UMA POSSIBILIDADE DE DISCUSSÕES FILOSÓFICAS E MATEMÁTICAS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA*

Rejane Siqueira Julio*

José Claudinei Ferreira**

Resumo

Este artigo se apresenta como uma possibilidade de pensar disciplinas, sejam elas de conteúdo matemático ou até mesmo de conteúdo educacional, em que discussões matemáticas e filosóficas estejam presentes na busca de ampliação dos repertórios matemático, cultural e educacional na formação de professores. Para isso, abordamos e discutimos o caso da definição do círculo e suas possíveis representações, bem como estranhamentos – entendidos como uma situação na qual uma pessoa se vê em uma posição em que não consegue dar conta de ou aceitar algo – que podem ser causados nesse processo. Esses estranhamentos podem contribuir, por sua vez, para a ampliação desses repertórios, e potencializar essas discussões na formação de professores.

Palavras-chave: Estranhamento. Matemática. Filosofia da Educação Matemática. Formação de professores de Matemática. Educação Matemática.

Introdução

O estudo que apresentamos neste artigo surgiu de conversas realizadas entre os autores na época em que coordenavam um curso de Licenciatura em Matemática e estavam vivenciando o processo de alteração do projeto pedagógico deste curso, em conjunto com outros professores. Na época, os autores entenderam que as discussões sobre a alteração do projeto pedagógico se baseavam em retirar disciplinas e colocar outras no lugar, de acordo com as crenças ou experiências dos professores deste curso sobre o que achavam interessante ou importante em termos de conteúdos matemáticos, e até mesmo educacionais, para a formação de professores de Matemática. A partir de um momento, de retirada e inserção de disciplinas, as discussões se direcionaram para o que consideramos importante que o futuro professor de Matemática vivencie, quem são nossos alunos e o que podemos fazer para que eles permaneçam no curso e tenham uma formação que consideramos adequada.

Foi a partir disso que nós, autores deste artigo, baseados em nossas práticas profissionais de pesquisa e docência, voltamo-nos para a posição de que não bastava criar ou eliminar disciplinas, mas que as disciplinas poderiam trazer discussões que não focassem exclusivamente no conteúdo matemático, e sim em uma ampliação

* Doutora em Educação pela Unicamp, docente do Instituto de Ciências Exatas e do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal de Alfenas. E-mail: rejane.julio@unifal-mg.edu.br

** Doutor em Ciências Matemáticas pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, docente do Instituto de Ciências Exatas e do Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada à Biometria da Universidade Federal de Alfenas. E-mail: jose.ferreira@unifal-mg.edu.br

de repertório matemático, educacional e cultural que envolve também uma ampliação de formas de ver a Matemática e a docência, concordando com Lins (2005), que defende que um professor

> [...] precisa saber *mais*, e não *menos* Matemática, mas sempre esclarecendo que este *mais* não se refere a mais conteúdo, e sim a um *entendimento*, uma *lucidez* maior, e isto inclui, necessariamente, a compreensão de que *mesmo dentro* da *Matemática do matemático* [tal como discutida em Lins (2004b)] produzimos significados diferentes para o que parece ser a mesma coisa (LINS, 2005, p. 122, comentário nosso).

Deste modo, nosso estudo se caracterizou por buscar possibilidades ou situações que permitam potencializar discussões sobre formação de professores de Matemática na direção de uma ampliação nos modos de produzir significado (LINS, 2004b) para Matemática e docência, em outros termos, uma ampliação nos modos do que se pode e efetivamente se fala de/sobre Matemática e docência.

Neste processo, nós nos deparamos com um trecho do livro *As Formas de Platão*, escrito por Lawrence (2012), que foi ao encontro de nossas discussões. Neste trecho, o autor insere uma figura similar à Figura 1 abaixo e afirma: “Veja a ilustração: isto é um círculo? Espero que você diga que não” (LAWRENCE, 2012, p. 152).

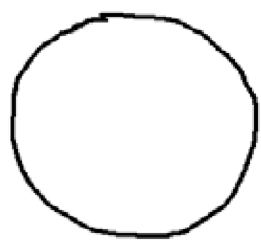

Figura 1 – Esta figura é um círculo?
Fonte: dos autores

As falas de Lawrence (2012) nos levaram a desenvolver a seguinte discussão: Por que a Figura 1 não é um círculo? Talvez alguém diga que não é um círculo, concordando com o autor, porque a figura parece não satisfazer a definição: seja A um ponto do plano e r um número real positivo; o círculo de centro A e raio r é o conjunto dos pontos B do plano tais que a distância de A até B é igual a r (BARBOSA, 2006). Outras respostas podem ser dadas, uma delas é que a Figura 1 é diferente daquelas que usualmente são colocadas em livros didáticos de Matemática, como a Figura 2.

