



Lupércio França Bessegato<sup>(a)</sup>, Roberto da Costa Quinino<sup>(b)</sup>,  
Augusto dos Reis Pereira<sup>(c)</sup>

(a) Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, Brasil / lupercio.bessegato@ufjf.edu.br

(b) Universidade Federal de Minas Gerais, MG, Brasil / roberto@est.ufmg.br

(c) Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, Brasil / augusto.pereira@ice.ufjf.br

## PLANEJAMENTO ECONÔMICO DE CONTROLE ON-LINE POR ATRIBUTO EM PRESENÇA DE ERROS DE CLASSIFICAÇÃO

### RESUMO

*O controle on-line de processos consiste na inspeção de um único item a cada “m” itens produzidos. Se o processo encontra-se sob controle estatístico, a fração de itens conformes produzidos é  $p_1$ ; caso contrário, quando o processo está fora de controle, é  $p_2 < p_1$ . Se o item inspecionado for declarado não conforme, considera-se que o processo de produção está fora de controle e ele é paralisado e ajustado para retornar à sua situação original. Caso o item inspecionado seja classificado como conforme não se intervém na produção. Este trabalho apresenta uma extensão a esse modelo, propondo um sistema de controle on-line por atributo que utiliza amostras de tamanho irrestrito  $n \geq 1$ . As inspeções estão sujeitas a erros de classificação. A modelagem probabilística do sistema de controle utiliza as propriedades de cadeia de Markov ergódica. A expressão do custo médio do sistema por item produzido pode ser minimizada por três parâmetros: o intervalo entre inspeções, “m”, o tamanho da amostra, “n” e o número mínimo de classificações conformes para não se ajustar o processo, “a”. O procedimento é ilustrado por uma aplicação numérica.*

**Palavras-chave:** *Controle on-line por atributo. Planejamento econômico. Erros de classificação. Cadeia de Markov. Algoritmogênico.*

## ECONOMICAL DESIGN OF ON-LINE CONTROL BY ATTRIBUTE IN THE PRESENCE OF MISCLASSIFICATION ERRORS

### ABSTRACT

*The on-line process control for attribute consists of inspecting a single item at every “m” items produced. If the process is in statistical control, the fraction of produced conforming items is  $p_1$ ; otherwise, is  $p_2 < p_1$ , when the process is said to be out of control. If the inspected item is declared non-conforming, it is considered that the production process is out of control and it is paralyzed for adjustment, otherwise the process goes on. This paper presents an extension to this model, proposing an on-line control system for attribute that uses unrestricted sample sizes,  $n \geq 1$ . However, the inspection procedure is subject to misclassification errors. So, a probabilistic model was developed considering the properties of an ergodic Markov chain. An expression of the expected cost function for the control system was obtained to be minimized by three parameters: sampling interval, “m”, sample size, “n”, and the minor number of conforming classifications to declare the process as conforming, “a”. A Numerical example illustrates the proposed model.*

**Keywords:** *On-line process control for attributes. Economical design. Misclassification errors. Markov chain. Genetic Algorithm.*

## 1. Introdução

Taguchi, Elsayed e Hsiang (1989) desenvolveram um processo de controle por atributo, em que o sistema de produção inicia-se operando sob controle (fração de conformidade é igual a  $p_1$ ). Após a ocorrência de uma causa especial (o processo está fora de controle) a fração de itens conformes produzidos muda para  $p_2$ ,  $0 \leq p_2 < p_1$ . A produção opera nessa condição até que seja efetuado um ajuste no processo. O processo de produção reinicia-se em sua condição inicial (fração de conformidade igual a  $p_1$ ) somente após um ajuste. Como forma de minimizar a permanência no estado fora de controle propuseram observar um item a cada “ $m$ ” itens produzidos. Neste sentido, o objetivo foi determinar o intervalo ótimo entre amostragens, “ $m$ ”, tal que o custo médio fosse minimizado. Por meio de simplificações e aproximações, os autores do modelo de Taguchi obtiveram uma expressão fechada para o intervalo de amostragem ótimo ( $m$ ), embora não tenham assumido um modelo probabilístico formal para o tempo de espera até a ocorrência da causa especial.

Dentre outros, Nayeypour e Woodall (1993), Gong e Tang (1997), Borges, Ho e Turnes (2001), Wang e Yue (2001), Dasgupta (2003), Trindade, Ho e Quinino (2007), Dasgupta e Mandal (2008) e Quinino, Colin e Ho (2010) estudaram o procedimento de controle *on-line* de processos por atributo, sugerindo aperfeiçoamentos para que refletissem melhor situações reais.

Nayeypour e Woodall (1993) desenvolveram um modelo para controle *on-line* de processos por atributo assumindo que a mudança do processo para a situação fora de controle ocorre segundo uma distribuição geométrica de parâmetro  $\pi$ . Esta abordagem é mais realística. Com as considerações probabilísticas introduzidas, entretanto, não se pode obter uma expressão explícita para o intervalo ótimo entre inspeções ( $m^0$ ), demandando busca computacional na determinação do valor de minimização da função de custo médio do sistema de controle.

Borges, Ho e Turnes (2001) estudaram o impacto dos erros de classificação no modelo de Taguchi. Os autores consideraram a probabilidade de classificar um item conforme como defeituoso ( $\alpha$ ) e a probabilidade de classificar um item não conforme como conforme ( $\beta$ ). Eles concluíram que mesmo valores pequenos (da ordem de 1%) comprometem a determinação do intervalo

ótimo entre amostragens. Bessegato et al. (2011) propõem uma flexibilização do modelo de controle *on-line* de processos por atributo incorporando intervalos variáveis entre inspeções. Em todos esses modelos são utilizadas amostras unitárias.

Salienta-se que o método de controle *on-line* desenvolvido por Taguchi, Elsayed e Hsiang (1989) relaciona-se com os trabalhos sobre planejamento econômico de cartas de controle “ $np$ ” propostos por Gibra (1978) e Nandi (1978). No entanto, podem ser apontadas duas importantes diferenças. A primeira é que, na proposta de Taguchi, o custo de enviar os itens para o consumidor é maior que o custo de produzir e detectar itens não conformes. De acordo com Nayeypour e Woodall (1993), essa suposição realista de dois custos distintos de itens defeituosos, em sua abordagem econômica, não é encontrada nos modelos de planejamento econômico de cartas “ $np$ ” existentes. A segunda diferença é que a existência de erros de classificação no sistema de inspeção não foi considerada no planejamento de cartas “ $np$ ”.

