

# Psicologia em Pesquisa

<https://periodicos.ufjf.br/index.php/psicologiaempesquisa>

**Trajatória de Aprendizagem dos Problemas Aritméticos Narrativos:**

**Conceitos Numéricos e Estrutura Semântica**

**Learning Trajectory of Narrative Arithmetic Problems: Numerical**

**Concepts and Semantic Structure**

**Trayectoria de Aprendizaje de Problemas Aritméticos Narrativos:**

**Conceptos Numéricos y Estructura Semántica**

Elisa Braz Cota<sup>1</sup>, Bianca Olímpio Vilela<sup>2</sup>, Fernanda Rocha de Freitas<sup>3</sup> & Vitor Geraldi

Haase<sup>4</sup>

---

<sup>1</sup> Universidade Federal de Minas Gerais. *E-mail:* [elisabcota@gmail.com](mailto:elisabcota@gmail.com) *ORCID:* <https://orcid.org/0009-0001-6263-9737>

<sup>2</sup> Universidade Federal de Minas Gerais. *E-mail:* [biolimpiovilela@gmail.com](mailto:biolimpiovilela@gmail.com) *ORCID:* <https://orcid.org/0009-0002-8463-0140>

<sup>3</sup> Universidade Federal de Minas Gerais. *E-mail:* [ferochaf27@gmail.com](mailto:ferochaf27@gmail.com) *ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-9437-0568>

<sup>4</sup> Universidade Federal de Minas Gerais. *E-mail:* [vghaase@gmail.com](mailto:vghaase@gmail.com) *ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-1906-7702>



*Informações do Artigo:**Elisa Braz Cota*[elisabcota@gmail.com](mailto:elisabcota@gmail.com)*Recebido em: 04/07/2024**Aceito em: 11/02/2025***RESUMO**

Os problemas aritméticos narrativos são uma ferramenta importante para estimular as crianças a matematizar o mundo. Por um lado, a estrutura semântica é o esquema cognitivo subjacente aos problemas aritméticos que mais influencia sua resolução. Por outro lado, a aquisição dos conceitos numéricos subjacentes ao raciocínio matemático obedece a uma trajetória bem definida. O presente artigo tem por objetivo realizar um mapeamento conceitual entre a estrutura semântica dos problemas aritméticos aditivos e a trajetória de desenvolvimento do conceito de número, unindo dois paradigmas teóricos distintos. O artigo traz contribuições para a área pedagógica e de pesquisa.

**PALAVRAS-CHAVE:**

Problemas aritméticos narrativos; Cognição numérica; Aprendizagem matemática.

**ABSTRACT**

Narrative arithmetic problems are an important tool for encouraging children to mathematize the world. On one hand, the semantic structure is the cognitive schema underlying arithmetic problems that most influences their resolution. On the other hand, the acquisition of the numerical concepts underlying mathematical reasoning follows a well-defined trajectory. This article aims to conduct a conceptual mapping between the semantic structure of additive arithmetic problems and the developmental trajectory of the concept of number, uniting two different theoretical paradigms. The article offers contributions to the pedagogical and research areas.

**KEYWORDS:**

Arithmetic word problems; Numerical cognition; Mathematical learning.

**RESUMEN**

Los problemas aritméticos narrativos son una herramienta importante para estimular a los niños a matematizar el mundo. Por un lado, la estructura semántica es el esquema cognitivo subyacente a los problemas aritméticos que más influye en su resolución. Por otro lado, la adquisición de los conceptos numéricos subyacentes al razonamiento matemático sigue una trayectoria bien definida. Este artículo tiene como objetivo realizar un mapeo conceptual entre la estructura semántica de los problemas aritméticos aditivos y la trayectoria de desarrollo del concepto de número, uniendo dos paradigmas teóricos diferentes. El artículo aporta contribuciones a los ámbitos pedagógico e investigativo.

**PALABRAS CLAVE:**

Problemas aritméticos narrativos; Cognición numérica; Aprendizaje matemático.

Os problemas aritméticos narrativos são enunciados verbais que envolvem situações cotidianas e podem ser resolvidas por meio de raciocínio quantitativo. Os enunciados envolvem perguntas cujas respostas podem ser encontradas através da resolução de cálculos aritméticos aditivos ou multiplicativos (Thevenot & Barrouillet, 2015). A estrutura semântica refere-se aos aspectos conceituais e linguísticos dos problemas aritméticos narrativos, que ajudam as crianças a identificar e organizar as informações quantitativas necessárias para resolver os problemas (Daroczy et al., 2015; Nunes et al., 2012; Thevenot & Barrouillet, 2015). A estrutura

---

semântica permite que as crianças entendam o que acontece com as quantidades presentes nos problemas e o que deve ser feito para resolvê-los.

A estrutura semântica é a principal fonte de dificuldades na resolução de problemas aritméticos narrativos (Daroczy et al., 2015; Pongsakdi et al., 2020; Riley et al., 1983; Verschaffel & Corte, 1997). Estudos apontam que intervenções baseadas na estrutura semântica são eficazes para melhorar o desempenho matemático das crianças, com desenhos experimentais aleatorizados e que controlam outras variáveis relevantes (Jitendra et al., 2013, 2017; Munez et al., 2013).

Os problemas aritméticos narrativos constituem um dos principais recursos pedagógicos para estimular as crianças a matematizar a realidade (Chapman, 2006; Nunes & Bryant, 1996, 2015, 2021; Nunes et al., 2016; Verschaffel et al., 2020). Diferentes fatores estão relacionados com a resolução dos problemas aritméticos narrativos, tanto individuais quanto coletivos. Dentre os fatores individuais, estão idade (Morales et al., 1985), inteligência (Gomides et al., 2021; Oswald et al., 2016), funções executivas (Nunes et al., 2012; Swanson, 2014; Thevenot & Barrouillet, 2015; Zheng et al., 2011) e aprendizagem dos conceitos numéricos-aritméticos (Ching & Nunes, 2017; Nunes et al., 2012). Dentre os fatores relacionados aos problemas narrativos, estão estrutura semântica (Riley et al., 1983; Verschaffel & Corte, 1997), magnitude numérica (Daroczy et al., 2015), quantidade de procedimentos necessários para a resolução (Carpenter & Moser, 1982; Powell & Fuchs, 2014) e forma de apresentação do problema (Vicente et al., 2008).