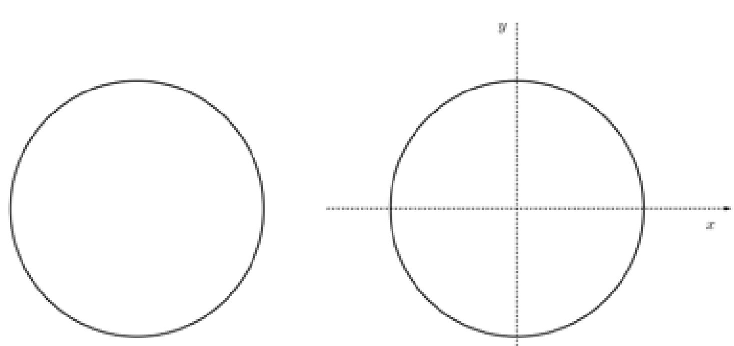

Figura 2 – Representação do círculo
Fonte: dos autores

Quando os professores do Ensino Superior definem, em disciplinas de Geometria Euclidiana Plana (GEP), o círculo de centro *A* e de raio *r*, tal como Barbosa (2006), é usual que eles façam um desenho do círculo para ilustrar a definição. Ao fazerem isso, muitos dizem que o que eles estão fazendo, na verdade, não é um círculo, é uma representação dele, porque a representação ou o traçado da circunferência já foge da definição e da unidimensionalidade da linha, pois o traçado dela possui uma área.

Essa fala do professor pode ser abordada, talvez sem esse professor pensar nisso, do ponto de vista de uma visão filosófica platônica de Matemática, na qual os objetos matemáticos não são reais, "sua existência é um fato objetivo, totalmente independente de nosso conhecimento sobre eles. [...]. Existem fora do espaço e do tempo da experiência física. São imutáveis – não foram criados e não mudarão ou desaparecerão" (DAVIS; HERSH, 1985, p. 359).

Isso gera um estranhamento (LINS, 2004a; OLIVEIRA, 2011) em muitos estudantes, o que pode ser visto como uma situação na qual uma pessoa se vê em uma posição em que não consegue dar conta de ou aceitar algo. Em outros termos, o estranhamento pode ser visto, também, como uma situação em que existe "[...] de um lado aquele para quem uma coisa é natural – ainda que estranha – e de outro aquele para quem aquilo [que é dito pelo primeiro] não pode ser dito" (LINS, 2004a, p. 116, comentário nosso). Tal situação ocorre porque talvez eles nunca tenham pensado que os círculos que desenhavam e utilizavam para resolver exercícios de Matemática na escola não poderiam ser círculos, somente representações mentais deles, algo bem diferente, também, do que se passa na vida cotidiana, pois se uma pessoa quer comprar uma mesa de madeira circular, lá está um círculo feito por um marceneiro e esse círculo é real para essa pessoa.

Se essa situação já causa um estranhamento nos estudantes, o que dizer, então, da resposta de que talvez a Figura 1 seja a representação de um círculo tal como definido por Barbosa (2006)? Ou, então, que a definição de círculo apresentada permita que ele tenha a representação gráfica dada por um quadrado ou por outras figuras/formas?

Esses questionamentos possuem uma relação com o que pensamos que seja uma contribuição para a ampliação de repertório matemático, pois, por meio dos estranhamentos que eles podem causar, essa é uma oportunidade para a realização de discussões matemáticas e filosóficas que favoreça isso.

Assim como a Matemática oferece uma oportunidade de vivenciarmos diferentes produções de significados para suas noções, ela também "oferece uma oportunidade única de viver o estranhamento peculiar ao encontro com noções que contrariam em tudo o senso comum cotidiano" (LINS, 2005, p.122). O mesmo acontece com a Filosofia da Educação Matemática, que nos permite entrar em contato com diferentes modos de produção de significados para Matemática, Educação, Educação Matemática, sujeito e conhecimento, por exemplo, e possui como uma de suas preocupações as ações de um professor e análises delas (BICUDO, 2018).

Desta forma, neste artigo, fazemos uma discussão sobre os estranhamentos mencionados de forma a sugerir que as próprias disciplinas de um curso de Licenciatura em Matemática, como as de GEP e de Espaços Métricos (EM), dentre outras, podem ser uma ótima oportunidade para discutir Matemática e modos de ver/lidar com a Matemática na docência e na formação de professores sem que necessariamente se tenha que criar disciplinas específicas de Filosofia da Educação (ou da Matemática ou da Educação Matemática) ou disciplinas de conteúdo matemático. Para isso, fazemos uma abordagem matemática sobre possíveis formas do círculo, relacionando-a às filosofias platônica e wittgensteiniana de Matemática.

1. As formas do círculo

Somente a definição do círculo não garante que sempre vamos ter uma representação dele como na Figura 2, tal como os estudantes estão habituados a ver na Educação Básica e Superior. Isso ocorre devido ao modo como medimos o raio do círculo ou, de forma mais geral, como medimos distâncias.