Neste trabalho, propomos uma generalização do trabalho de Borges, Ho e Turnes (2001) por meio do uso de amostras de tamanho  $n \geq 1$ , classificando-se cada item uma única vez, como conforme ou não conforme. Um sistema de monitoramento com essas características pode recolher uma quantidade maior de informações do processo do que as estratégias de monitoramento que, na tomada de decisão sobre a qualidade do processo de produção, restringem a amostra a um único item. Com a amostra irrestrita, a decisão de intervenção do processo é mais precisa, podendo levar a um custo médio por item produzido menor que aquele obtido pelos procedimentos que utilizam amostra unitária. É considerada a impossibilidade de se coletar sequencialmente vários itens. Essa restrição é incorporada ao modelo considerando-se que, entre a coleta de dois itens sucessivos, são produzidos  $d - 1$  ( $d \geq 1$ ) itens que não serão inspecionados. Quando a amostra for unitária, tem-se o modelo de Taguchi, conforme extensão proposta por Borges, Ho e Turnes (2001). Busca-se, portanto, a determinação do intervalo entre amostragens, do tamanho amostral e do critério de decisão ótimos, ( $m^0$ ,  $n^0$ ,  $a^0$ , respectivamente) que minimizem o custo médio do sistema de controle.

Esse artigo é organizado da seguinte maneira: na Seção 2 são apresentadas as propriedades de uma cadeia de Markov ergódica que são usadas para desenvolver o modelo

probabilístico do sistema de controle, cuja expressão do custo médio é apresentada na Seção 3. Na Seção 4 é exposto exemplo numérico, seguido de uma discussão sobre a influência dos parâmetros probabilísticos do modelo e dos diferentes custos no planejamento ótimo na aplicação numérica. O artigo é encerrado na Seção 5, com as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

## 2. Modelo probabilístico

Consideremos um processo que produz itens individual e independentemente a cada unidade de tempo. O processo inicia sua operação sob controle, possuindo uma fração de itens conformes  $p_1$ . A duração do processo sob essa condição, medida pela quantidade de itens produzidos antes da mudança do processo, é modelada por uma distribuição geométrica. As distribuições geométrica e exponencial não têm memória, fato que facilita a análise matemática. Muitos autores usaram recentemente estas distribuições para descrever mudanças de processo de produção do estado sob controle para estado fora de controle. Citamos, entre outros, Wang e Sheu (2003), Zhang, Xie e Goh (2008) e Serel e Moskowitz (2008), que usaram distribuições exponenciais.

Ho, Medeiros e Borges (2007), Trindade, Ho e Quinino (2007), Dasgupta e Mandal (2008) e Ding e Gong (2008), usaram distribuições geométricas. Salienta-se que, além de facilitar o desenvolvimento de modelos matemáticos, as distribuições nos estudos citados ajustam-se adequadamente a muitas aplicações reais.

O presente estudo considera que o processo atinge uma condição de operação fora de controle devido a uma causa especial ocorrida em algum tempo aleatório de acordo a uma distribuição geométrica com parâmetro  $\pi$ ,  $0 < \pi < 1$ .

Após uma falha, o processo atinge uma condição de operação fora de controle, com fração de itens conformes iguala  $p_2$ ,  $p_2 < p_1$ . A fração de itens conformes retorna a seu valor inicial,  $p_1$ , apenas se o processo de produção for ajustado. O monitoramento do processo se dá por meio da inspeção dos elementos de uma amostra sistemática de tamanho  $n$ ,  $n \geq 1$ .

Os itens inspecionados são submetidos a uma única classificação, sendo então descartados. Considera-se que o sistema de classificação é imperfeito, estando sujeito a erros de classificação. Seja  $\alpha$  a probabilidade de classificar como não conforme um item realmente conforme e  $\beta$ , a probabilidade de classificar um item não conforme como

conforme.

Caso a quantidade de itens amostrais declarados conformes seja menor que  $a$ ,  $1 \leq a \leq n$ , o processo de produção é considerado como fora de controle, sendo paralisado instantaneamente e ajustado para retornar à sua condição inicial.

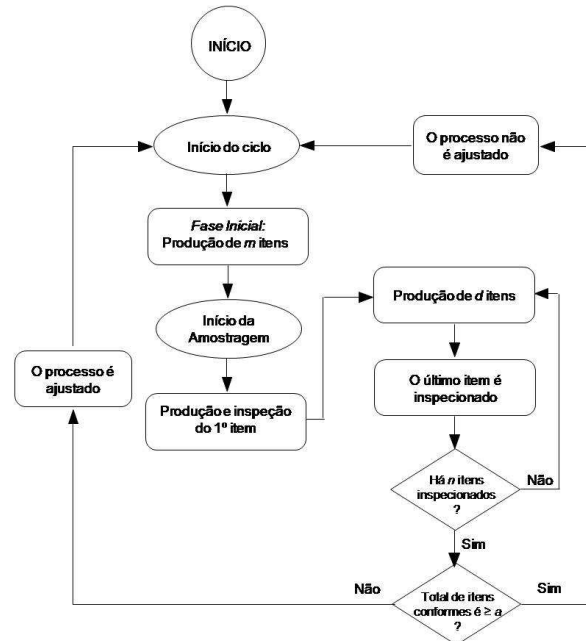


Figura 1: Fluxograma do processo (intervenção e controle)  
Fonte: Os autores.

O fluxograma do sistema de controle do processo (ver a figura 1) segue os seguintes passos: (i) o processo de controle inicia-se sob controle; (ii) produzem-se “ $m$ ” itens durante a fase inicial do ciclo de monitoramento; (iii) produz-se e inspeciona-se o primeiro dos “ $R$ ” itens produzidos durante a fase de amostragem do ciclo de monitoramento,  $R = (n - 1)d + 1$ ,  $R \geq n$ ; (iv) produzem-se os próximos “ $d$ ” itens, inspecionando-se o último deles,  $d \geq 1$  para  $m > 1$  e  $d = 0$  para  $m = 1$ . Essa operação é repetida  $(n - 1)$  vezes, até se completar a amostra. O valor de “ $d$ ” reflete a incapacidade física do sistema de controle coletar sequencialmente os elementos amostrais; (v) se a quantidade de itens inspecionados classificados como conforme for menor que  $a$ , o processo de produção é ajustado, retornando ao passo (i). Caso contrário, inicia-se imediatamente o próximo ciclo de monitoramento no passo (ii). Quando a amostra for unitária ( $n = 1$ ), tem-se o modelo de Taguchi, conforme a extensão proposta por Borges, Ho e Turnes (2001).

A Figura 2 exemplifica o modelo proposto. Em cada ciclo são produzidos  $m = 12$  itens antes do início da coleta da amostra de tamanho  $n = 4$ , com um passo  $d = 3$  entre a coleta de cada item. Durante todo ciclo de monitoramento, são produzidos 22 itens.

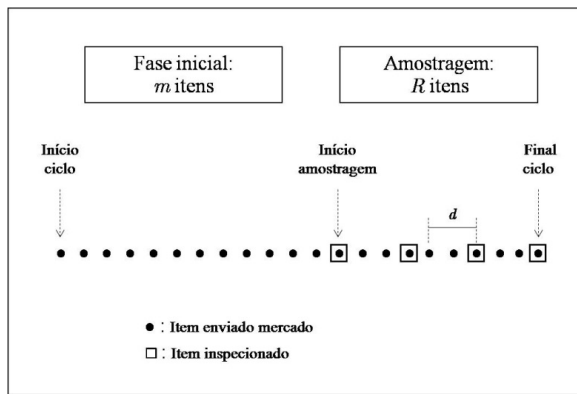


Figura 2 -Diagrama do ciclo do monitoramento  
Fonte: Os autores.