Contudo, permanece uma lacuna no entendimento da relação entre a estrutura semântica dos problemas e a trajetória de aprendizagem descrita pelos modelos teóricos de aquisição do significado do número (Clements & Sarama, 2021; Fritz et al., 2013; Krajewski,

2008). O presente artigo tem por objetivo abordar essa lacuna, o que traz implicações importantes para o desenvolvimento de estratégias pedagógicas mais robustas.

Poucas pesquisas atuais investigam o impacto (a relação) da estrutura semântica dos problemas aritméticos narrativos com a hierarquia de aprendizagem dos conceitos numéricos-aritméticos (Gomides et al., 2021; Kutaka et al., 2023; Peake et al., 2015). Por um lado, a estrutura semântica é o esquema cognitivo subjacente aos problemas aritméticos e, ao mesmo tempo, o principal fator que influencia sua resolução (Carpenter & Moser, 1979, 1982; Chan & Kwan, 2021; Vergnaud, 1982, 2009; Verschaffel & Corte, 1997). Por outro lado, a aquisição dos conceitos numéricos implícitos ao raciocínio aritmético obedece a uma trajetória de aprendizagem bem definida (Clements & Sarama, 2021; Fritz et al., 2013; Krajewski, 2008).

O mapeamento entre esses dois aspectos permitirá a aproximação entre duas diferentes perspectivas de pesquisa sobre o desenvolvimento da aritmética na criança, tendo implicações pedagógicas e de pesquisa, que serão discutidas ao longo de quatro seções no artigo: (a) classificação dos problemas aritméticos narrativos; (b) como as crianças desenvolvem os conceitos numéricos-aritméticos; (c) hierarquia de dificuldade dos problemas aritméticos narrativos; (d) implicações práticas e educacionais.

### **Classificação dos Problemas Aritméticos Narrativos**

A estrutura semântica permite organizar os problemas aritméticos narrativos em diferentes categorias. Carpenter et al. (1983) e Riley et al. (1983) propuseram a classificação dos problemas em quatro categorias, que são utilizadas em instrumentos de rastreamento do desempenho matemático, por exemplo, na tarefa de problemas aritméticos narrativos da PRONÚMERO (Gomides et al., 2021):

- 
- a) **Problemas de mudança:** Mudança de uma quantidade inicial para uma quantidade final, envolvendo acréscimo ou retirada de elementos.
  - b) **Problemas de equalização:** Transformação de uma quantidade com o objetivo de igualá-la a uma outra.
  - c) **Problemas de combinação ou de parte-parte-todo:** Combinação de dois conjuntos de elementos para formar um todo.
  - d) **Problemas de comparação:** Comparação quantitativa de dois conjuntos independentes de elementos.

Vergnaud (1982) propôs uma classificação da estrutura semântica dos problemas semelhante, mas que varia conforme três dimensões: ações *vs.* relações, acréscimo *vs.* diminuição de quantidade e natureza da incógnita, descritas abaixo:

A respeito da dimensão ações *vs.* relações, os problemas envolvendo ações requerem transformações da quantidade, que podem ser reunião ou separação de conjuntos. As diferentes transformações exigem que seja empregada uma operação de adição ou subtração para resolver o problema. Já os problemas envolvendo relações consistem em comparações entre três quantidades, que não se alteram. As comparações são inclusivas quando se comparam quantidades que são parte de um mesmo todo (problemas de parte-parte-todo). As comparações são disjuntivas quando se trata de quantidades diferentes, isto é, uma quantidade maior é comparada com uma quantidade menor e a diferença entre elas pode ser inferida (problemas de comparação). Em ambos os tipos de problemas, as comparações podem ser para mais ou para menos.

Em relação à dimensão acréscimo *vs.* diminuição de quantidade, apenas os problemas de ação envolvem acréscimo ou diminuição das quantidades. Nesse sentido, há acréscimo de quantidade quando a quantidade inicial aumenta após a transformação. Da mesma forma, há

diminuição de quantidade quando a quantidade inicial reduz após a transformação. Para os problemas de relação, não há mudanças nas quantidades envolvidas no problema. As quantidades são estáveis e o objetivo do problema é compará-las e/ou inferir uma terceira quantidade.

Em relação à natureza da incógnita, em todos os tipos de problemas, o valor desconhecido pode ocupar qualquer uma das quantidades envolvidas. Nos problemas de ação, a quantidade que está faltando pode ser a quantidade inicial, a quantidade de mudança ou a quantidade final. Para os problemas de relação, há duas situações distintas. Nos problemas de parte-parte-todo, que envolvem comparações inclusivas, a incógnita pode ser cada uma das duas partes ou o todo. Nos problemas de comparação, que envolvem comparações disjuntivas, a incógnita pode ser a quantidade menor, a quantidade maior ou a diferença entre as quantidades. A classificação dos problemas narrativos envolvendo ações é apresentada na Figura 1.

**Figura 1**

*Classificação Semântica dos Problemas Aritméticos Narrativos Envolvendo Ações.*

		INCÓGNITA		
		Quantidade inicial	Mudança	Resultado
AÇÕES	Reunião	Pedro tinha algumas bolinhas. Ele ganhou 6 e ficou com 9. Quantas bolinhas ele tinha? $\_ + 6 = 9$ Mudança [ ] → Resultado	João tinha 3 bolinhas. Ele ganhou algumas e ficou com 9. Quantas bolinhas ele ganhou? $3 + \_ = 9$ [ ] Q. inicial → Resultado	Maria tinha 3 bolinhas e ganhou 6. Com quantas bolinhas ela ficou? $3 + 6 = \_$ Mudança Q. inicial → [ ]
	Separação	Catarina tinha algumas bolinhas. Ela perdeu 4 e ficou com 3. Quantas bolinhas ela tinha? $\_ - 4 = 3$ Mudança [ ] → Resultado	Olavo tinha 7 bolinhas. Ele perdeu algumas e ficou com 3. Quantas bolinhas ele perdeu? $7 - \_ = 3$ [ ] Q. inicial → Resultado	Ramiro tinha 7 bolinhas e perdeu 4. Com quantas bolinhas ele ficou? $7 - 4 = \_$ Mudança Q. inicial → [ ]

A classificação dos problemas narrativos envolvendo relações é apresentada pela Figura 2.