Na GEP, a existência de medidas de segmentos, como é o caso do raio do círculo, é feita de forma axiomática, como vemos em Barbosa (2006). Uma forma usual de calcular esse raio pode ser pela fórmula que relaciona o comprimento de uma circunferência com seu diâmetro multiplicado por π. Quando são dados os pontos A e B do círculo, conforme a definição de Barbosa (2006), um modo de medir a distância entre eles é usar uma régua, o que pode apresentar dificuldades para medição exata de segmentos, como a diagonal de um quadrado. Ainda que isso ocorra, ela é um instrumento de medida, mas não é o único modo que temos para realizar medidas.

Na Geometria Analítica (GA), dados os mesmos dois pontos A e B do plano, vistos em um sistema de coordenadas ortogonais, podemos usar o Teorema de Pitágoras para calcular a distância entre eles, como veremos adiante, e esse também não é o único modo de medir. Se considerarmos o contexto da disciplina de EM, outros modos de medir distâncias, que estão de acordo com os axiomas de medição da GEP, podem ser feitos respeitando a seguinte definição de métrica ou distância, baseada em Lima (2003): uma métrica em um conjunto não vazio M é uma função $d{:}M \times M \to R$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado de distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y \in M$: 1) $d(x, x)=0$, a distância de um ponto a ele mesmo é zero; 2) Se $x \neq y$ então $d(x, y)>0$, a distância entre dois pontos distintos é positiva; 3) $d(x, y)=d(y, x)$, a distância de um ponto até outro é a mesma do outro ponto até este um; 4) $d(x, z) \leq d(x, y)+d(y, z)$ (desigualdade triangular), se me desviar do caminho usado para medir a distância entre dois pontos e passar por um terceiro ponto, esta nova distância não será menor.

A definição de métrica é importante para o conceito de espaço métrico, dada pelo par (M, d), sendo M um conjunto não vazio e d uma métrica em M. De acordo com Lima (2003), "os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza bastante arbitrária: números, pontos, vetores, matrizes, funções, conjuntos etc." (LIMA, 2003, p. 1).

O plano da GEP possui uma estrutura de espaço métrico quando o enxergamos como um sistema de coordenadas ortogonais da GA. Ele pode ser chamado de espaço euclidiano e escrito como $R^2=R \times R$, cujos elementos desse espaço, chamados de pontos, são da forma $A=(x_1, y_1)$. Se escolhermos dois pontos $A=(x_1, y_1)$ e $B=(x_2, y_2)$, podemos calcular a distância entre eles utilizando o Teorema de Pitágoras, escrito como: $d(A, B)^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$. Com isso e a definição de círculo, temos o círculo da GEP como representamos na Figura 2.

Por outro lado, com o mesmo plano e sistema de coordenadas da GA, podemos definir a métrica $d_1(A, B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2$, que, em termos atuais, pode ser chamada métrica do táxi (ou da soma). Agora, com a definição de círculo, a representação física da figura mudará para um quadrado, conforme a Figura 3.

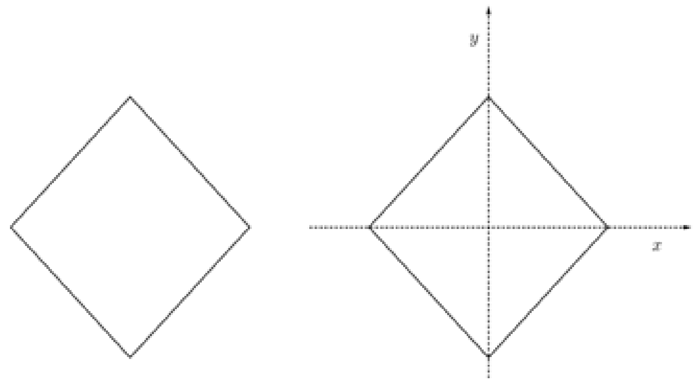

Figura 3 – Representação do quadrado
Fonte: dos autores

Exemplificando formalmente a construção da Figura 3, escolhemos o raio r=1 e o centro do círculo $O=(0,0)$. Podemos encontrar os pontos $B=(x_2,y_2)$ que satisfaçam $d_1(O, B)=|0-x_2|+|0-y_2|=1$. Analisando a expressão de d_1 em quatro situações, por exemplo, se $x_2<0$ e $y_2<0$, *temos* $-x_2-y_2=1$, vemos que cada uma delas forma um segmento de reta no plano cartesiano que define os quatro lados do quadrado.