Chamamos de ciclo de regeneração o tempo entre sucessivos ajustes. Os ciclos de regeneração são independentes entre si. Por outro lado, denominamos ciclo de monitoramento (ou ciclo de inspeção) o período de tempo entre coletas sucessivas de amostras. Em cada ciclo de monitoramento são produzidos  $m + R$  itens. A sequência de ciclos de regeneração é um processo de renovação.

As probabilidades de classificar um item inspecionado como conforme, condicionada à real situação do processo, são  $p_A$  (processo está sob controle) e  $p_D$  (processo está fora de controle), cujas expressões são, respectivamente:

$$p_A = p_1(1 - \alpha) + (1 - p_1)\beta \quad (1)$$

$$p_D = p_2(1 - \alpha) + (1 - p_2)\beta \quad (2)$$

O processo de produção, o monitoramento e a regra de decisão sobre o ajuste do processo podem ser modelados por uma cadeia de Markov em tempo discreto, onde cada passo da cadeia representa um ciclo de inspeção. O espaço de estados é denotado por  $E = \{(w, s); w = 0, 1, 2, 3 \text{ e } s = 0, 1\}$ , onde “ $w$ ” indica a condição do processo. Para  $w = 0$ , o processo mantém-se sob controle até o final do ciclo corrente (não há mudança na fração de itens conformes);  $w = 1$ , há mudança no estado do processo durante a produção dos “ $m$ ” primeiros itens do ciclo corrente (fase inicial);  $w = 2$ , a mudança no estado do processo ocorre na fase de amostragem do ciclo corrente (durante a produção dos “ $R$ ” últimos itens do ciclo);  $w = 3$ , o processo opera fora de controle durante todo o ciclo corrente, tendo a mudança de estado ocorrida em ciclos anteriores;  $s = 1$ , ao final da inspeção, o processo não é ajustado e  $s = 0$ , a produção é paralisada para ajuste no processo.

A Figura 3 relaciona o processo de produção aos estados da cadeia de Markov. As probabilidades de transição dos estados são denotadas por  $P_{(w_{i-1}, s_{i-1})|(w_i, s_i)}$ , em que  $(w_i, s_i)$  é o estado corrente no término do  $i$ -ésimo ciclo

monitorado. A probabilidade de o processo permanecer sob controle, dado que o ciclo de monitoramento inicia-se nessa situação, é  $(1 - \pi)^{m+R}$ .

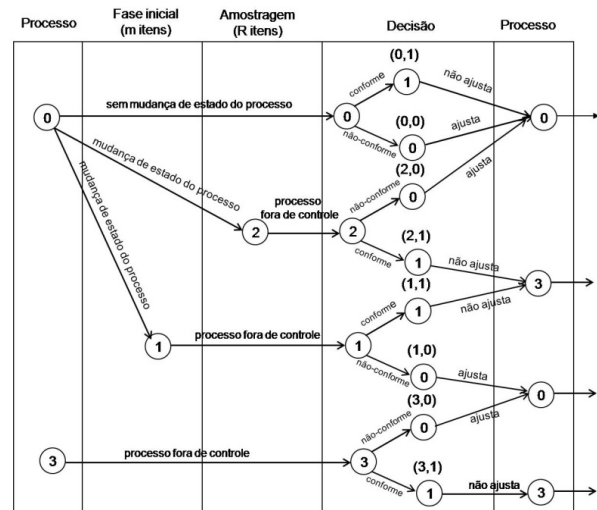


Figura 3: Diagrama do processo de monitoramento  
Fonte: Os autores.

Quando toda a amostra é produzida com o processo operando sob controle ( $w = 0$ ), a quantidade de itens declarados conformes na amostragem tem distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $p_A$ . Assim, a probabilidade de o processo não ser ajustado é  $B_a(n, p_A)$ , em que  $B_j(y, x) = \sum_{i=j}^y b_i(y, x)$ , com  $b_i(y, x) = \binom{y}{i} x^i (1 - x)^{(y-i)}$ .

Assim, empregando a expressão (1), as probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$  para os estados  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$  são, respectivamente:

$$P_{(w,0),(0,0)} = (1 - \pi)^{m+R} [1 - B_a(n, p_A)] \quad (3)$$

$$P_{(w,0),(0,1)} = (1 - \pi)^{m+R} B_a(n, p_A) \quad (4)$$

Após um ajuste do processo, a probabilidade de alteração na fração de itens conformes na fase inicial do ciclo é  $1 - (1 - \pi)^m$ . Associando-a à expressão da probabilidade de não se ajustar o processo exposta no parágrafo anterior, obtém-se as probabilidades de transição dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$  para os estados  $(1, 0)$  e  $(1, 1)$ , que são, respectivamente:

$$P_{(w,0),(1,0)} = [1 - (1 - \pi)^{m+R}] [1 - B_a(n, p_D)] \quad (5)$$

$$P_{(w,0),(1,1)} = [1 - (1 - \pi)^{m+R}] B_a(n, p_D) \quad (6)$$

Distinguimos duas situações nas transições dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$  para os estados  $w = 2$ : (i) a mudança do estado do processo ocorre no primeiro item inspecionado e toda a fase de inspeção se passa com a produção fora de controle; e (ii) a mudança de estado ocorre em algum instante após o início da amostragem, com  $k$  ( $1 \leq k \leq n - 1$ ) itens inspecionados e produzidos com o processo sob

controle e, em consequência, que  $(n - k)$  itens da amostra sejam provenientes do processo operando fora de controle. A probabilidade de que “ $k$ ” itens sejam produzidos com o processo sob controle, dado que houve mudança de estado durante a coleta da amostra, é

$$P_{(0,0),(2,1)} = (1 - \pi)^m \left\{ \pi B_a(n, p_D) + (1 - \pi) \left[ 1 - (1 - \pi)^d \right] \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \pi)^{(k-1)d} \sum_{u=0}^k b_u(k, p_A) \sum_{j=a}^n b_{j-u}(n - k, p_D) \right\} \quad (7)$$

$$P_{(0,0),(2,1)} + P_{(0,0),(2,0)} = (1 - \pi)^m \left[ 1 - (1 - \pi)^R \right] \quad (8)$$

Calcula-se  $P_{(0,0),(2,0)}$  a partir da expressão da probabilidade de ocorrência de mudança de estado doprocesso durante a coleta da amostra, a qual é dada pela expressão (8).

Não são possíveis transições dos estados  $(w, 0)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$  para os estados  $w = 3$ . Assim  $P_{(w,0)(3,s)} = 0$ ,  $s = 0, 1$ .

