressão algébrica para o volume de um sólido retangular (PEREIRA, 2017, p. 84).

O extrato de texto do autor parece claro sobre o papel do modelo geométrico utilizado para articulação de objetos algébricos que vivem no ambiente escolar. Essa compreensão encaminha a forma de conceber novos sentidos e significados ao estudo dos objetos algébricos, onde se inclui o estudo de polinômios.

De outro modo, Pereira (2017) confirma essa compreensão a partir da explicação de Viète (1630, p. 27) quando assim se expressa:

> Quando ele estabelece que Q C C C C C corresponde a 17 quantidades (soma dos expoentes: 2 + 3 + 3 +3 + 3 +3). Algebricamente, temos $Q = x^2$, $C = x^3$, $QQ = x^2x^2 = (x^2)^2 = x^4$, $Q\ C = x^2.x^3 = x^3.x^2 = x^5$, $C\ C = x^3.x^3 = (x^3)^2 = x^6$, $Q\ Q\ C = (x^2)^2.x^3 = x^7$, $Q\ C\ C = (x^2.x^3).x^3 = x^8$ e $C\ C\ C = x^3.x^3.x^3 = (x^3)^3 = x^9$ (PEREIRA, 2017, p. 55).

Ainda seguindo o que nos diz Pereira (2017), a álgebra de Viète está em dialética com a geometria, como parece claro a partir do extrato do texto: “Os tipos de grandezas comparativas de ordem e utilização das escalares são, P (plano), S (sólido), P P (plano-plano), P S (plano-sólido), S S (sólido-sólido), P P S (plano-plano-sólido), P S S (plano-sólido-sólido) e S S S (sólido-sólido-sólido)”

(VIÈTE, 1630, p. 29 *apud* PEREIRA, 2017, p. 55).

Nesse sentido, as noções de álgebra escolar parecem estar ligadas de algum modo, aos modelos de compreensões da aritmética ou da geometria. Com esse olhar, nossos encaminhamentos neste texto assume o modelo de compreensão de noções da geometria plana por pressupormos que o uso de materiais manipulativos inspirados em objetos da geometria presentes na cultura escolar, permite dar sentido e significado às práticas envolvendo polinômios.

Desse modo, nossa compreensão se assenta nos pressupostos teóricos da *Teoria Antropológica do Didático*, ou simplesmente TAD daqui em diante, que considera o desenvolvimento da álgebra escolar como instrumento ou ferramenta que permite a modelagem de situações matemáticas escolares (BOSCH, 2012).

Além disso, é preciso considerar que a luz da TAD que toma em conta o estudo do homem em situação, em particular e, de nosso interesse, o estudo de situações matemáticas da álgebra escolar envolvendo polinômios a partir da articulação e integração com os objetos da geometria escolar, por exemplo, tendo em conta que:

> A epistemologia escolar dominante tende a apresentar conteúdos matemáticos como entidades com interesse em si mesmo, que se trata de conhecer e aprender a usar, em vez de vê-las como ferramentas concretas para expressar hipóteses sobre os sistemas considerados, que podem ser convertidos, por sua vez, em novos sistemas a serem modelados[3] (BOSCH, 2012, p. 26).

O extrato de texto destaca que há uma predominância na epistemologia escolar do estudo de objetos isolados em si mesmo em maiores relações com outros objetos intra-matemáticos ou extra-matemáticos, que pode de algum modo ser minimizada quando um dado objeto do conhecimento escolar, por exemplo, passa a estabelecer relações com outros objetos de modo a funcionar como ferramenta ou instrumento que permite a construção de novos conhecimentos (BOSCH, 2012).