De uma forma mais ampla, essas métricas são casos particulares de uma métrica conhecida por norma p, com pesos positivos b e c, para algum número real $p \geq 1$, dada por: $d(A, B)^p=b(x_1 - x_2)^p+c(y_1-y_2)^p$, com $A=(x_1, y_1)$ e $B=(x_2, y_2)$ pontos do plano. Existe ainda uma norma p, com pesos positivos b e c, para p infinito, dado por $d(A,B)=max(b|x_1 - x_2|, c|y_1 - y_2|)$. É importante destacar que esses pesos têm sentido físico, por exemplo, considerando a norma 1 ou do táxi, os pesos b e c podem representar a inclinação em um quarteirão de uma cidade, o que certamente influi no gasto de combustível, no esforço do motor de veículos e no custo do trajeto. Para $p=2$ e $c=b=1$, temos o círculo da Figura 2, para $p=1$ e $c=b=1$, o da Figura 3. Para outros valores de p, c e b teremos outros círculos, como na Figura 4, abaixo, em que na primeira $p=4$ e $c=b=1$, a segunda com $p=18$ e $c=b=1$, a terceira $p=18$, $b=10000$ e $c=1$ tem a forma de um celular, a quarta com $p=2$, $c=1$ e $b=2$ tem a forma de uma elipse.

Figura 4 – Diferentes representações de círculo
Fonte: dos autores

Apresentamos mais dois exemplos de círculos, em um contexto bastante semelhante ao do plano, considerando uma superfície hiperbólica representada em um sistema com três coordenadas cartesianas da forma $(x,y, x^2 - y^2)$. Nesse contexto, podemos ainda obter figuras mais estranhas que satisfazem à definição de círculo. Esse é o caso da Figura 5, que apresenta dois círculos obtidos nessa superfície hiperbólica através da métrica induzida por uma norma no plano *xy*, ou seja, a distância entre dois pontos da superfície usa apenas as coordenadas *x* e *y*. Usamos as normas 1 e 2, com pesos $b=c=1$.

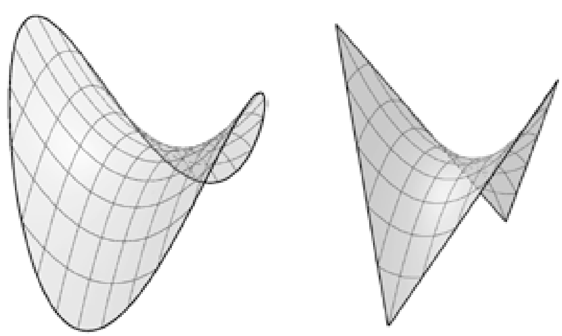

Figura 5 – Círculos obtidos sobre a superfície hiperbólica
Fonte: dos autores

Voltando à Figura 1, que gerou toda essa discussão, ainda hoje não sabemos se podemos chamá-la de círculo, porque não encontramos uma métrica que atenda à definição de círculo e que possua a representação dada. Com o que parece ser uma mesma definição, podemos ter várias figuras diferentes representadas, o que pode nos levar a questionar se há algum problema com a definição de círculo. Para nós, a resposta é não. Na GEP, a definição de círculo é dada de modo que a medida do raio está em conformidade com os axiomas de medição de segmentos. No entanto, esse não é o único modo de medir distâncias; uma vez que ele muda, podemos ter representações gráficas diferentes de círculo. Assim como o modo de medir distância não é único, o espaço euclidiano plano também não é o único espaço métrico que existe na Matemática. Outras disciplinas, como Álgebra Linear e Cálculo Numérico, lidam com a noção de norma/métrica e oferecem uma oportunidade de os professores e futuros professores de Matemática ampliarem seus repertórios matemáticos e discutirem noções que podem causar estranhamentos. No entanto, nem sempre é feita uma discussão da relação dessas disciplinas com a GEP ou com a GA, como a que iniciamos neste artigo. Isso faz com que os estudantes ou os professores percebam essa disciplina apenas como mais uma disciplina de conteúdo matemático a ser enfrentada e que não tem relação direta com a prática docente.

As discussões matemáticas que fizemos podem, de início, causar estranhamentos aos professores e futuros professores, devido ao modo como eles estavam acostumados a lidar com a definição e a representação de círculo sem, necessariamente, dar um destaque tão grande para o modo de medir distância. Mas esse estranhamento também está relacionado com um modo de ver e falar sobre a Matemática, principalmente com os futuros professores de Matemática, como abordaremos na próxima seção.

2. Círculo e filosofias da Educação Matemática

O primeiro estranhamento causado pela definição do círculo e pela representação dele por uma figura, que não é o círculo verdadeiro para alguns professores, marca uma visão exclusivista de Matemática que pode, de certa forma, ser explicada na filosofia platônica. Ela separa o mundo em sensível e inteligível, sendo o primeiro o mundo que vivemos e o segundo o mundo no qual as coisas existem verdadeiramente e que devemos almejar. Nesta filosofia, a Matemática – no caso a geometria e a ciência de calcular – contribui para a ligação entre esses mundos, por ser o conhecimento do que existe sempre e não do que se gera ou se destrói ou do que tenha corpos visíveis ou palpáveis, como vemos no diálogo de Sócrates com Glauco em Platão (2001).