Os mesmos resultados se aplicam às transições a partir do estado  $(0, 1)$ , já que nessa situação os ciclos também são concluídos com o processo sob controle, ou

$$P_{(1,1),(w,s)} = P_{(2,1),(w,s)} = P_{(3,1),(w,s)} = 0, w = 0, 1, 2 \text{ e } s = 0, 1. \quad (11)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(3,0)} & P_{(1,1),(3,1)} \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(3,0)} & P_{(1,1),(3,1)} \\ P_{(0,0),(0,0)} & P_{(0,0),(0,1)} & P_{(0,0),(1,0)} & P_{(0,0),(1,1)} & P_{(0,0),(2,0)} & P_{(0,0),(2,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{(1,1),(3,0)} & P_{(1,1),(3,1)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\pi' = [\pi_{(w,s)}, w = 0, \dots, 3; s = 0, 1] \quad (13)$$

Com os resultados da expressão (11), a matriz de probabilidades de transição, P, pode ser escrita conforme a expressão (12)

A matriz P é irredutível e aperiódica, possuindo uma distribuição estacionária denotada pelo vetor indicado na expressão (13)

A probabilidade  $\pi_{(w,s)}$  pode ser vista como a proporção de tempo que o sistema de produção visita o estado  $(w, s)$ , após um número suficientemente grande de inspeções. O vetor  $\pi$  é a solução do sistema de equações lineares  $\pi' = \pi' P$ , sujeito à restrição  $\sum_{(w,s) \in E} \pi_{(w,s)} = 1$ . A solução é obtida numericamente.

### 3. Custos dos estados da cadeia de Markov

A estrutura de custos para o problema discutido está bem delineada na literatura, sendo muito semelhante na maioria dos trabalhos.

$(1 - \pi)^{m+(k-1)d+1} [1 - (1 - \pi)^d]$ . Por sua vez, para não se ajustar o processo é necessário que a quantidade de itens classificados como conformes seja maior que “ $a$ ”. Assim, pode-se verificar que a probabilidade de transição do estado  $(0, 0)$  para o estado  $(2, 1)$  é:

seja,  $P_{(0,1)(w,s)} = P_{(0,0)(w,s)}$ ,  $\forall (w, s) \in E$ .

Os estados  $(3, 0)$  e  $(3, 1)$  são visitados apenas se a amostra do ciclo anterior for declarada conforme ( $s = 1$ ), com o processo de produção fora de controle ( $w > 0$ ).

Assim, para  $w = 1, 2, 3$ , tem-se que:

$$P_{(w,1),(3,0)} = 1 - B_a(n, p_D) \quad (9)$$

$$P_{(w,1),(1,1)} = B_a(n, p_D) \quad (10)$$

E, conseqüentemente:

Neste sentido, acompanhamos a composição de custos adotada por Bessegato et al. (2012) e em propostas anteriores. São considerados três componentes de custo: inspeção, ajuste e envio de item não conforme ao mercado. Foi adotada a seguinte notação:  $c_{insp}$ , custo de inspeção e descarte de item produzido;  $c_{nc}$ , custo de envio de item defeituoso para o consumidor final ou para as próximas etapas do processo;  $c_a$ , custo de ajustar o processo. A expressão do custo esperado de cada estado  $(w, s)$ ,  $w = 0, 1, 2, 3$  e  $s = 0, 1$  pode ser expressa como:

$$\phi(w, s) = n c_{insp} + \xi(w, s) + \varphi(w, s) \quad (14)$$

Em que:  $n c_{insp}$  é o custo de realizar “ $n$ ” classificações e descartes por amostra e está presente em todos os estados da cadeia;  $\xi(w, s)$  é o custo esperado por ciclo referente aos itens não conformes dentre os  $m + R - n$  itens não inspecionados que são enviados ao mercado e

$\varphi(w, s)$  é o custo de ajuste do processo de produção por ciclo. Tem-se assim que:

$$\varphi(w, s) = \begin{cases} c_a, & \text{se } s = 0 \\ 0, & \text{se } s = 1 \end{cases} \quad (15)$$

O processo opera sob controle quando ele alcança estados em  $w = 0$ . Nesses casos, o número esperado de itens não inspecionados defeituosos por ciclo é  $(1 - p_1)(m + R - n)$ . Seu custo esperado é:

$$\xi(0, s) = c_{nc}(1 - p_1)(m + R - n), \quad s = 0, 1. \quad (16)$$

Quando há mudança do estado do processo durante a fase inicial do ciclo corrente ( $w = 1$ ), o ponto de mudança da fração de conformidade pode ocorrer em qualquer instante entre o primeiro e o  $m$ -ésimo item produzido durante o ciclo.

$$\xi(1, s) = c_{nc} \left\{ \sum_{t=1}^m q_m(t) [(t-1)(1-p_1) + (m-t+1)(1-p_2)] + (1-p_2)(R-n) \right. \quad (18)$$

$$q_m(t) = \frac{(1-\pi)^{t-1}\pi}{1-(1-\pi)^m}, \quad r = 1, \dots, R, \quad (19)$$

$$k = \begin{cases} \lceil \frac{r-1}{d} \rceil, & n > 1 \\ 0, & n = 1, \end{cases} \quad (20)$$

$$am_{(2,s)} = \begin{cases} \sum_{t=1}^R q_R(t) \{ [t - (k+1)](1-p_1) + [R - n - (t - (k+1))](1-p_2) \}, & \text{se } n > 1 \\ 0, & \text{se } n = 1. \end{cases} \quad (21)$$

Quando  $w = 2$ , há uma mudança de estado do processo durante a coleta da amostra, ou seja, pelo menos um dos “ $R$ ” itens da fase final do ciclo corrente é produzido com o processo fora de controle. A probabilidade de que a mudança ocorra no instante “ $r$ ”, dado que ela ocorra durante a amostragem é representada na expressão (19).

E a quantidade de itens inspecionados, produzidos com o processo ainda sob controle ( $k$ ) é representada na expressão (20), onde  $\lceil x \rceil$  é o menor inteiro maior ou igual a  $x$ .

O número esperado de itens não conformes produzidos e enviados ao mercado durante da amostra,  $am_{(2,s)}$ ,  $s = 0, 1$ , é indicado na expressão (21), onde  $\lceil x \rceil$  é o menor inteiro maior ou igual a  $x$ . O número esperado de itens não conformes produzidos e enviados ao mercado durante da amostra,  $am_{(2,s)}$ ,  $s = 0, 1$ , é indicada na expressão (21).

Durante a fase inicial do ciclo, o processo está sob controle, logo o número esperado de itens conformes é  $(1 - p_1)m$ . O custo médio de envio de itens não conformes ao mercado é:

$$\xi(2, s) = c_{nc} [m(1 - p_1) + am_{(2,1)}], \quad s = 0, 1. \quad (22)$$

Os custos médios de itens não conformes

A probabilidade de a mudança de estado ocorrer no instante “ $t$ ” é:

$$q_m(t) = \frac{(1-\pi)^{t-1}\pi}{1-(1-\pi)^m}, \quad t = 1, \dots, m \quad (17)$$

O número esperado de itens não conformes produzidos na fase inicial do ciclo é  $\sum_{t=1}^m q_m(t) [(t-1)(1-p_1) + (m-t+1)(1-p_2)]$ .