**Figura 2**

*Classificação Semântica dos Problemas Aritméticos Narrativos Envolvendo Relações.*

<b>RELAÇÕES</b>	Parte- parte- todo	<b>INCÓGNITA</b>					
		<b>Parte</b>	<b>Todo</b>				
	Comparação	QUANTO MAIS	QUANTO MENOS				
		<p>Juntos, Antônia e Lucas têm 9 bolinhas. Lucas tem 6 bolinhas. Quantas bolinhas tem Antônia?</p> <p><math>9 - \_ = \_ / 6 + \_ = 9</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td style="text-align: center;">9</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">6</td></tr> </table>	9	6	<p>Rodrigo tem 3 bolinhas. Raquel tem 6 bolinhas. Quantas bolinhas eles têm juntos?</p> <p><math>3 + 6 = \_</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">6</td></tr> </table>	3	6
9							
6							
3	6						
	<p>Tiago tem 5 bolinhas. Fernanda tem 2 bolinhas a mais do que Tiago. Quantas bolinhas tem Fernanda?</p> <p><math>5 + 2 = \_ / \_ - 2 = 5</math></p>	<p>Mônica tem 7 bolinhas. Rafael tem 5 bolinhas. Quantas bolinhas Mônica tem mais do que Rafael?</p> <p><math>7 - \_ = 5 / 5 + \_ = 7</math></p>					
	<p>Lívia tem 5 bolinhas. Lívia tem 2 bolinhas a menos do que Laura. Quantas bolinhas tem Laura?</p> <p><math>5 + 2 = \_ / \_ - 2 = 5</math></p>	<p>Jaime tem 7 bolinhas e Patrick tem 5 bolinhas. Quantas bolinhas Patrick tem menos do que Jaime?</p> <p><math>7 - 5 = \_ / 5 + \_ = 7</math></p>					

A equalização é a única categoria de Riley et al. (1983) e Carpenter et al. (1983) que não foi utilizada na classificação semântica de Vergnaud (1982). A equalização trata-se de um problema de comparação, mas o que muda é a pergunta feita no enunciado. Na comparação, a pergunta diz respeito a “quantos a mais” ou “quantos a menos”, enquanto na equalização, a pergunta diz respeito ao que precisa ser feito para que uma das partes se torne igual a outra parte. Portanto, unindo as diferentes perspectivas sobre a classificação dos problemas aritméticos narrativos, há quatro tipos de problemas narrativos simples: ação, parte-parte-todo, comparação e equalização. A Tabela 1 exemplifica a classificação semântica adotada no presente artigo.

A categorização semântica permite traçar a sequência em que os problemas aritméticos narrativos são aprendidos pelas crianças (Clements & Sarama, 2014, 2021; Sarama & Clements, 2009). No entanto, as pesquisas atuais não se aprofundam no impacto da estrutura semântica na trajetória de aprendizagem da matemática das crianças.

### Tabela 1

#### *Diferentes Classificações dos Problemas Aritméticos Narrativos.*

Exemplos de Problemas (cf. Gomides et al., 2021)	Estrutura Semântica	Natureza da Incógnita	Nomenclatura utilizada no artigo
Ana tem 9 reais. Ela dá 3 reais para Pedro. Com quantos reais Ana fica?		Quantidade final	
João tem 7 reais. Ele deu alguns reais para Daniel. Agora João tem apenas 2 reais. Quantos reais João deu para Daniel?	Mudança (Riley et al., 1983; Carpenter et al., 1983) ou Ação (Vergnaud, 1982, 1997, 2009)	Quantidade de mudança	Problemas de ação
Roberta tem alguns reais. Ela dá 3 reais para Gustavo. Agora Roberta tem apenas 6 reais. Quantos reais ela tinha antes?		Quantidade inicial	
Gabi tem 3 reais. Débora tem 6 reais. Quantos reais elas têm juntas?	Combinação (Riley et al., 1983; Carpenter et al., 1983) ou parte-parte-todo (Vergnaud, 1982, 1997, 2009)	Conjunto total ou Todo	Problemas de parte-parte-todo
Ricardo e Mateus têm 8 reais juntos. Ricardo tem 3 reais. Quantos reais tem Mateus?		Subconjunto ou Parte	
Bia tem 7 reais. Paula tem 5 reais. Quantos reais Bia tem a mais do que Paula?		Diferença dos conjuntos ou Quantidade maior	
Tiago tem 5 reais. Patrícia tem 3 reais a mais que Tiago. Quantos reais Patrícia tem?	Comparação (Riley et al., 1983; Carpenter et al., 1983; Vergnaud, 1982, 1997, 2009)	Quantidade comparada ou Quantidade menor	Problemas de comparação
Júlia tem 7 reais. Ela tem 2 reais a menos do que Fernanda. Quantos reais Fernanda tem?		Referência ou Diferença	
Diego tem 4 reais. Lucas tem 9 reais. Quantos reais Lucas precisa gastar para ficar com a mesma quantidade de Diego?	Equalização (Riley et al., 1983; Carpenter et al., 1983)	Diferença	Problemas de equalização

### Como as Crianças Desenvolvem os Conceitos Numéricos-Aritméticos

Diferentes modelos foram propostos para descrever a trajetória de desenvolvimento numérico-aritmético inicial das crianças (Fritz et al., 2013, 2019; Krajewski, 2008; Von Aster

---

& Shalev, 2007). Apesar de semelhantes quanto à estrutura básica de aquisição numérica conceitual pelas crianças, os modelos se diferem em relação à hierarquia em que os conceitos são adquiridos.

No presente artigo, o modelo de Fritz et al. (2013, 2019) será utilizado como referência, por ser um modelo empiricamente validado que descreve a aquisição dos conceitos numéricos-aritméticos em uma trajetória formada por seis níveis hierarquicamente organizados (Balt et al., 2019; Fritz et al., 2013, 2019). Tais níveis são caracterizados pelos conceitos adquiridos pelas crianças em sua trajetória de aprendizagem e permitem a intuição das estratégias iniciais de resolução de problemas aritméticos simples (Balt et al., 2019). Por essa razão, o Modelo de Trajetória do Desenvolvimento do Conceito de Número é um caminho possível para compreender os processos cognitivos envolvidos na resolução de problemas com estruturas semânticas distintas.