Com esse olhar, parece indispensável considerar que o desenvolvimento da matemática escolar é condicionado pela mobilização de diferentes modelos para expressar as práticas, isto é, o uso de registros para situar os meios escritos, gráficos, orais, gestuais e materiais que instrumentalizam a atividade matemática escolar e condicionam seu desenvolvimento (BOSCH; CHEVALLARD, 1999). Nessa perspectiva:

[3] Fragmento do texto: la epistemología escolar dominante tiende a presentar los contenidos matemáticos como entidades con interés por sí mismas, que se trata de conocer y aprender a utilizar, en lugar de verlas como herramientas concretas para expresar hipótesis sobre los sistemas considerados, que pueden convertirse, a su vez, en nuevos sistemas para ser modelizados.

> A concepção mais usual da atividade matemática tende a afastar as ferramentas *materiais* que normalmente são requeridas para a realização desse tipo de atividade. São levados em conta objetos sensíveis particulares, discursos, escritas, grafismos, não para centrar atenção sobre esses próprios objetos (e as maneiras de manipulá-los), mas sobre o que esses objetos remetem, isto é, sobre o que representam, ou significam, em resumo: seu sentido[4] (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 9, grifos dos autores, tradução nossa).

De acordo com esses autores, as noções que envolvem os objetos não-ostensivos podem ser evocados ou invocados em dialética com a manipulação adequada de certos objetos ostensivos associados. Os objetos ostensivos e os não-ostensivos são articulados e integrados por uma dialética que encaminha os objetos não-ostensivos emergindo da manipulação dos ostensivos e, que simultaneamente, os não-ostensivos atuam como meio de guia e controle da manipulação ostensiva (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

Essa compreensão nos motiva a pressupor que o uso de materiais manipulativos inspirados nos objetos da geometria escolar pode ser utilizado como uma das condições *sine qua non* que propicia a articulação e integração de diferentes objetos ostensivos e não-ostensivos da álgebra escolar**,** em particular, envolvendo as operações matemáticas polinomiais.

A ratificação ou retificação de nossa hipótese encaminha ao encontro da noção de transposição didática (CHEVALLARD, 1999) que considera a recriação de condições que torne possível o ensino de um objeto escolar, que em nossa investigação é parafraseado para a criação de condições, nem todas é claro, mas que podem de algum modo, contribuir para que alunos da escola básica possam dar sentido e significado às práticas polinomiais.

Encontrar condições que torne possível a realização de uma prática, incluindo o estudo de polinômios, é também um dos problemas de interesse da TAD, mais precisamente, compreendido por meio do problema básico (CHEVALLARD, 2009), assim expresso:

> Dadas determinadas restrições sobre tal instituição, ou tal pessoa, que conjunto de condições sob as quais a instituição, ou a pessoa, pode fazer integrar a seu equipamento praxeologico tal entidade praxeológica designada?[5] (CHEVALLARD, 2009, p. 17, tradução

---

[4] Fragmento do texto: La conceptualisation courante de l'activité mathématique tend à refouler les outils matériels que celle-ci engage et, si elle prend en compte ces objets sensibles particuliers que sont les discours, écritures et graphismes, c'est pour se centrer, non sur ces objets eux-mêmes (et les façons de les manipuler), mais sur ce à quoi ils sont censés renvoyer, ce qu'ils « représentent » ou « signifient », bref: leur « sens ».

[5] Fragmento do texto: Étant donné certaines contraintes pesant sur telle institution ou telle personne, sous quels ensembles de conditions cette institution ou cette personne pourrait-elle intégrer à son équipement praxéologique telle entité praxéologique désigné?

nossa).

Parafraseando essa problemática anunciada por Chevallard (2009), encaminhamos a seguinte questão de investigação: Dadas determinadas restrições sobre tal instituição, ou tal pessoa, que conjunto de condições sob as quais os alunos de uma turma do oitavo ano do ensino fundamental, pode fazer integrar em suas práticas novas relações no contexto da álgebra escolar?