Salientandoque para esses estados toda a inspeção ocorre com a produção operando fora de controle, o número esperado de itens defeituosos não inspecionados é  $(1 - p_2)(R - n)$ .

Assim, o custo médio de itens não conformes enviados ao mercado nos estados em que  $w = 1$ , para  $s = 0, 1$ , que é indicado na expressão (18).

enviados ao mercado dos estados (3,  $s$ ),  $s = 0, 1$  são similares àqueles apresentados em (16), mas com o processo operando fora de controle desde o ciclo anterior. Sua expressão é então:

$$\xi(3, s) = c_{nc}(1 - p_2)(m + R - n), \quad s = 0, 1. \quad (23)$$

Para um grande número de inspeções e considerando que a sequência de ciclos de regeneração é um processo de renovação, logo, pelo Teorema da Renovação, o custo médio por item produzido e enviado ao consumidor  $[C(m, n, a)]$  é a razão entre o custo esperado por ciclo de inspeção  $[E(\Phi)]$  e  $m + R - n$ , a quantidade de itens enviados ao mercado em cada ciclo de inspeção. Logo,

$$C(m, n, a) = \frac{E(\Phi)}{m + R - n} = \frac{\sum_{(w,s) \in E} \pi_{(w,s)} \phi(w, s)}{m + R - n} \quad (24)$$

A determinação dos valores do intervalo entre amostragens, “ $m$ ”, do tamanho da amostra, “ $n$ ” e a quantidade mínima de itens conformes para não se ajustar o processo, “ $a$ ”, de maneira a minimizar  $C(m, n, a)$  é a solução do problema, sendo expressa como:

$$(m^0, n^0, a^0) = \arg \min_{(m,n,a)} C(m, n, a). \quad (25)$$

Não se pode encontrar uma expressão

fechada para (25) e a solução é encontrada computacionalmente. Bessegato et al. (2011) utilizaram uma busca exaustiva para um problema similar, mas com dois parâmetros. Aqui a busca exaustiva não seria simples porque teríamos que avaliar a combinação de três parâmetros ao invés de dois. A dificuldade no uso de métodos clássicos de otimização é reforçada pelas características de complexidade e não linearidade da função objetivo, bem como o requisito de que os argumentos sejam inteiros. Para resolver este problema de otimização de uma maneira aproximada, foram usados algoritmos genéticos.

Os algoritmos genéticos são rotinas computacionais estocásticas baseadas na extensão aplicativa de conceitos da Teoria da Evolução. Goldberg (1989) publicou uma obra fundamental para a consolidação da área, intitulada *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*.

Os algoritmos genéticos têm sido utilizados no planejamento de cartas de controle. Chen (2003) usou algoritmos genéticos ao invés do método convencional para encontrar a solução para um modelo de planejamento econômico-estatístico para uma carta de controle de  $\bar{X}$  com um tamanho amostral fixo e intervalos de amostragem variáveis.

A aplicação de algoritmo genético como uma ferramenta de otimização em controle estatístico de qualidade pode ser encontrada em Chatterjee e Laudatto (1997), Carlyle, Montgomery e Runger (2000), Aparisi e García-Díaz (2004, 2007), Chen, Liao e Chang (2011) e Bessegato, Mota e Quinino (2014).

#### 4. Aplicação numérica

A metodologia proposta é aplicada em exemplo numérico baseado em Bessegato et al. (2011), Trindade, Ho e Quinino (2007), Nandi e Sreehari (1997, 1999), Taguchi, Elsayed e Hsiang (1989) e em casos reais relatados em Dasgupta (2003) e Taguchi, Chowdhury e Wu (2004). A motivação de sua escolha é sua simplicidade e sua facilidade de adequação a outras aplicações. Outros exemplos podem incluir aplicações em manutenção preventiva na produção de semicondutores, produção de diodos em placas de circuito impresso e em processos químicos. Geralmente, o procedimento discutido aqui pode melhorar processos de alta qualidade que empregam algum tipo de controle automático por meio da coleta de observações.

A fabricação de circuitos integrados de

alto volume apresenta dificuldades com o processo de solda, tais como insuficiência ou excesso de solda, projeção de solda ou posicionamento incorreto de dispositivo ou filete. Dados históricos permitem adotar, em processo de solda,  $p_1 = 0.999$  como a probabilidade de conformidade do processo sob controle, podendo-se usar uma distribuição geométrica com parâmetro  $\pi = 0.0001$  para descrever a mudança de estado do processo, operando fora de controle, com fração de conformidade  $p_2 = 0.50$ .

O sistema automático de inspeção por raios-X instalado na linha de produção é imperfeito, assumindo-se os erros de inspeção  $\alpha = \beta = 0,01$ . Os componentes de custo são estimados em  $c_{insp} = \$2.25$ ,  $c_{nc} = \$20$  e  $c_a = \$1000$ .

Consideradas as condições de operação apresentadas acima a melhor estratégia encontrada por meio da aplicação de um algoritmo genético é  $m^0 = 135$ ,  $n^0 = 5$  e  $a^0 = 4$ , implicando um custo médio unitário de \$0.315924. O parâmetro fixo do sistema de coleta da amostra adotado é  $d = 1$ . Caso seja utilizada a estratégia de amostra unitária a intervalos fixos (BORGES, HO e TURNES, 2001), o intervalo ótimo é  $m^0 = 97$ , que oferece um custo médio de \$0.39842 por unidade, 26.1% maior que o proposto neste trabalho.

Para verificação da sensibilidade dos resultados, analisou-se o comportamento dos valores ótimos referentes ao sistema de monitoramento. Variou-se um parâmetro do modelo de cada vez, em um intervalo arbitrariamente grande, mantendo-se os demais valores constantes e iguais àqueles descritos no exemplo numérico. As figuras 4, 5 e 6 ilustram a influência de  $\pi$ , dos erros de classificação e de  $p_2$  sobre os valores ótimos de  $m$ ,  $n$  e do custo.

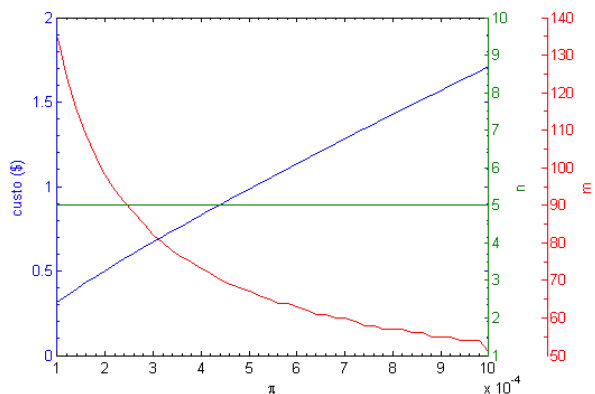


Figura 4 – Gráfico do custo esperado e valores ótimos de  $n$  e  $m$  versus  $\pi$ .

Fonte: Os autores.