Sendo a Matemática uma forma de fazer a ligação entre os mundos inteligível e sensível, a sua compreensão, assim como a compreensão do mundo inteligível, dá-se por meio de quatro modos: nome, definição, imagem e conhecimento (ou ciência).

Exemplificando com o caso do círculo, o objeto, cujo nome é "círculo", possui a definição que colocamos e uma imagem dada pela representação do círculo por meio de construções (Figura 2). Essas construções podem ser apagadas ou destruídas, o que não acontece com o círculo verdadeiro, pois ele é o que existe sempre. Nome, definição e imagem são os três primeiros modos (ou graus) de conhecimento.

> O conhecimento, quarto modo, não é nem o círculo real (o próprio círculo em si mesmo), nem são os três modos de conhecimento [...], mas a compreensão que nossa alma tem da ligação entre eles – o quarto modo é o que se passa em nossa mente quando o nome, a definição e a imagem são produzidos. [...] O quarto modo é o conhecimento do conhecer, isto é, o sabermos que temos três modos de conhecer e sabermos que o objeto alcançado por esses três modos não se confunde com o objeto real (isto é, o círculo em si, a essência do círculo, pois o verdadeiro círculo está além das palavras e dos traços) (CHAUÍ, 2002, p.245-246).

Só se chega ao conhecimento verdadeiro do objeto por uma espécie de "fricção" entre os quatro primeiros modos, o que

> [...] produz uma espécie de faísca, uma luz que nos faz ver a pura ideia da coisa. Ou seja, passando de um a outro, indo e voltando de um a outro dos quatro modos, subitamente, como em um lampejo, nossa alma vê diretamente o objeto real, tem dele uma visão intelectual, tem o que, mais tarde, Platão chamará de intuição, um contato direto e instantâneo com a essência pura ou ideia pura da coisa procurada (CHAUÍ, 2002, p.247).

Os modos de conhecer ou a "exposição da teoria do conhecimento [de Platão] é, ao mesmo tempo, a exposição da separação e diferença entre o sensível e o inteligível" (CHAUÍ, 2002, p. 249), cuja ligação deles se dá por uma passagem aos graus de conhecimento.

Nesse processo de conhecimento, é a alma que rememora ou descobre o que existe no mundo inteligível, pois conhecer é lembrar (Teoria da Reminiscência), ou seja, "a alma aprendeu, antes da encarnação, tudo aquilo de que ela, novamente, adquirirá o conhecimento, de sorte que investigar e aprender é reativar um saber total que se encontra latente na razão" (CHAUÍ, 2002, p.266).

Um exemplo de rememoração se dá no diálogo de Sócrates com um escravo de Mênon (PLATÃO, 2010), no qual Sócrates o leva a rememorar, por meio de perguntas e respostas, a solução do problema de encontrar o lado de um quadrado cuja área é o dobro da área de um dado quadrado.

A filosofia de Platão assumiu, no decorrer do tempo, algumas alterações. Silva (2007) afirma que há várias versões do platonismo na Filosofia da Matemática, dentre elas o racionalismo e o estruturalismo, por compartilharem algumas ideias originais de Platão, que são, de certo modo, as filosofias realistas (ontológicas – que acreditam que os objetos matemáticos não são objetos deste mundo – ou epistemológicas – que acreditam ser a verdade matemática independente da ação do sujeito).

Nessas versões de platonismo, tem-se, com base em Silva (2007), que a Matemática é uma ciência objetiva, que investiga realidades objetivas e busca verdades por meio de descobertas e não criação, o que nos remete à Teoria da Reminiscência de Platão; é uma ciência *a priori*, ou seja, independe da experiência, em que um caso exemplar é a discussão feita sobre o círculo; é verdadeira na medida em que corresponde à realidade matemática como ela é, de fato, e seus enunciados têm um valor de verdade (verdadeiro ou falso), ainda que desconhecido, determinado de uma vez por todas; sempre soluciona seus problemas e, se ainda existem problemas em aberto na Matemática, é porque não há desenvolvimento matemático suficiente para solucioná-los, já que as respostas em si estão determinadas.

Na nossa leitura, nesta filosofia, o estranhamento das diferentes imagens geradas para o círculo de acordo com a definição apresentada por Barbosa (2006) não passa de uma confusão que fazemos aqui no mundo sensível por ainda não conhecermos e sabermos lidar com os descobrimentos de mais Matemática, como é o caso de podermos medir distâncias de diferentes modos.