Essa problemática designada sob a compreensão do problema básico reconhecido pela TAD (CHEVALLARD, 2009) pode ser respondida de algum modo, a partir de um processo de estudos que encaminha condições iniciais, sob certas restrições institucionais, que, progressivamente, podem ser evidenciadas no processo de estudo, com a clareza, que:

> As condições, que são objetos de estudo da didática, não podem ser enumeradas a priori: a sua descoberta é progressiva e a compreensão de seu papel na difusão de uma determinada entidade praxeológica $\wp$ são os objetivos permanentes da pesquisa em didática[6] (CHEVALLARD, 2009, p. 12, tradução nossa).

O objetivo deste texto é propor o encaminhamento de condições, nem todas é claro, a partir de materiais manipulativos inspirados em objetos da geometria escolar que torne possível o ensino de práticas algébricas. Para tanto, a construção de nossa resposta à problemática encaminhada levará em conta os recursos da TAD, procedimentos metodológicos e a empiria da pesquisa realizada com alunos de uma turma do oitavo ano do Ensino Fundamental da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará (EA/UFPA).

Recursos da Teoria Antropológica do Didático

Segundo Chevallard (1999) todo produto intencional da atividade humana e, em particular a atividade matemática escolar, pode ser descrito por meio de um modelo de organizações praxeológicas que em unidade mais simples, dita de pontual, é constituída de dois blocos inseparáveis: a *práxis*, constituída pelas noções de tipos de tarefas e tipos de técnicas, isto é, o que se deve fazer e como fazer em uma dada ação, e o *logos,* constituído pela tecnologia e teoria, ou seja, o discurso que justifica e/ou explica a ação realizada.

Chevallard (1999) destaca que as praxeologias não são dados da natureza, e sim “artefatos”, ou

[6] Fragmento do texto: Les conditions qui sont l’objet d’étude de la didactique ne peuvent être énumérées a priori: leur découverte progressive et la compréhension de leur rôle dans la diffusion de telle ou telle entité praxéologique $\wp$ sont l’objectif permanent de la recherche en didactique.

"obras" humanas construídas no interior das instituições para atender seus interesses e intenções e, portanto, funcionam sob condições da cultura e da sociedade em que se inserem, destacando nessas instituições "uma verdadeira capacidade de produção de saber para fins de autoconsumo" (CHEVALLARD, 2005, p.26, tradução nossa), como a instituição escolar, por exemplo, que é dotada de uma epistemologia própria dos objetos que vivem nesse espaço institucional (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

Segundo Bosch e Chevallard (1999) a realização da atividade matemática escolar, por exemplo, depende, de modo indispensável, do uso de discursos, figuras, símbolos, entre outros objetos, em que o mais importante é sua função significante, produtora de saberes.

Para fazer matemática seguindo ainda o que nos diz Bosch e Chevallard (1999) é preciso utilizar discursos, figuras, símbolos, dentre outros objetos que podem de algum modo auxiliar na realização da atividade e, não menos importante, além desses aspectos concretamente observáveis é preciso levar em conta sua função significante, isto é, sua função produtora de conceitos.

Com esse olhar levantado por esses autores a atividade matemática, incluindo a matemática escolar, é condicionada por instrumentos materiais, sonoros, visuais e táteis que em geral são utilizados na realização dessa atividade.

De acordo com Bosch e Chevallard (1999) o problema da natureza dos objetos matemáticos e de sua função na atividade matemática encaminha a uma dicotomia que leva a distinção de dois tipos de objetos: os ostensivos e os não-ostensivos. Segundo esses autores todo objeto tem uma natureza sensível e, com isso, certa materialidade o que torna em ser um objeto apreensível pelo sujeito por ser uma realidade perceptível (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

Nessa perspectiva:

> Um objeto ostensivo é um objeto material qualquer tal como os sons (entre os quais as palavras de uma língua) os grafismos (entre os quais os grafemas que permitem a escrita das línguas naturais ou construídas das línguas formais) e os gestos. Os objetos não ostensivos são então todos os objetos como as ideias, as intuições ou os conceitos, existentes institucionalmente, no sentido onde lhes são atribuídas existências, sem poder ser vistos, ditos mostrados, percebidos por si mesmo. Esses objetos podem ser evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos associados (palavras, frases, grafismos, escritas, gestos ou longo discurso)[7] (BOSCH;

[7] Fragmento do texto: en est-il d'un objet matériel quelconque et, notamment, de ces objets matériels particuliers que sont les sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes. Les objets non ostensifs sont alors tous ces « objets » qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes: ils ne peuvent qu'être évoqués ou

CHEVALLARD, 1999, p. 10, tradução nossa).