Na Figura 4 pode-se verificar que o aumento da probabilidade de falha do processo

( $\pi$ ) leva ao aumento da frequência das inspeções de maneira a possibilitar rapidez na detecção de situações em que o processo esteja fora de controle. No intervalo de variação de  $\pi$  estudado, percebe-se que o tamanho amostral se manteve constante ( $n = 5$ ).

Por outro lado, na análise de sensibilidade dos erros de classificação (Figura 5) observa-se que com o crescimento da probabilidade de erro de classificação há um aumento no valor ótimo de  $n$ . Quanto maior o erro de classificação, mais alta a probabilidade de equívoco. Assim, os valores maiores de  $m$  e  $n$  ajudam a diminuir a taxa de itens mal classificados, ou seja, diminui a quantidade de ajustes desnecessários por unidade.

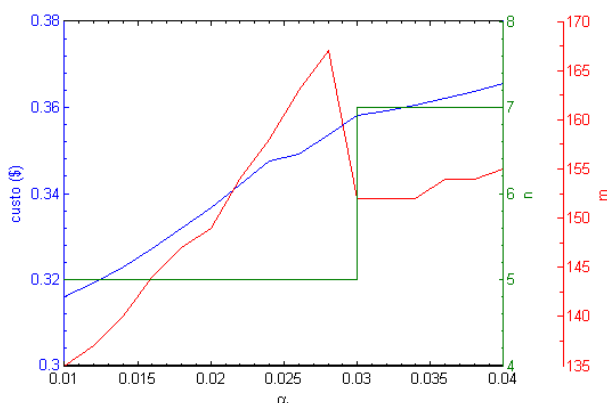


Figura 5: Gráfico do custo esperado e valores ótimos de  $n$  e  $m$  versus  $\alpha$   
 Fonte: Os autores.

Verifica-se também que, para um mesmo valor de  $n$ , o intervalo entre amostragens ( $m$ ) aumenta à medida que  $\alpha$  cresce, ou seja, o aumento no tamanho amostral leva a uma diminuição de  $m$ . Entende-se aqui que uma quantidade maior de informações por amostragem leva a uma diminuição em sua frequência.

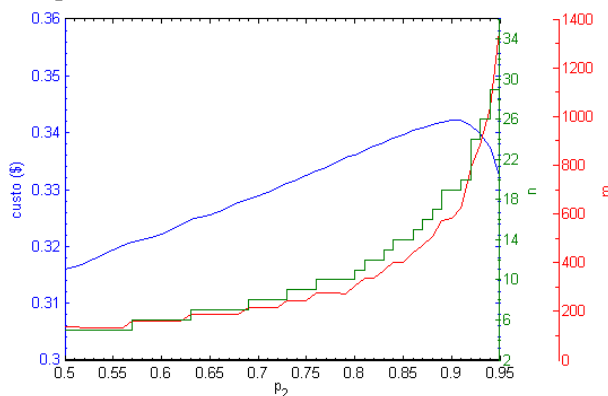


Figura 6: Gráfico do custo esperado e valores ótimos de  $n$  e  $m$  versus  $p_2$   
 Fonte: Os autores.

Por fim, na Figura 6, constata-se que a redução da fração de itens conformes produzidos com o processo de produção fora de controle ( $p_2$ ) resulta em intervalos entre amostragens

crescentes, compensados com amostras de maior tamanho. Esse resultado salienta também que a política de controle proposta neste trabalho apresenta bons resultados quando  $p_2$  não é muito menor que  $p_1 \approx 1$ , como exigido por processos de alto desempenho. Essa observação é razoável já que, quando  $p_2 \rightarrow 0$ , diminui-se a incerteza de a classificação do item inspecionado indicar o real estado do processo de produção.

Por outro lado, o procedimento de controle proposto neste trabalho foi também comparado com o modelo que utiliza amostras unitárias (BORGES, HO e TURNES, 2001).

Verificaram-se os custos unitários médios ótimos de ambos os modelos em uma região arbitrariamente ampla de valores de custos de inspeção ( $c_{insp}$ ) e da fração de conformidade do processo fora de controle ( $p_2$ ), mantidos constantes os demais valores de parâmetros do exemplo numérico. Para cada par ( $c_{insp}$ ,  $p_2$ ) foi calculada a razão entre os custos médios unitários ótimos do sistema de controle apresentados pelos modelos de tamanho amostral irrestrito e de amostra unitária.

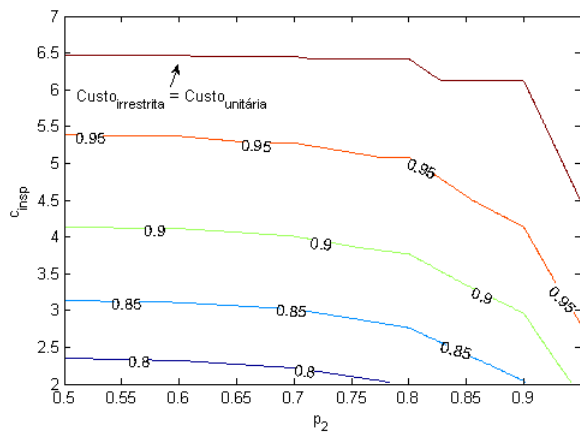


Figura 7: Gráfico  $c_{insp}$  versus  $p_2$   
 Fonte: Os autores.

A Figura 7 apresenta as curvas de nível dessas razões. Verifica-se que para valores de  $c_{insp}$  abaixo de \$6.50, o modelo proposto apresenta custos menores que o modelo de amostra unitária. Salienta-se que essa vantagem do procedimento com amostra irrestrita diminui para valores de  $p_2$  próximos ao adotado para  $p_1$  no exemplo numérico. Um dos pontos-chaves na aplicabilidade dos modelos de planejamento econômico para controle *on-line* de processos é garantir que os planos e custos associados sejam suficientemente robustos às entradas do modelo, especialmente aqueles que apresentam maior dificuldade para a sua estimação.

Alguns parâmetros de custo, como por exemplo, a perda referente ao envio de unidades não conformes para um determinado cliente não podem ser determinados com precisão. No



exemplo especificado, o gestor deve considerar que seus clientes podem apresentar capacidades diferenciadas de percepção das não conformidades, não sendo uniformes quanto ao modo de reação e de oferecimento de *feedback*.

Em consequência, apresentam expectativas distintas de aquisições futuras. O custo do envio de um item não conforme está condicionado, portanto, a uma infinidade de fatores que expandem sua variabilidade e a incerteza quanto à sua formalização.

No presente estudo, propõe-se uma

abordagem baseada no estudo das variáveis de planejamento e de custo final, em resposta à imposição de níveis distintos de ruído ou perturbação nos parâmetros de custo (entradas), admitindo-se a possibilidade de quantificação de cenários de incerteza associados a esses parâmetros.

Inicialmente, é assumido que cada parâmetro de custo pode atingir três níveis de ruído com magnitudes conhecidas e que cada combinação admissível para as entradas é equiprovável.