A trajetória de aprendizagem proposta por esse modelo se inicia por volta dos quatro anos de idade e percorre uma série de seis níveis, que representam os conceitos numéricos-aritméticos-chave (Balt et al., 2019; Fritz, et al., 2013). Ao reconhecer o nível atual de uma criança, é possível identificar o raciocínio que ela é capaz de empregar para resolver problemas aritméticos narrativos, além das estratégias que ela já consegue implementar, a partir do seu conhecimento conceitual sobre os números. Os cinco primeiros níveis do Modelo de Trajetória do Desenvolvimento do Conceito de Número serão detalhadamente descritos a seguir e, na sequência, será delimitado um paralelo entre estes e a dificuldade dos diferentes tipos de problemas aritméticos narrativos. O sexto nível do modelo refere-se ao raciocínio multiplicativo e como não é o foco do artigo, não será aqui explorado.

### ***Nível I: Contagem***

No Nível I, a função do número é restrita à contagem. Inicialmente, as crianças recitam a sequência numérica na ordem correta, mas fazem isso de forma mecânica e procedimental, ou seja, sem compreender ainda que os números representam quantidades (Fritz et al., 2013). Gradualmente, com o avanço deste nível conceitual, as crianças começam a estabelecer a correspondência um para um entre os rótulos numéricos e os objetos contados, passando a atribuir um número para cada elemento do conjunto (Le Corre & Carey, 2007).

### ***Nível II: Linha Numérica Ordinal***

No Nível II, as crianças compreendem que a sequência numérica segue o princípio da ordem estável (Gelman & Gallistel, 1978), e conseguem estabelecer relações entre os números com base na posição que eles ocupam na sequência numérica. As crianças conseguem comparar entre os números dizendo qual é maior ou menor, bem como identificar o antecessor e sucessor de cada número, sempre se baseando na linha numérica ordinal recém estabelecida (Siegler & Braithwaite, 2017). As crianças também conseguem resolver problemas de adição e subtração com pequenos algarismos, por meio de contagem dos operandos.

### ***Nível III: Cardinalidade***

No Nível III, as crianças adquirem o conceito de cardinalidade, compreendendo que o último numeral recitado corresponde ao número de elementos de um conjunto (Ta'ir et al., 1997). Os números adquirem um significado referencial, isto é, é estabelecida a conexão entre o numeral e a quantidade que ele representa (Nunes & Bryant, 2015). Os números passam a representar unidades compostas. Por isso, o maior número não é mais o que vem depois na linha numérica ordinal, mas o que representa mais quantidades (Nuerk et al., 2015). É neste nível conceitual que as crianças associam a adição e a subtração com o acréscimo e retirada de elementos de um conjunto (Fritz, et al., 2013).

#### ***Nível IV: Relações entre Parte-Parte-Todo***

No Nível IV, além de compreenderem os números como unidades compostas, as crianças aprendem que os números podem ser compostos e decompostos de formas flexíveis. As crianças entendem que o todo é formado pela soma de suas partes, utilizando operações para descobrir tais quantidades. É neste momento que as crianças compreendem a reversibilidade da adição e subtração, já que elas conseguem utilizar essas duas operações de forma adaptada à demanda do problema (Selter et al., 2012).

#### ***Nível V: Linha Numérica com Intervalos Equidistantes***

No Nível V, os números adquirem uma nova função, a de determinar a distância entre outros números. As crianças ampliam os seus conhecimentos sobre a linha numérica mental, compreendendo agora que esta é equidistante, ou seja, que a distância entre o número e o seu sucessor ou antecessor é sempre igual a “um”. Neste nível, a linha numérica passa a ser uma escala para determinar a diferença entre dois conjuntos, podendo ser utilizada como estratégia de resolução de problemas (Balt et al., 2020; Fritz et al., 2013; Siegler & Braithwaite, 2017).

#### **Hierarquia de Dificuldade dos Problemas Aritméticos Narrativos**

A hierarquia entre as categorias dos problemas aritméticos narrativos tem importantes repercussões para o planejamento curricular. Ao observar como as crianças resolvem problemas conforme sua estrutura semântica, é possível obter pistas sobre atrasos na aquisição das habilidades numéricas-aritméticas, bem como do nível de desenvolvimento que a criança se encontra na trajetória de aprendizagem (Clements & Sarama, 2014, 2021; Sarama & Clements, 2009; Krajewski, 2008).

A hierarquia de dificuldade das categorias de problemas narrativos foi investigada por diferentes autores (Carpenter & Moser, 1982; Gomides et al., 2021; Peake et al., 2015; Riley et al., 1983; Clements & Sarama, 2021). Os primeiros problemas resolvidos pelas crianças são

---

problemas de ação com resultado desconhecido (Carpenter & Moser, 1982; Gomides et al., 2021; Peake et al., 2015; Clements & Sarama, 2021). Esses problemas são mais fáceis porque podem ser resolvidos por modelação direta das ações e/ou estratégias baseadas na contagem (Carpenter & Moser, 1982; González & Espinel, 2002; Clements & Sarama, 2021). A modelação direta das ações consiste em utilizar manipulativos para representar as quantidades e as manipulações envolvidas nos problemas narrativos.

Ao estabelecer um paralelo com o Modelo de Trajetória do Desenvolvimento do Conceito de Número, crianças do Nível I não conseguem modelar as ações dos problemas, e, por isso, não conseguem resolvê-los. Nesse nível, a função do número está intrinsecamente relacionada à contagem. Sendo assim, as crianças são capazes apenas de enumerar um conjunto de objetos. Quando terminam de contar os objetos, o número se esvai junto com a ação (Fritz, et al., 2013, 2019). Assim, as crianças do Nível I não conseguem reunir ou separar dois conjuntos que são apresentados na forma de numerais verbais ou arábicos. Os problemas podem ser resolvidos somente quando o total é representado por meio de manipulativos, e, portanto, a criança consegue encontrar a resposta por meio da contagem dos elementos.