Na esteira dessa discussão Bosch e Chevallard (1999) ainda encaminham o problema da "natureza" dos objetos matemáticos e, distinguem dois tipos de objetos: objetos ostensivos e não-ostensivos, que são unidos por meio de uma dialética que considera os objetos não-ostensivos emergentes dos objetos ostensivos (BOSCH; CHEVALLARD, 1999).

> É pelo motivo de poderem ser concretamente manipulados que os objetos ostensivos se distinguem dos não-ostensivos. A notação log e a palavra logaritmo são objetos ostensivos. Por outro lado, a noção de logaritmo é um objeto não-ostensivo, que não é possível ser manipulado no sentido precedente. Podemos somente o tornar apresentado ou representado pela manipulação de alguns objetos ostensivos associados, tal como a noção log, por exemplo. Na maioria dos casos, os objetos institucionais estarão associados a um objeto ostensivo privilegiado, seu nome, que permitirá uma evocação mínima[8] (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 11).

A dialética de objetos ostensivos/não-ostensivos são instrumentos que tornam possíveis a atividade humana em geral, e em particular, a atividade matemática escolar, como uma entidade que permite, em associação com outros, conformar técnicas que permitem realizar tarefas, isto é, coloca em jogo a realização de praxeologias escolares.

De qualquer modo, é preciso considerar que a dialética entre os objetos ostensivos/não-ostensivos se aproxima da noção de registro de representação semiótica, proposta por Raymond Duval, com algumas distinções entre a abordagem de Raymond Duval e as noções postuladas pela TAD, que até então não se constitui em objeto de discussão neste texto.

De todo modo, na abordagem de Raymond Duval e na perspectiva dos registros ostensivos e não-ostensivos concebidos pela TAD, a mobilização de diferentes registros desempenha um papel fundamental para a construção de conhecimentos que podem dar sentido e significado as praxeologias da álgebra escolar.

---

invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours).

[8] Fragmento do texto: C'est par le fait qu'ils peuvent être concrètement manipulés que les objets ostensifs se distinguent des objets non ostensifs. La notation log et le mot « logarithme » sont des objets ostensifs 16. En revanche, la notion de logarithme est un objet non ostensif qu'il n'est pas possible de manipuler au sens précédent. On peut seulement le « rendre présente » – le représenter – par la manipulation d'un certain nombre d'objets ostensifs associés, telle la notation log par exemple. Dans la plupart des cas, les objets institutionnels se verront associés à un objet ostensif privilégié, leur nom, qui en permettra une évocation minimale.

Procedimentos metodológicos

As atividades foram desenvolvidas no período vespertino, com vinte e cinco alunos da turma 8002, pertencentes ao oitavo ano do Ensino Fundamental da Escola de Aplicação da UFPA. Esses alunos foram distribuídos em cinco grupos aqui designados por **G_1, G_2, G_3, G_4** e **G_5,** com cinco alunos em cada grupo para o enfrentamento das tarefas encaminhadas sob a orientação do professor da turma. Os dados da empiria foram coletados e registrados por meio de fotografias e procedimentais das praxeologias manifestadas pelos grupos diante às tarefas.

Nesse sentido, foram propostas várias atividades pelo professor-diretor de estudos, dentre elas, podemos destacar as seguintes tarefas:

1) Calcular a área do retângulo que apresenta como dimensões os seguintes polinômios:

$A = (3x + y)$ e $B = (2x + 2y)$

2) Dados os polinômios $C(x, y) = 6x^2 + 5xy + y^2$ e $D(x, y) = 3x + y$, calcular: $\frac{C(x,y)}{D(x,y)}$.