Cada novo modo de medir distância, mantendo-a constante, proporciona-nos diferentes representações de figuras geométricas que podemos chamar de círculo em um abuso de linguagem, porque o círculo sai de cena e o que permanece é a definição de um objeto condicionada à definição e à escolha de uma métrica. Isso significa que cada objeto representado possui propriedades que o caracteriza e o enquadra em uma definição que não se altera, como é o caso do quadrilátero representado, cujos lados são iguais e seus ângulos são de noventa graus, enquadrando-se na definição de quadrado. Além disso, a representação dos diferentes círculos é algo que fazemos no mundo sensível como uma forma de ilustração. Por mais que exista a representação de círculo, tal como na Figura 1, ou então as diferentes representações que exibimos, elas são versões do mundo inteligível, sendo que nele pode existir uma que atenda a todas as representações que esboçamos e que sequer conseguimos imaginar.

A partir do momento que uma pessoa estuda EM ou GEP com as discussões que fizemos sob a ótica da filosofia platônica, acreditamos que essa pessoa descobrirá mais Matemática que está relacionada com seus conhecimentos anteriores e que não alteram suas essências.

Um encaminhamento diferente para o estranhamento das diferentes formas do círculo pode ser visto na filosofia de Ludwig Wittgenstein. Nela, "[...] é evidente que a Matemática, em certo sentido, é uma doutrina [...]" (WITTGENSTEIN, 2009, XI, p.292), mas ela "[...] é, também, um *fazer*" (Ibid.), uma ação humana que a coloca em movimento no mundo.

O matemático é um inventor, e não um descobridor, ele "inventa sempre novas formas de representação, umas estimuladas por necessidades práticas; outras, por necessidades estéticas, e várias outras ainda" (WITTGENSTEIN, 2009, I, §167, p.75). "O matemático produz essências" (WITTGENSTEIN, 1978, I, §32, p.29) e, por fazer isso, produz novos estranhamentos em relação às essências anteriormente produzidas, bem como a impossibilidade de se produzir uma essência pura que dê conta de todas as outras já produzidas ou que podem ser produzidas.

A Matemática não fica restrita ao fazer de matemáticos, mas a fazeres baseados em práticas sociais tais como "aquelas realizadas [...] pelos professores de Matemática, pelas diferentes comunidades constituídas com base em vínculos profissionais, bem como pelas pessoas em geral em suas atividades cotidianas" (MIGUEL; VILELA, 2008, p.112).

Para Miguel (2014), na perspectiva da Matemática como um fazer, no mundo de uma granja, em que as práticas devem ser realizadas em conformidades com regras, inclusive a divisão de ovos de galinhas em cartelas,

> [...] faria sentido (mesmo que, em tal mundo, a palavra "Matemática" não seja usada nesse sentido) falar-se em práticas matemáticas como o conjunto de jogos de linguagem [que serão abordados adiante] normativamente orientados – isto é, orientados por propósitos inequívocos – que nele são realizados. [...] Assim, nesse mundo, os trabalhadores que encenam práticas normativamente orientadas quer, por regras definidas pela legislação, quer por outras de naturezas diversas, estariam envolvidos em atividade matemática, ainda que nenhum conteúdo "tipicamente matemático" (escolar ou científico-acadêmico) pudesse ser visibilizado ou percebido

> nessas encenações corporais (MIGUEL, 2014, p.23, comentário nosso).

Essa fala de Miguel muda o modo de ver a Matemática. O foco deixa de ser a Matemática vista como um corpo cumulativo proposicional de conhecimentos ou conteúdos universais consensualmente considerados como matemáticos por uma determinada comunidade de especialistas e passa a ser um conjunto ilimitadamente aberto de práticas ou ações humanas, realizadas (ou que poderão vir a sê-lo) em quaisquer campos de atividade humana, que sejam orientadas por propósitos sociais normativos – isto é, que precisam ser vistos como inequívocos – para que tais propósitos possam ser atingidos.

A definição de círculo na GEP e nos EM, na perspectiva wittgensteiniana, desempenha papéis diferentes: no primeiro caso, ela é uma proposição normativa, e daí qualquer menção a círculos decorrerá da definição dada por Barbosa (2006); no segundo caso, a definição opera como uma proposição descritiva de uma métrica, cuja representação gráfica pode ser um quadrado.

Gottschalk (2007) afirma que o filósofo Ludwig Wittgenstein faz uma distinção entre proposições empíricas e gramaticais, considerando que as primeiras têm uma função descritiva (descrever objetos empíricos, ideais ou mentais) e as segundas um papel normativo, ou seja, dizem o que é ser algo, que são as condições para qualquer descrição do mundo empírico. Essa distinção não é rígida, porque uma mesma proposição pode ter diferentes funções e depende do contexto de enunciação.

> O que é importante ressaltar nesta distinção que Wittgenstein faz em relação aos diferentes usos possíveis de uma mesma proposição, é que a função exercida se mostra no próprio *uso* da proposição. São as circunstâncias que esclarecem o tipo de função que estarão exercendo (GOTTSCHALK, 2007, p.117).