Crianças do Nível II conseguem resolver problemas de ação e de parte-parte-todo, ambos apenas quando envolvem resultados desconhecidos. Neste nível, as crianças já conseguem realizar operações simples de adição e subtração, utilizando a contagem e/ou modelação direta das ações. Elas comumente utilizam representações concretas e gestuais, como os dedos, bem como a ordem dos números recém compreendida, como estratégias para representar as quantidades e contar todos os elementos representados nos problemas narrativos (Balt et al., 2019; Carpenter & Moser, 1982). Por essa razão, crianças do Nível II também são chamadas de “contadoras”. Elas ainda não compreendem o que significa adicionar e subtrair, em termos de manipulação dos conjuntos. Elas são dependentes, na maioria das vezes, de

materiais concretos ou de seus dedos para a resolução dos problemas. Além disso, crianças desse nível conceitual ainda não compreendem a relação inversa entre as operações de adição e subtração. Por conseguinte, elas não modelam os problemas de forma abstrata, mas os resolvem apenas como são apresentados. Em problemas de inversão, por exemplo, envolvendo a palavra “ganho”, mas requerendo operações de subtração, a tendência é que a criança utilize equivocadamente a adição para resolvê-lo.

Assim como no Nível II, crianças do Nível III permanecem resolvendo problemas de ação e de parte-parte-todo com resultado desconhecido. Entretanto, a diferença entre as crianças desses níveis se refere ao raciocínio empregado para a resolução dos problemas. Um passo importante no Nível III é a compreensão do conceito de cardinalidade, isto é, que o último numeral contado representa a quantidade de elementos do conjunto. Este é o momento em que as crianças compreendem que o número é uma unidade composta ( $6 = \text{*****}$ ). Portanto, elas começam a entender que um todo pode ser dividido em partes, embora ainda não saibam como fazer para modelar o problema quando uma das partes está ausente. O conceito de cardinalidade possibilita a compreensão da adição e da subtração enquanto união e separação de conjuntos. Além disso, um ganho importante no Nível III se refere à estratégia de contar “a partir” (Le Corre et al., 2006). As crianças não precisam mais contar a quantidade inicial e a quantidade de mudança desde o início, pois compreendem que a quantidade que um número representa não muda, a menos que haja acréscimo ou retirada de elementos. Elas passam a guardar a quantidade inicial e contar a partir dessa, até alcançar a quantidade desejada. O último numeral enunciado corresponde ao resultado do problema. As crianças também podem aprender a contar a partir do maior adendo, diminuindo os passos da contagem e reduzindo as chances de erro (Clements & Sarama, 2021).

Na sequência, as crianças aprendem a resolver problemas com a quantidade intermediária ausente (Clements & Sarama, 2021), como os problemas de ação com mudança desconhecida e parte-parte-todo com parte desconhecida. Os problemas de quantidade intermediária ausente são mais complexos porque exigem a construção de novas representações dos problemas, conectando o esquema parte-parte-todo às operações aritméticas (Langhorst et al., 2012). Outros autores também encontraram que os problemas que envolvem o esquema parte-parte-todo apresentam uma dificuldade intermediária (Riley et al., 1983; Gomides et al., 2021).

Crianças no Nível IV conseguem resolver problemas de ação com quantidade de mudança desconhecida, bem como problemas de parte-parte-todo com uma das partes desconhecidas. Neste nível, os números passam a ser entendidos como uma relação entre três conjuntos: duas partes que formam um todo. Isso permite a compreensão da decomposição flexível dos números, bem como da reversibilidade entre adição e subtração. As crianças agora quando conhecem duas das quantidades, conseguem manipulá-las para resolver o problema, independentemente de ser o todo ou uma das partes ausente.

Crianças do Nível IV conseguem utilizar da decomposição como estratégia para resolver os problemas. Elas passam a utilizar fatos já adquiridos para resolver novos problemas, ou seja, aplicam composições numéricas familiares em novas situações (Carpenter & Moser, 1982). Por exemplo, a criança pode resolver um problema como  $15 - 9$  com o conhecimento de que pode subtrair dez e acrescentar mais um. Assim,  $9 = 10 - 1$  e  $15 - 10 + 1 = 6$ . Além disso, crianças deste nível compreendem a reversibilidade entre adição e subtração e, assim, conseguem selecionar de forma eficiente qual operação deverá ser utilizada para resolver diversos tipos de problemas. Elas podem usar cálculos de adição em problemas que envolvem diminuição na quantidade inicial, bem como cálculos de subtração em problemas que

---

envolvem aumento na quantidade inicial (Carpenter & Moser, 1982). Assim, crianças nesse nível já conseguem resolver problemas que exigem a inversão. Ainda que os problemas de quantidade inicial desconhecida envolvam a compreensão do esquema parte-parte-todo, eles são mais complexos para as crianças, porque envolvem uma manipulação mental das quantidades mais abstratas, e por isso, muitas vezes, crianças de Nível IV ainda não conseguem resolvê-los.

Os problemas mais desafiadores são os que envolvem diferentes métodos e combinações de estratégias, como a decomposição e a inversão, para chegar às respostas dos problemas (Clements & Sarama, 2021; Moretti & Brandt, 2014; Nunes & Bryant, 2015; Robinson, 2019). Os problemas aditivos mais difíceis são os de comparação e os de ação com quantidade inicial desconhecida (Gomides et al., 2021; Moretti & Brandt, 2014). Esses problemas envolvem situações para as quais as crianças não possuem esquemas (Verschaffel & Corte, 1997). Enquanto os problemas de ação são resolvidos por quase 100% das crianças de 6 a 8 anos, os problemas de comparação são resolvidos por apenas 30% das crianças desta mesma faixa etária (Verschaffel & Corte, 1997).

Crianças do Nível V conseguem resolver problemas de comparação, tanto para mais quanto para menos, uma vez que compreenderam o princípio da equidistância da linha numérica. Elas conseguem usar a nova função do número para mensurar a distância entre outros dois números envolvidos nos problemas. A partir do Nível V, as crianças conseguem também resolver problemas de ação com quantidade inicial desconhecida. Esses problemas necessitam de uma compreensão mais aprofundada do esquema parte-parte-todo, precisando assim de prática e aprofundamento dos conhecimentos de Nível IV para que as crianças consigam resolvê-los.

Os problemas de equalização por acréscimo, apesar de exigirem um raciocínio mais abstrato, também podem ser resolvidos por meio da contagem (Carpenter & Moser, 1982; González & Espinel, 2002; Verschaffel & Corte, 1997). Por isso, comumente são resolvidos com sucesso por crianças de Nível II, sobretudo quando a diferença é explicitamente solicitada no problema. Entretanto, quando os problemas de equalização não informam explicitamente a diferença a ser encontrada, eles se tornam mais desafiadores e abstratos. Nesse caso, os problemas envolvem a integração de diferentes estratégias e conceitos, sendo resolvidos somente por crianças que já estão mais avançadas na trajetória de desenvolvimento (Fuson, 2009; Gomides et al., 2021).