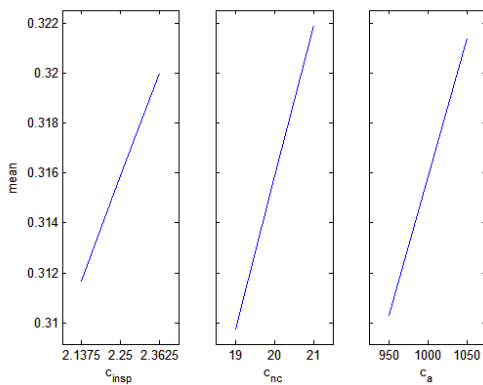


Figura 8 – Gráfico de efeitos principais e interações ±5%  
Fonte: Os autores.

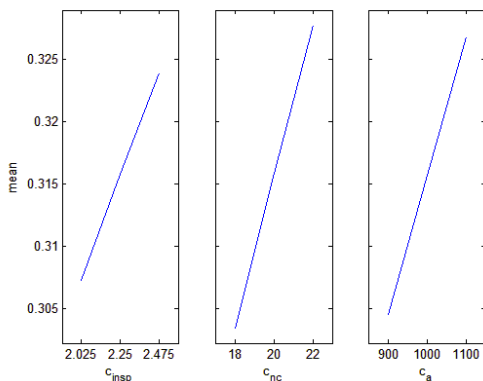
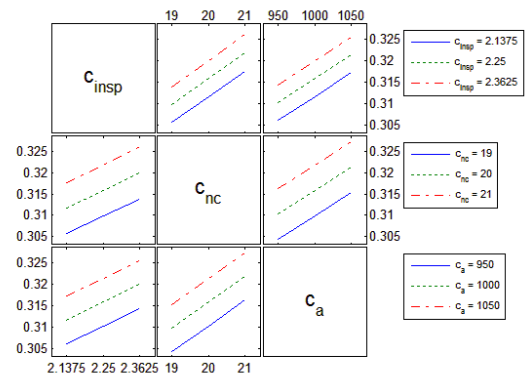


Figura 9 – Gráfico de efeitos principais e interações ±10%.  
Fonte: Os autores.

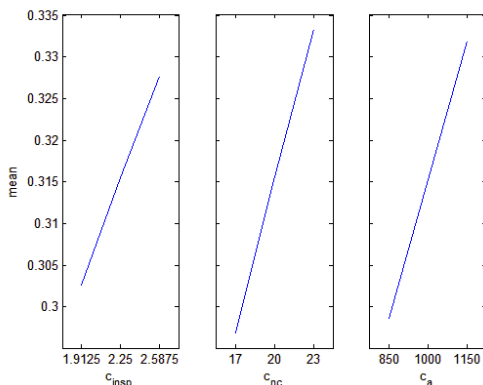
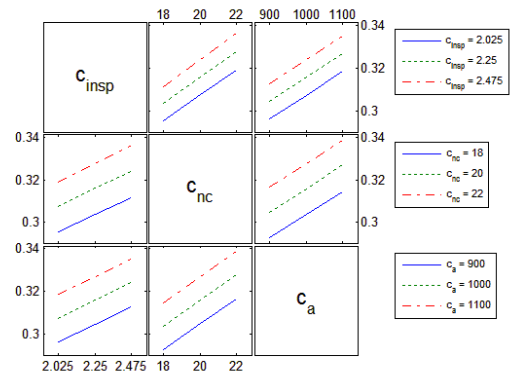
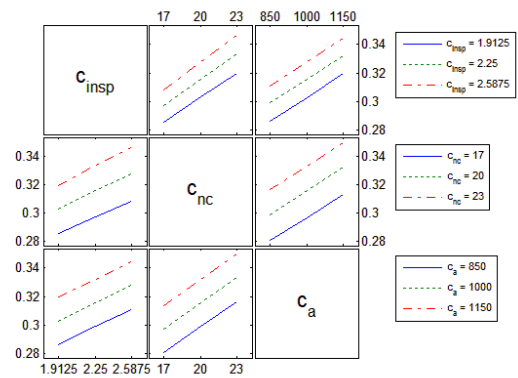


Figura 10 – Gráfico de efeitos principais e interações ±15%.  
Fonte: Os autores.



Nesse sentido, constitui-se um planejamento fatorial no qual 3 fatores de custo

(custo de inspeção, custo de envio de item não conforme, custo de ajuste) são condicionados a

três níveis em uma amplitude de variação de  $k \times 100\%$ , a saber; o nível 1 corresponde a uma redução de  $k \times 100\%$  no valor original proposto no exemplo; o nível 2 compreende a manutenção do valor inicial, sem incidência de perturbação; o nível 3, que projeta um aumento de  $k \times 100\%$  no valor indicado pelo exemplo. O número de combinações possíveis equivale a  $3^3 = 27$ . Os testes são desempenhados para os seguintes níveis de incerteza:  $k = 0,05$ ;  $k = 0,10$ ;  $k = 0,15$ .

A variabilidade resultante sobre o custo médio unitário é quantificada através de gráficos de efeitos principais (*maineffectplots*) e gráficos de interação (*interactionplots*), de maneira a avaliar a robustez do modelo e comprovar sua validade de aplicação. Os resultados são apresentados nas Figuras 8, 9 e 10.

Tabela 1 - Valores dos efeitos principais para níveis de perturbação de 5%, 10% e 15%

Custo	5%		10%		15%	
	Efeito Principal	Variação	Efeito Principal	Variação	Efeito Principal	Variação
$c_{insp}$	0,0083	2,6%	0,0167	5,3%	0,0250	7,9%
$c_{nc}$	0,0121	3,8%	0,0243	7,7%	0,0364	11,5%
$c_a$	0,0111	3,5%	0,0223	7,1%	0,0334	10,6%

## 5. Conclusões

Nos casos em que existem erros de classificação no sistema de inspeção por atributos, o modelo desenvolvido considerando o uso de amostragem não unitária e um critério para o julgamento do item conforme proporciona uma estratégia de controle tão ou mais eficiente que os modelos de inspeção mais simples desenvolvidos por Borges, Ho e Turnes (2001) em que a amostragem era unitária. Por outro lado, o modelo proposto é mais complexo uma vez que demanda o uso de amostragem não unitária. No entanto, conforme descrito na seção 4, observamos que o uso da amostragem unitária pode levar a um custo cerca de 26% maior, o que justifica o uso da amostragem não unitária.

O que determina o quão mais eficiente será o modelo desenvolvido é a combinação específica dos fatores de custo, das probabilidades de produção nos estados sob e fora de controle, da probabilidade de mudança de estado e dos erros de inspeção do sistema de controle em questão. Para várias simulações realizadas pelos autores, a compensação do uso do modelo proposto é notória, sendo recomendado que o uso do modelo proposto sempre seja uma alternativa a ser avaliada economicamente.

Para trabalhos futuros sugere-se a inclusão de associação de amostras de mais de um item com intervalos de amostragem variável. Esta situação pode levar a uma redução do custo

Os gráficos de efeitos principais evidenciam uma alta dependência entre o custo médio do sistema de controle por item produzido e os custos de ajuste ( $c_a$ ) e de envio de itens não conformes ao mercado ( $c_{nc}$ ).