As diferenças de usos de proposições se mostrarão em jogos de linguagens, sendo eles a totalidade formada pela linguagem e atividades a ela entrelaçada (WITTGENSTEIN, 2009, §7). A base de um jogo de linguagem é o nosso agir (WITTGENSTEIN, 2012, §204) situado no tempo e no espaço e não em um mundo ideal, existente independentemente das ações humanas. Tanto é que não faz sentido falar em essência de um jogo de linguagem. Nem Wittgenstein (2009) se preocupou em definir precisamente noções como a de jogos de linguagem, ele exemplificou alguns: ordenar e agir segundo as ordens, descrever um objeto pela aparência ou pelas suas medidas, relatar um acontecimento, pedir, rezar, agradecer etc. Isso significa que também não faz sentido falar em essências das palavras, por exemplo, em essência da palavra matemática ou círculo. Neste sentido, o que é círculo passa a ser visto como usamos a palavra círculo nas atividades que exercemos.

Nesta perspectiva, as discussões sobre o círculo, sua representação e sobre o círculo quadrado ou outras formas do círculo vão em direção diferente da filosofia platônica e suas versões, pois cada uso de círculo inventa um novo uso da palavra “círculo” em um novo jogo de linguagem orientado por um novo propósito normativo, podendo assumir função descritiva ou normativa. O círculo deixa de ser visto como único, verdadeiro e infalível (um conceito dogmático) advindo da intuição considerada como um contato direto e instantâneo com sua essência.

Sobre o círculo quadrado ou as diferentes formas de círculo, não é uma confusão falar desses modos. Há jogos de linguagem nos quais podemos falar isso e entendê-los, por haver uma gramática que vai dizer que espécie de objeto uma coisa é (WITTGENSTEIN, 2009, §373), isto é, a partir da definição e da escolha de uma métrica, uma figura poderá ser representada fisicamente, como é o caso do círculo da Figura 2.

A partir do momento que um professor compara os jogos de linguagem, como é o caso do círculo na GEP e nos EM, “descrevendo um como variação do outro; descrevendo-os e colocando em relevo as diferenças e analogias" (WITTGENSTEIN, 1978, II, §49, p.112), os alunos podem entender melhor a situação do círculo e suas diferentes representações.

As filosofias abordadas – que não são as únicas – nos permitem lidar de modos distintos com a situação do círculo e suas possíveis representações. Elas são, no nosso ponto de vista, exemplares no sentido de gerar estranhamentos e fomentar discussões sobre diferentes modos de produção de significado para Matemática, círculo e outras noções, ainda que um professor ou futuro professor se sinta influenciado por uma delas na sua docência.

Considerações finais

Neste artigo, apresentamos uma discussão Matemática e filosófica para abordar estranhamentos causados pela definição de círculo e suas possíveis representações, como uma possibilidade de pensar a formação de professores de Matemática em disciplinas de conteúdo matemático, mas não ficando restrito a elas.

Um modo filosófico, platônico, está relacionado à essência das coisas. Nele, falar em diferentes formas do círculo é uma confusão, pois, no espaço euclidiano, R^2 diferentes modos de medir distância, mantendo-a constante, gera diferentes figuras que estão em conformidade com a definição de círculo, mas que possuem seus próprios e imutáveis nomes, definições, imagens e conhecimentos. A confusão se dá no mundo sensível, onde as pessoas ainda não têm o conhecimento verdadeiro da Matemática.

Na filosofia wittgensteiniana, o foco está no uso das palavras e proposições. Falamos de círculo quadrado, por exemplo, porque com um modo de medir distância podemos ter um quadrado que atende à definição de círculo. A cada uso diferente da palavra círculo e de uma métrica, novos jogos de linguagem são jogados e cumprem diferentes papéis.

Ao apresentar duas filosofias diferentes, pode ocorrer o questionamento de qual defendemos ou acreditamos. Os autores deste artigo têm visões filosóficas diferentes e isso não nos impediu de trabalharmos juntos e enriquecermos nosso repertório filosófico e matemático.

Em relação às discussões matemáticas, acreditamos que as disciplinas caracterizadas por serem de conteúdo matemático, como o caso de disciplinas de GEP ou de EM, podem trazer as discussões que fazemos neste artigo, dentre outras, utilizando, inclusive, recursos tecnológicos – como o GeoGebra, que usamos na produção das imagens apresentadas –, e podem contribuir para uma ampliação de repertório matemático e educacional tal como abordado por Lins (2005).

Para finalizar, consideramos, baseados em Lins (2005), Oliveira (2011) e Viola dos Santos e Lins (2016), que o estranhamento é algo com o que nos deparamos em nossas vidas de professores, não somente nas discussões Matemáticas e filosóficas, mas também no encontro com alunos e seus diferentes pontos de vista. A vivência de estranhamentos na formação docente pode nos ajudar a encarar os que ocorrem em sala de aula na perspectiva de nos abrirmos para novas possibilidades de comunicação e de produção de conhecimentos.