Portanto, o diferencial do Nível V se refere à utilização mais madura das estratégias de resolução de problemas, principalmente pelas habilidades de mensurar a distância entre as quantidades utilizando a linha numérica equidistante. Todavia, é importante compreender que as estratégias para a resolução de problemas não são fixas. As estratégias mais simples não são completamente abandonadas quando as crianças avançam na trajetória do conceito de número. O que acontece é que as crianças incorporam estratégias mais sofisticadas e passam a usá-las com maior frequência. Mesmo adultos, quando cognitivamente sobrecarregados, podem recorrer a estratégias mais básicas para resolver problemas, como a contagem. Isso demonstra a flexibilidade na utilização de diferentes estratégias, que podem variar conforme o contexto e a sobrecarga cognitiva.

A Tabela 2 resume os conceitos e habilidades correspondentes a cada nível do Modelo de Trajetória do Desenvolvimento do Conceito de Número, realizando um paralelo com a estrutura semântica e as estratégias de resolução dos problemas aritméticos narrativos.

Portanto, unir os paradigmas teóricos do Modelo de Trajetória do Desenvolvimento do Conceito de Número e da estrutura semântica fornece informações relevantes para a

intervenção na resolução de problemas aritméticos narrativos, porque elucida a ordem que eles devem ser ensinados e o que deve ser observado durante o ensino.

**Tabela 2**

*Paralelo entre os Níveis do Modelo de Trajetória do Desenvolvimento do Conceito de Número e os Problemas Aritméticos Narrativos.*

Nível	Nome	Conceitos/Habilidades	Estratégias de resolução dos problemas aritméticos narrativos	Estrutura semântica
I	Contagem	<ul style="list-style-type: none"> <li>- A função do número é a contagem.</li> <li>- Recitação mecânica da sequência numérica sem compreensão do significado.</li> <li>- Correspondência um para um entre numerais e objetos durante a contagem.</li> <li>- Enumeração precisa de pequenos conjuntos de objetos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Resolução de problemas somente quando a quantidade total é fornecida por meio de manipulativos.</li> </ul>	<p>Crianças deste nível ainda não conseguem resolver problemas apresentados somente na forma verbal.</p>
II	Linha numérica ordinal	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Representação dos números em uma ordem fixa com intervalos não especificados.</li> <li>- Comparação de quantidades através da posição na linha numérica ordinal.</li> <li>- Reconhece antecessores e sucessores de acordo com a posição na sequência numérica.</li> <li>- Realização de operações aditivas com números pequenos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Dependência das estratégias de contagem e de materiais concretos para a resolução dos cálculos.</li> <li>- Contagem de todos os elementos, sempre começando do início.</li> <li>- Resolução de problemas através da contagem de todos os elementos, com modelos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Problemas de ação com resultado desconhecido.</li> <li>- Problemas de parte-parte-todo com todo desconhecido.</li> </ul>
III	Cardinalidade	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ligação do número com a quantidade que ele representa.</li> <li>- Número como unidade composta.</li> <li>- Operações aditivas como adição ou retirada de elementos de um conjunto.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Resolução de problemas através da contagem a partir de um número, seja o primeiro adendo, seja o maior adendo.</li> <li>- Compreensão da composição aditiva.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Problemas de ação com resultado desconhecido.</li> <li>- Problemas de parte-parte-todo com todo desconhecido.</li> </ul>
IV	Relações entre parte-parte-todo	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Raciocínio parte-parte-todo.</li> <li>- Número pode ser composto e decomposto de diferentes formas.</li> <li>- Reversibilidade entre adição e subtração.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Resolução de problemas através da decomposição dos números.</li> <li>- Estratégias aditivas em problemas de subtração e estratégias subtrativas em problemas de adição.</li> <li>- Manipulação flexível das quantidades.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Problemas de ação com quantidade de mudança desconhecida.</li> <li>- Problemas de parte-parte-todo com parte desconhecida.</li> </ul>
V	Linha numérica com intervalos equidistantes	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Números como representação de intervalos da sequência numérica.</li> <li>- Os números são independentes da contagem.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Linha numérica como estratégia para resolução de problemas. Operações na linha numérica realizadas a partir de qualquer número e em ambas as direções.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Problemas de ação com a quantidade inicial desconhecida.</li> <li>- Problemas de parte-parte-todo com a parte inicial desconhecida.</li> <li>- Problemas de comparação.</li> </ul>

*Nota.* (cf. Balt et al., 2019; Freitas et al., 2022; Fritz et al., 2013).

### **Implicações Práticas e Educacionais**

O presente artigo consiste em uma pesquisa teórica que une as perspectivas da estrutura semântica dos problemas aritméticos narrativos e o Modelo de Trajetória do Desenvolvimento do Conceito de Número. A principal implicação é que existe uma trajetória desenvolvimental de aprendizagem da aritmética, que deve ser respeitada. Essa trajetória influencia as estratégias utilizadas para a resolução dos problemas, bem como quais tipos de problemas a criança consegue resolver. Intervenções que não respeitam a trajetória de aprendizagem desenvolvimental das crianças não são efetivas para promover o desempenho matemático inicial (Balt et al., 2020; Clements & Sarama, 2014).

Grande parte das intervenções, bem como o próprio ensino formal em matemática, baseia-se em avaliações cumulativas. Nessas avaliações, o desempenho do aluno é comparado com uma amostra normativa, correspondente à idade ou ao ano escolar (Balt et al., 2019). No entanto, esse tipo de avaliação oferece poucas informações quanto às habilidades e conceitos que a criança possui, ainda que iniciais. Por isso, uma alternativa é utilizar avaliações formativas, em que a criança é comparada com ela mesma. Nesse sentido, essa avaliação se fundamenta na comparação entre as habilidades prévias e atuais da criança (Gotwals, 2018). A avaliação formativa norteia a intervenção porque direciona o ensino para habilidades e conceitos que a criança precisa aprender para atingir o próximo nível.