A partir dessas tarefas o professor-diretor de estudos distribuiu 24 peças de tamanhos diferentes, com as seguintes características:

Oito (8) peças quadradas de cor amarela, com lado medindo x unidades.

Figura 1
Medidas dos lados e área da peça quadrada amarela

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

Oito (8) peças retangulares de cor vermelha, com lados medindo x e y unidades.

Figura 2
Medidas dos lados e área da peça retangular vermelha

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

Oito (8) peças quadradas de cor azul, com lado medindo y unidades.

Figura 3
Medidas dos lados e área da peça quadrada azul

Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

O estudo das praxeologias polinomiais sob a condição do uso de peças manipulativas inspiradas em objetos da geometria plana encaminhou o desenvolvimento do processo de estudos a partir da mobilização de diferentes registros ostensivos geométrico-algébricos, revelados pelos grupos, que, de algum modo, foram mediados pelos objetos não-ostensivos, como demonstraremos por meio dos resultados obtidos na empiria da pesquisa.

Empiria da pesquisa

O processo de estudos para o desenvolvimento das tarefas teve como encaminhamento inicial os seguintes passos:

1ª Etapa: Todos os grupos deveriam escolher um dos polinômios fornecidos: $A = (3x + y) \; ou \; B = (2x + 2y)$, para ser usado como a *base* de um retângulo. Após essa escolha, os grupos deveriam usar as quantidades de peças fornecidas de maneira adequada para representá-las;

2ª Etapa: Escolher um dos lados da base do retângulo (direito ou esquerdo), e, sobre este, construir a altura, usando o polinômio que não foi adotado na etapa anterior, em acordo com o quantitativo de peças que combine com as dimensões do lado da base escolhida atender corretamente o propósito do cálculo de área do retângulo;

3ª Etapa: Preencher o espaço restante compreendido entre a base e a altura, feitos nas etapas anteriores, sempre usando as peças que sejam mais convenientes de modo que no preenchimento da área restante não poderá ocorrer uma falta ou excesso no uso de cada peça nos limites da representação geométrica.

Após a concretização destas etapas, a tarefa do cálculo de área do retângulo por meio do uso de peças geométricas inspirados na geometria escolar, foram obtidos diferentes modelos geométricos pelos grupos, como parece encaminhar a Figura 4.

Figura 4

Registro geométrico dos grupos **G_1** e **G_4**

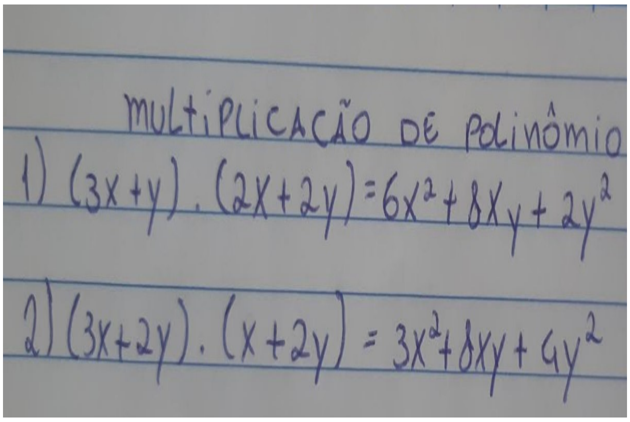
Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

Os registros ostensivos geométricos manifestados pelos grupos **G_1 e G_4** (BOSCH; CHEVALLARD, 1999) podem aqui serem compreendidos como diferentes modelos matemáticos ligados a uma situação, em particular, a situação do cálculo da área do retângulo a partir das dimensões $A = (3x + y)\ e\ B = (2x + 2y)$. Nesse caso, trata-se de uma situação que em algum sentido, encaminhou diferentes modelos matemáticos geométricos, no sentido postulado por Revuz (1971).