A importância de cada parâmetro está quantificada na Tabela 1 que mostra a mudança no custo médio do sistema de monitoramento produzido pela variação entre os custos unitários dos níveis 1 e 3 para cada parâmetro de custo considerado no modelo.

Portanto, recomenda-se especial cautela com os adicionais de custo de envio de um item não conforme devido à dificuldade de avaliar sistematicamente o impacto da incerteza deste custo nas variáveis de custo e no custo médio unitário correspondente.

médio unitário do sistema de controle generalizando-se assim o trabalho de Bessegoet al. (2014). Propõe-se também o uso da inclusão de uma mudança gradativa na migração do estado sob controle para o fora de controle. Isto seria observado indiretamente por meio da diminuição da fração de itens conformes. Tal aperfeiçoamento poderia ser incluído no modelo por meio da inclusão de mais estados além dos estados sob controle e fora de controle. Tal abordagem poderia tornar o modelo ainda próximo da realidade estimando assim melhor o custo médio do sistema. Entendemos que quanto maior o tempo de degradação entre os estados sob controle e fora de controle, mais correto será o custo médio do sistema de produção. Como último ponto, informamos que a macro desenvolvida em MatLab pode ser obtida diretamente com os autores.

## 6. Agradecimentos

Os autores agradecem a FAPEMIG por seu apoio financeiro ao projeto. Também agradecem as sugestões dos revisores e do editor que melhoram substancialmente a qualidade dessa versão final.

## 7. Referências Bibliográficas

APARISI, F.; GARCÍA-DIAZ, J. C. Optimization of univariate and multivariate exponentially weighted

- moving-average control charts using genetic algorithms. **Computers & Operations Research**. v. 31, p. 1427-1454, 2004.
- APARISI, F.; GARCÍA-DIAZ, J. C. Design and optimization of EMWA control charts for in-control, indifference and out-of-control regions. **Computers & Operations Research**. v. 34, p. 2096-2108, 2007.
- BESSEGATO, L. F.; MOTA, L. S.; QUININO, R. C. Online control by attributes in the presence of classification errors with variable inspection interval. **Communications in Statistics – Theory and Methods**. No prelo, 2014.
- BESSEGATO, L. F.; QUININO, R. C.; DUCZMAL, L. H.; HO, L. L. On-line process control using attributes with misclassification errors: an economical design for short-run production. **Communications in Statistics – Theory and Methods**. v. 41, p. 1813-1832, 2012.
- BESSEGATO, L.; QUININO, R.; HO, L. L.; DUCZMAL, L. Variable sampling interval in economical designs for online process control for attributes with misclassification errors. **Journal of the Operational Research Society**. v. 62, p. 1365-1375, 2011.
- BORGES, W.; HO, L. L.; TURNES, O. An analysis of Taguchi's on-line quality monitoring procedure for attributes with diagnosis errors. **Applied Stochastic Models in Business & Industry**. v. 17, p. 261-276, 2001.
- CARLYLE, W. M.; MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. Optimization problems and methods in quality control and improvement. **Journal of Quality Technology**. v. 32, p. 1-17, 2000.
- CHATTERJEE, S.; LAUDATTO, M. Genetic algorithms in statistics: procedure and applications. **Communications in Statistics – Simulation and Computation**. v. 26, p. 1617-1630, 1997.
- CHEN, Y. K. An evolutionary economic-statistical design for VSI X control charts under non-normality. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**. v. 22, p. 602-610, 2003.
- CHEN, Y. K.; LIAO, H. C.; CHANG, H. H. Re-evaluation of adaptive X control charts: a cost-effectiveness perspective. **International Journal of Innovative Computing, Information and Control**. v. 7, p. 1229-1242, 2011.
- DASGUPTA, T. An economic inspection interval for control of the defective items in a hot rolling mill. **Journal of Applied Statistics**. v. 30, p. 273-282, 2003.
- DASGUPTA, T.; MANDAL, A. Estimation of process parameters to determine the optimum diagnosis interval for control of defective items. **Technometrics**. v. 50, n. 2, p. 167-181, 2008.
- DING, J.; GONG, L. The effect of testing equipment shift on optimal decisions in a repetitive testing process. **European Journal of Operational Research**. v. 186, p. 330-350, 2008.
- GIBRA, I. N. Economically optimal determination of the parameters of np-control charts. **Journal of Quality Technology**. v. 10, p. 12-19, 1978.
- GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning**. Massachusetts: Addison-Wesley Co., 1989.
- GONG, L.; TANG, K. Monitoring machine operations using on-line sensors. **European Journal of Operational Research**. v. 96, p. 479-492, 1997.
- HO, L. L.; MEDEIROS, P. G.; BORGES, W. S. An alternative model for on-line quality monitoring for variables. **International Journal of Production Economics**. v. 107, p. 202-222, 2007.
- NANDI, S. N. Economic design of np-control charts. **Journal of the Indian Statistical Association**. v. 28, p. 81-85, 1978.
- NANDI, S. N.; SREEHARI, M. Some Improvements in Taguchi's Economic Method Allowing Continued Quality Deterioration in Production Process. **Communications in Statistics: Theory and Methods**. v. 28, n. 5, p. 1169-1182, 1999.
- NANDI S. N.; SREEHARI, M. Economic based on-line quality control method for attributes. **Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series B**. v. 59, n. 3, p. 384-395, 1997.
- NAYEBPOUR, M. R., WOODALL, W. H. An analysis of Taguchi's on-line quality monitoring procedure for attributes. **Technometrics**. v. 35, p. 53-60, 1993.
- QUININO, R.; COLIN, E. C.; HO, L. L. Diagnostic errors and repetitive sequential classifications in on-line process control by attributes. **European Journal of Operation Research**. v. 201, p. 231-238, 2010.
- SEREL, D. A.; MOSKOWITZ, H. Joint economic design of EWMA control charts for mean and variance. **European Journal of Operational Research**. v. 184, p. 157-168, 2008.
- TAGUCHI G, CHOWDHURY S, WU Y. **Taguchi's Quality Engineering Handbook**. New Jersey: John Wiley-Interscience. 2004. 1696 p.
- TAGUCHI G, ELSAYED EA, HSIANG T. **Quality Engineering in Production in Systems**. New York: McGraw-Hill. 1989. 192 p.
- TRINDADE, A. L. G.; HO, L. L.; QUININO, R. C. Monitoring process for attributes with quality deterioration and diagnosis errors. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**. v. 23, n. 4, p. 339-358, 2007.
- WANG, C. H.; SHEU, S. H. Determining the optimal production-maintenance policy with inspection errors: using Markov chain. **Computers & Operations Research**. v. 30, p. 1-17, 2003.
- WANG, M. C.; YUE, J. Economic design of process adjustment for on-line control. **International Journal of Production Research**. v. 29, p. 805-823, 2001.
- ZHANG, C. W.; XIE, M.; GOH, T. N. Economic design of cumulative count of conforming charts under inspection by samples. **International Journal of Production Economics**. v. 111, p. 93-104, 2008.