É possível utilizar o conhecimento sobre os problemas aritméticos narrativos e a descrição dos conceitos de cada um dos níveis do Modelo de Trajetória do Desenvolvimento do Conceito de Número para propor uma avaliação formativa (Balt et al., 2020) que seja norteadora das intervenções. Ao estabelecer uma conexão entre o Modelo de Trajetória do Desenvolvimento do Conceito de Número e a estrutura semântica dos problemas, torna-se

---

possível reconhecer as estratégias empregadas pela criança e em que nível ela está em sua trajetória de desenvolvimento.

No entanto, há a necessidade de estudos empíricos que investiguem essa questão. Estudos transversais podem investigar a associação entre os níveis do Modelo de Trajetória do Desenvolvimento do Conceito de Número e as estratégias utilizadas na resolução de problemas aritméticos narrativos. Estudos longitudinais devem incluir a observação das estratégias utilizadas para resolver problemas com diferentes estruturas semânticas. Estudos experimentais podem realizar intervenções de estruturação semântica dos problemas aritméticos narrativos e observar os desfechos no Modelo de Trajetória do Desenvolvimento do Conceito de Número, e vice-versa.

Este trabalho buscou trazer contribuições para a área de interface entre Psicologia e Educação, ao propor a integração entre perspectivas teóricas sobre o desenvolvimento do conceito de número e a estrutura semântica dos problemas aritméticos narrativos. Tal integração fornece sustentação para o planejamento de intervenções mais alinhadas às trajetórias de aprendizagem das crianças e sugere caminhos para que pesquisas futuras possam investigar empiricamente o processo de aquisição dos conceitos numéricos-aritméticos essenciais para a resolução dos problemas.

---

## Referências

- Balt, M., Ehlert, A., & Fritz, A. (2019). Assessment in inclusive mathematics education. Approaches to designing progress assessments for numeracy learning. In D. Kollosche, R. M. J. Souza, M. Knigge, M. G. Penteadó, & O. Skovsmose (Eds.), *Inclusive mathematics education* (pp. 197–216). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-11518-0\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-030-11518-0_14)
- Balt, M., Fritz, A., & Ehlert, A. (2020). Insights into first grade students' development of conceptual numerical understanding as drawn from progression-based assessments. *Frontiers in Education*, 5, Article 80. <https://doi.org/10.3389/educ.2020.00080>
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1979). *An investigation of the learning of addition and subtraction*. (Theoretical Paper No. 79, pp. 10–53). Wisconsin Research and Development Center for Individualized Schooling. <https://eric.ed.gov/?id=ED188892>
- Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9–24). Taylor & Francis. <https://doi.org/10.4324/9781003046585>
- Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1983). The effect of instruction on children's solutions of addition and subtraction word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 55–72. <https://www.jstor.org/stable/3482306>
- Chan, W. W. L., & Kwan, J. L. Y. (2021). Pathways to word problem solving: The mediating roles of schema construction and mathematical vocabulary. *Contemporary Educational Psychology*, 65, Article 101963. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.cedpsych.2021.101963>

- 
- Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 211–230. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-7834-1>
- Ching, B. H. H., & Nunes, T. (2017). The importance of additive reasoning in children's mathematical achievement: A longitudinal study. *Journal of Educational Psychology*, 109(4), 477–508. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/edu0000154>
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2021). *Learning and teaching early math. The learning trajectories approach* (3rd. ed.). Routledge.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). Learning trajectories. In A. P. Maloney, J. Confrey, & K. H. Nguyen (Eds.), *Learning over time: Learning trajectories in mathematics education* (pp. 1–30). IAP Information Age Publishing.
- Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D., & Nuerk, H. C. (2015). Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology*, 6, Article 129726. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00348>
- Freitas, F. R., Herzog, M., Haase, V. G., & Fritz, A. (2022). Compreensão conceitual do número no diagnóstico e intervenção para as dificuldades de aprendizagem na aritmética. In: V. G. Haase, H. A. T. Simplício e K. S. Benedetti (Orgs.). *Pedagogia do Sucesso* (Vol. 1, pp. 289–312). Ampla Editora.
- Fritz, A., Ehlert, A., & Balzer, L. (2013). Development of mathematical concepts as basis for an elaborated mathematical understanding. *South African Journal of Childhood Education*, 3(1), 38–67. <https://doi.org/10.4102/sajce.v3i1.31>
- Fritz, A., Haase, V. G., & Rasanen, P. (2019). *International handbook of mathematical learning difficulties*. Springer.

- 
- Fuson, K. C. (2009). Avoiding misinterpretations of Piaget and Vygotsky: Mathematical teaching without learning, learning without teaching, or helpful learning-path teaching?. *Cognitive Development*, 24(4), 343–361. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cogdev.2009.09.009>
- Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.
- Gomides, M. R. A., Lopes-Silva, J. B., Moura, R., Salles, J. F. & Haase, V. G. (2021). *PRONUM3RO: Bateria de avaliação do processamento numérico e cálculo*. Vetor.
- González, J. E. J., & Espinel, A. I. G. (2002). Strategy choice in solving arithmetic word problems: Are there differences between students with learning disabilities, G-V poor performance and typical achievement students? *Learning Disability Quarterly*, 25(2), 113–122. <https://psycnet.apa.org/doi/10.2307/1511278>
- Gotwals, A. W. (2018). Where are we now? Learning progressions and formative assessment. *Applied Measurement in Education*, 31, 157–164. <https://doi.org/10.1080/08957347.2017.1408626>
- Jitendra, A. K., Dupuis, D. N., Rodriguez, M. C., Zaslofsky, A. F., Slater, S., Cozine-Corroy, K., & Church, C. (2013). A randomized controlled trial of the impact of schema-based instruction on mathematical outcomes for third-grade students with mathematics difficulties. *The Elementary School Journal*, 114(2), 252–276. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1086/673199>
- Jitendra, A. K., Harwell, M. R., Dupuis, D. N., & Karl, S. R. (2017). A randomized trial of the effects of schema-based instruction on proportional problem-solving for students with mathematics problem-solving difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 50(3), 322–336. <https://doi.org/10.1177/0022219416629646>