A possibility of philosophical and mathematical discussions in the Mathematics teachers training

Abstract

In this paper, we present a possibility to think about mathematical and philosophical discussions in disciplines of mathematics, or even educational content in order to increase mathematical, cultural and educational repertories in the mathematics teachers training. For this, we discuss the case of circle's definition and its possible representations, as well as strangeness – understood as a situation in which a person finds himself in a position that cannot be handled or accepted – that can be caused in this process. This strangeness can contribute to the enlargement of repertories and foster mathematics and philosophical discussions in teacher training.

Keywords: Strangeness. Mathematics. Philosophy of Mathematics Education. Teacher training in Mathematics. Mathematical Education

Una posibilidad de discusiones filosóficas y matemáticas en la formación de profesores de matemáticas

Resumen

Este artículo se presenta como una posibilidad de pensar disciplinas, sean ellas de contenido matemático o de contenido educativo, en que discusiones matemáticas y filosóficas estén presentes en la búsqueda de ampliación de los repertorios matemáticos, culturales y educativos en la formación de profesores de matemáticas. Para ello, abordamos y discutimos el caso de la definición del círculo y sus posibles representaciones, así como extrañamientos – entendidos como una situación en la que una persona se ve en posición que no puede dar cuenta o aceptar algo – que pueden ser causados en ese proceso. Estos extrañamientos pueden contribuir, a su vez, a la ampliación de repertorios matemáticos, entre otros, y potenciar esas discusiones en la formación de profesores.

Palabras clave: Extrañamiento. Matemáticas. Filosofía de la Educación Matemática. Formación de profesores de Matemáticas. Educación Matemática.

Referências

BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. 10 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

BICUDO, M. A. V. Filosofia da educação matemática: sua importância na formação de professores de matemática. In: SILVA, R. S. R. da (Org.). P*rocessos formativos em educação matemática*: perspectivas filosóficas e pragmáticas. Porto Alegre: Fi, 2018.

CHAUÍ, M. *Introdução à história da filosofia*: dos pré-socráticos a Aristóteles. 2. ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2002. v.1.

DAVIS, P. J. e HERSH, R. *A experiência matemática*. 2. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

GOTTSCHALK, C. M. C. Três concepções de significado na matemática: Bloor, Granger e Wittgenstein. In: MORENO, A. R. (org.). *Wittgenstein*: aspectos paradigmáticos. Campinas, Coleção CLE, v. 49, p. 95-133. 2007.

JULIO, R. S.; FERREIRA, J. C. O círculo quadrado como possibilidade de discutir matemática e filosofia da matemática. In: *Congresso Internacional de Ensino de Matemática*, 7, 2017, Canoas-RS. Canoas, RS, 2017.

LAWRENCE, M. *Filosofia de botequim*: 48 questões filosóficas para acompanhar sua cerveja. São Paulo: Alaúde Editorial, 2012.

LIMA, E. L. *Espaços métricos*. 3. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2003.

LINS, R. C. Monstros, Matemática e Significados. In: BICUDO, M. A. V. e BORBA, M. C. (Orgs.). *Educação matemática*: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004a, p. 92- 120.

LINS, R. C. Characterising the mathematics of the teacher from the point of view of meaning production. In: *International Congress on Mathematical Education*, Copenhagen, 2004b.

LINS, R. C. A Formação Pedagógica em Disciplinas de Conteúdo Matemático nas Licenciaturas em Matemática. *Revista de Educação* PUC-Campinas. Campinas, n.18, p.117-123, 2005.

MIGUEL, A. Is the mathematics education a problem for the school or is the school a problem for the mathematics education? *International Journal for Research in Mathematics Education*. v. 4, n.2, p.5-35. 2014.

MIGUEL, A.; VILELA, D. S. Práticas Escolares de Mobilização de Cultura Matemática. *Caderno CEDES*, Campinas, v.28, n.74, p.97-120. 2008.

OLIVEIRA. V. C. A. *Uma leitura sobre formação continuada de professores de matemática fundamentada em uma categoria da vida cotidiana*. 2011. 207 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas/ Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho": Rio Claro, 2011.

PLATÃO. *A república*. 9. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

PLATÃO. *Mênon*. 6. ed. Rio de Janeiro: São Paulo: Editora PUC-Rio, Editora Loyola-Editora, 2010.

VIOLA DOS SANTOS, J. R.; LINS, R. C. Uma discussão a respeito da(s) matemática(s) na formação inicial de professores de matemática. *Educação matemática pesquisa*. São Paulo, v.18, n.1, p. 351-372. 2016.

SILVA, J. J. da. *Filosofias da matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

WITTGENSTEIN, L. *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Espanha: Alianza Editorial, 1978.

WITTGENSTEIN, L. *Investigações filosóficas*. 6. ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2009.

WITTGENSTEIN, L. *Movimentos do pensamento*: diários de 1930-1932/1936-1937. São Paulo: Martins Fontes, 2012.

Enviado em 11 de junho de 2018.
Aprovado em 31 de julho de 2018.