O uso de peças manipuladas pelos grupos com referência na geometria escolar pode ser compreendido como objetos ostensivos comandados pelos objetos não-ostensivos, isto é, por meio da noção de contagem no sentido da prática social, tornou possível a realização da tarefa. Esses recursos criaram condições no sentido da TAD (CHEVALLARD, 2009) para objetivação das praxeologias polinomiais manifestadas pelos grupos.

Pelo princípio da contagem, isto é, considerando o número de 6 quadrados amarelos, de 8 retângulos vermelhos e de 2 quadrados azuis, os grupos determinaram os coeficientes do polinômio obtido a partir desses numerais: $6x^2 + 8xy + 2y^2$. Esse registro ostensivo do polinômio objetivado pelos grupos expressou a área do retângulo, como parece encaminhar a Figura 5.

Figura 5
Registro geométrico do grupo $\mathbf{G_3}$



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

A tradução do registro ostensivo da geometria escolar para o registro algébrico, foi realizado por meio das peças quadradas amarelas e azuis, juntamente com as peças retangulares vermelhas foram determinantes para a manifestação de registros ostensivos algébricos, de modo específico, os coeficientes para expressar a área do retângulo 6, 8 e 2 em estreita relação com o quantitativo de peças quadradas amarelas, retangulares vermelhas e as quadradas azuis.

A manipulação de objetos ostensivos geométrico-algébricos frente às praxeologias polinomiais “somente pode realizar (e não se sabe eventualmente perceber isso) evocando ou invocando, com ajuda de objetos ostensivos apropriados, objetos *não-ostensivos* que não aparecem forçosamente específicos da atividade” (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p.11, grifos dos autores).

A tarefa do produto entre polinômios por meio das peças inspirado nos objetos geométricos criou condições para encaminhar a noção de divisão entre polinômios. Nesse sentido, o estudo da situação de divisão polinomial $\frac{C(x,y)}{D(x,y)}$, considerando os polinômios $C(x,y) = 6x^2 + 5xy + y^2$ e $D(x,y) = 3x + y$, permitiu a articulação e integração dos registros ostensivos/não-ostensivos geométrico-algébricos de modo a encaminhar a praxeologia em jogo, como parece claro na Figura 6.

Figura 6
Registro geométrico do grupo **G_5**

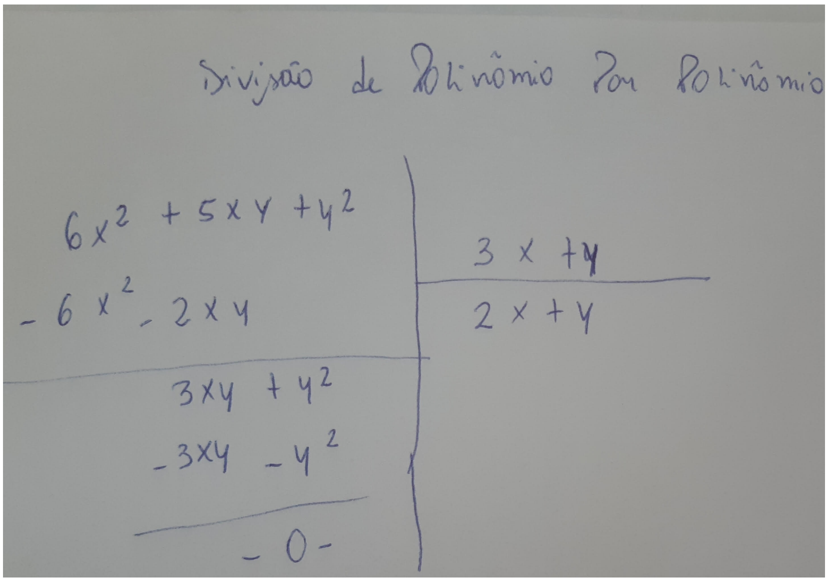
Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

A construção do registro ostensivo geométrico a partir dos coeficientes do polinômio $C(x,y) = 6x^2 + 5xy + y^2$, representados pelos números 6, 5 e 1, levou os grupos, em particular, o grupo G_5 a inferir que os coeficientes do polinômio $D(x,y) = 3x + y$, designava uma das dimensões do retângulo expresso pelos ostensivos do polinômio $C(x,y) = 6x^2 + 5xy + y^2$.