- Krajewski, K. (2008). Prävention der Rechenschwäche [The early prevention of math problems]. In W. Schneider, & M. Hasselhorn (Eds.), *Handbuch der Pädagogischen Psychologie* (pp. 360–370). Hogrefe.
- Kutaka, T. S., Chernyavskiy, P., Cong, M., McCreddie, K., Sarama, J., & Clements, D. H. (2023). How arithmetic problem-solving strategy sophistication evolves over time in a kindergarten sample [Preprint]. <https://doi.org/10.31234/osf.io/hjbzg>
- Langhorst, P., Ehlert, A., & Fritz, A. (2012). Non-numerical and numerical understanding of the part-whole concept of children aged 4 to 8 in word problems. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 2(33), 233–262. <https://doi.org/10.1007/S13138-012-0039-5>
- Le Corre, M., & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, 105(2), 395–438. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.10.005>
- Le Corre, M., Van de Walle, G., Brannon, E. M. & Carey, S. (2006). Re-visiting the competence/performance debate in the acquisition of the counting principles. *Cognitive Psychology*, 52(2), 130–169. <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2005.07.002>
- Morales, R. V., Shute, V. J., & Pellegrino, J. W. (1985). Developmental differences in understanding and solving simple mathematics word problems. *Cognition and Instruction*, 2(1), 41–57. [https://doi.org/10.1207/s1532690xci0201\\_2](https://doi.org/10.1207/s1532690xci0201_2)
- Moretti, M. T., & Brandt, C. F. (2014). Dificuldades na resolução de problemas aditivos a uma operação: Ponto de encontro esclarecedor à luz da noção de congruência semântica. *Acta Scientiae*, 16(3). <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/1173>

- 
- Munez, D., Orrantia, J., & Rosales, J. (2013). The effect of external representations on compare word problems: Supporting mental model construction. *The Journal of Experimental Education*, 81(3), 337–355. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1080/00220973.2012.715095>
- Nuerk, H. C., Moeller, K., Klein, E., Willmes, K., & Fischer, M. H. (2015). Extending the mental number line. *Zeitschrift Für Psychologie*, 219(1), 3–22. <https://doi.org/10.1027/2151-2604/a000041>
- Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Wiley-Blackwell.
- Nunes, T., & Bryant, P. (2015). The development of mathematical reasoning. In R. M. Lerner (Ed.), *Handbook of child psychology and developmental science* (pp. 1–48). Wiley.
- Nunes, T., & Bryant, P. (2021). *Using mathematics to understand the world: How culture promotes children's mathematics*. Routledge.
- Nunes, T., Bryant, P., Barros, R., & Sylva, K. (2012). The relative importance of two different mathematical abilities to mathematical achievement. *British Journal of Educational Psychology*, 82(1), 136–156. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1111/j.2044-8279.2011.02033.x>
- Nunes, T., Dorneles, B. V., Lin, P. J., & Rathgeb-Schnierer, E. (2016). *Teaching and learning about whole numbers in primary school*. Springer Nature.
- Oswald, T. M., Beck, J. S., Iosif, A. M., McCauley, J. B., Gilhooly, L. J., Matter, J. C., & Solomon, M. (2016). Clinical and cognitive characteristics associated with mathematics problem solving in adolescents with autism spectrum disorder. *Autism Research*, 9(4), 480–490. <https://doi.org/10.1002/aur.1524>
- Peake, C., Jiménez, J. E., Rodriguez, C., Bisschop, E., & Villarroel, R. (2015). Syntactic awareness and arithmetic word problem solving in children with and without learning

- disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 48(6), 593–601. <https://doi.org/10.1177/0022219413520183>
- Pongsakdi, N., Kajamies, A., & Veermans, K. (2020). What makes mathematical word problem solving challenging? Exploring the roles of word problem characteristics, text comprehension, and arithmetic skills. *ZDM Mathematics Education*, 52, 33–44. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01118-9>
- Powell, S. R., & Fuchs, L. S. (2014). Does early algebraic reasoning differ as a function of students' difficulty with calculations versus word problems? *Learning Disabilities Research & Practice*, 29(3), 106–116. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1111/ldrp.12037>
- Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153–196). Academic Press.
- Robinson, K. M. (2019). Arithmetic concepts in the early school years. In K. M. Robinson, H. P. Osana & D. Kotsopoulos (Eds.) *Mathematical learning and cognition in early childhood. Integrating interdisciplinary research into practice* (pp. 165–185). Springer.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbürger, M., & Hußmann, S. (2012). Taking away and determining the difference: A longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies on Mathematics*, 79, 389–408. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9305-6>
- Siegler, R. S., & Braithwaite, D. W. (2017). Numerical development. *Annual Review of Psychology*, 68, 187–213. <https://doi.org/10.1146/annurev-psych-010416-044101>

- 
- Swanson, H. L. (2014). Does cognitive strategy training on word problems compensate for working memory capacity in children with math difficulties? *Journal of Educational Psychology, 106*(3), 831–848. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1037/a0035838>
- Ta'ir, J., Brezner, A., & Ariel, R. (1997). Profound developmental dyscalculia: Evidence for a cardinal/ordinal skills acquisition device. *Brain and Cognition, 35*(2), 184–206. <https://doi.org/10.1006/brcg.1997.0937>
- Thevenot, C., & Barrouillet, P. (2015). Arithmetic word problem solving and mental representations. In R. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 158–179). Oxford University Press.
- Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: Some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 31–41. <http://www.jstor.org/stable/40248130>
- Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5–28). Psychology Press/Erlbaum (UK) Taylor & Francis.
- Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development, 52*(2), 83–94. <https://psycnet.apa.org/doi/10.1159/000202727>
- Verschaffel, L., & Corte, E. (1997). Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 69–97). Psychology Press.
- Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: A survey. *ZDM – Mathematics Education, 52*, 1–16. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1243930>

- 
- Vicente, S., Orrantia, J., & Verschaffel, L. (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: Ayudas textuales y gráficas. *Journal for the Study of Education and Development*, 31(4), 463–483.  
<https://psycnet.apa.org/doi/10.1174/021037008786140959>
- Von Aster, M. G., & Shalev, R. S. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine & Child Neurology*, 49(11), 868–873.  
<https://doi.org/10.1111/j.1469-8749.2007.00868.x>
- Zheng, X., Swanson, H. L., & Marcoulides, G. A. (2011). Working memory components as predictors of children's mathematical word problem solving. *Journal of Experimental Child Psychology*, 110(4), 481–498.  
<https://psycnet.apa.org/doi/10.1016/j.jecp.2011.06.001>