O *filtro de percepção* (CHEVALLARD, 2005), construído pelos grupos com as praxeologias do produto polinomial determinou o registro ostensivo sob o comando dos não-ostensivos, que expressavam os coeficientes do polinômio resultante da operação de multiplicação, que completaria o polinômio dado por $C(x,y) = 6x^2 + 5xy + y^2$.

Após completar o retângulo destacado pela Figura 6, os alunos observaram que a segunda dimensão desse retângulo era designado pelo polinômio $P(x,y) = 2x + y$, encaminhado ostensivamente pela manipulação geométrica. Esse polinômio, obtido como resposta pelos grupos, criou, de algum modo, condições infraestruturais (CHEVALLARD, 2009) para abstração da noção não ostensiva de divisão polinomial em jogo na situação: $\frac{C(x,y)}{D(x,y)} = P(x,y)$. como encaminha o registro do grupo **G_5**.

Figura 7
Registro algébrico do grupo **G_5**



Fonte: Acervo da pesquisa (2019).

Nesse sentido, a noção não-ostensiva do produto de polinômios e da prática social de contagem também criaram condições substanciais para o estudo de praxeologias polinomiais. Essa compreensão perpassa, de algum modo, pela *valência instrumental* da dialética ostensivo/não-ostensivo (BOSCH; CHEVALLARD, 1999), aqui encaminhado pelos registros geométrico-algébricos**.** De outro modo, esse encaminhamento nos leva a postular a existência da noção de Geometria Analítica Plana no Ensino Fundamental da escola básica, aqui compreendida a partir dos pressupostos histórico e epistemológico que deram origem a Geometria Analítica, segundo destaca Andrade (2012).

A mobilização de diferentes registros por meio da dialética ostensivos/não-ostensivos, que em nosso caso, se substanciou por meio da passagem dos gestos geométrico-algébricos sob a criação de algumas condições, em particular, o uso do material manipulativo inspirado nos objetos da geometria escolar (CHEVALLARD, 2009).

Desse modo, os desdobramentos no processo de construção do saber revelado pelos grupos, ratificou nossa hipótese e respondeu mesmo que parcialmente, nosso questionamento investigativo levantado à luz dos pressupostos teóricos da TAD. De qualquer modo, a articulação e integração dos registros sob as condições empreendidas pelo diretor de estudos tornou possível o ensino de praxeologias polinomiais, dando sentido e significado às praxeologias mobilizadas.

Considerações finais

Em que pese à complexidade do ensino de álgebra na escola básica, nossos encaminhamentos empreendidos para a criação de condições no sentido da TAD (CHEVALLARD, 2009) por meio da geometria escolar tornou possível o ensino de praxeologias polinomiais, em particular, por meio da articulação e integração de diferentes registros ostensivos/não-ostensivos (BOSCH; CHEVALLARD, 1999) geométrico-algébricos.

Transitar entre os diferentes registros ostensivos sob a coordenação dos não-ostensivos, criou condições, de modo específico, por meio do uso de peças manipulativas inspirados na geometria escolar. Esse propósito permitiu o ensino de praxeologias polinomiais ao permitir a construção de sentidos e significados pelos alunos do oitavo do Ensino Fundamental da Escola de Aplicação da UFPA, além do contributo formativo ao professor da classe.

De outro modo, os recursos materiais manipulativos fundamentados na geometria escolar potencializaram práticas com maior eficácia, economia e rapidez na realização das tarefas encaminhadas. Em última análise, postulamos que essa compreensão de enfrentar problemas da matemática escolar por meio da articulação e integração de praxeologias geométrica-algébricas encaminha em algum sentido a epistemologia da noção de geometria analítica.

Entretanto, os resultados obtidos com os alunos de uma turma do oitavo do Ensino Fundamental ainda são provisórios e demandam mais experiências empíricas envolvendo maior diversidade do estudo de situações que pode transcender a noção dos registros ostensivos/não-ostensivos no sentido da *transacionalidade* dos objetos (CHEVALLARD, 2005), e não menos importante, que trate de algum modo, do estudo de problemas em contextos concretos como recomenda a Organização para Cooperação do Desenvolvimento Econômico e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - OCDE/Pisa (BRASIL, 2012), de modo a dar sentido e significado as praxeologias polinomiais.

Essa compreensão assentada a partir da noção de modelagem matemática escolar (SODRÉ, 2019), constitui-se objetos de nossas futuras investigações empíricas em sala de aula.

Referências

ANDRADE, Roberto Carlos Dantas. **A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores:** o caso da geometria analítica. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2012. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0Bxa8Ai93RdHQRTNpSWc4RE5fWFk/view. Acesso em: 04 ago. 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 01 ago. 2019.

BOSCH, Marianna. Recorridos de investigación en didáctica de las Matemáticas: el grupo TAD. *In:* ESTEPA, Antonio; CONTRERAS, Anjo; DEULOFEU, Jordi; PENALVA, Maria Carmen; GARCÍA, Francisco Javier; ORDÓÑEZ, Lourdes (Eds.). **Investigación en Educación Matemática XVI**. Jaén: SEIEM, 2012. p. 23-47. Disponível em: http://www.seiem.es/docs/actas/16/Actas16SEIEM.pdf. Acesso em: 04 ago. 2019.

BOSCH, Marianna; CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. **Recherches en didactique des mathématiques**, 1999, v. 19, n. 1, p. 77-124. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf. Acesso em: 07 ago. 2019.

CHEVALLARD, Yves. Le passage de l'arithmetique a l'algebrique dans l'enseignement des mathematiques au college – deuxieme partie – perspectives curriculaires la notion de modelisation. *In:* **Petit x**, França, n.19, p. 43-72, 1989.

CHEVALLARD, Yves. L'analise des pratiques enseignantes em théorie anthopologique du didactique. **Recherches em didactiques des mathematiques**, Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions, 1999, v. 19, n.2, p. 221-265.

CHEVALLARD, Yves. La notion d´ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et élémentos de réponses à partir de la TAD**.** *In:* Margolinas et all. (Orgs.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 81-108, 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_l_EE_2009.pdf. Acesso em: 08 ago. 2019.

CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica:** del saber sabio al saber enseñado. 2. ed. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005. Disponível em: https://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Chevallard_Unidad_3.pdf. Acesso em: 28 ago. 2019.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Estudar matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

GASCÓN, Josep. La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. **Educación Matemática**, Barcelona, v. 11, n. 1, 1999, p. 77-88. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/154339117.pdf. Acesso em: 26 ago. 2019.

GASCÓN, Josep; BOSCH, Marianna; BOLEA, Pilar. Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas? **Educación Matemática**, Barcelona, v. 3, n. 3, diciembre, 2001, p. 22-63. Disponível em: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol13/03Gascon.pdf. Acesso em: 26 ago. 2019.

PEREIRA, José Carlos de Sousa. **Alterações e recombinações praxeológicas reveladas por professores de matemática do ensino básico em formação continuada:** a partir de um modelo epistemológico alternativo para o ensino da álgebra escolar. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017. Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1S5hyeh8l_NpB3KaJjZbxg_5M6Ouh3h56/view. Acesso em: 04 ago. 2019.

SODRÉ, Gleison de Jesus Marinho. **Modelagem matemática escolar:** uma organização praxeológica complexa. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2019.