PRINCIPIA
CAMINHOS DA INICIAÇÃO CIENTÍFICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA (PROPP)
UFJF.BR/PROPP

MODELOS COSMOLÓGICOS NÃO COMUTATIVOS COM PAREDES DE DOMÍNIO

NONCOMMUTATIVE COSMOLOGICAL MODELS WITH DOMAIN WALLS

Iolete Silva Miranda[1]
Gil de Oliveira Neto[2]

DOI: 10.34019/2179-3700.2024.v24.46280
ENVIADO EM: 15/10/2024
APROVADO EM: 11/11/2024

Resumo

No presente trabalho, são estudados modelos cosmológicos não comutativos, onde a não comutatividade é inserida como uma explicação alternativa para a expansão acelerada do Universo. Tal não comutatividade seria, no universo atual, resquício de um universo primordial onde interações quânticas impunham uma geometria não comutativa ao espaço-tempo. Os modelos foram construídos com base no formalismo ADM e no formalismo de Schutz para elaboração de uma formulação Hamiltoniana da teoria da relatividade geral acoplada a um fluido perfeito. O fluido acoplado à teoria será formado por paredes de domínio, defeitos topológicos gerados por quebras espontâneas de simetria durante as transições de fase do universo primordial. Respeitando o princípio cosmológico, o universo é descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker e, na formulação hamiltoniana, a não comutatividade é introduzida na álgebra dos parênteses de Poisson através do chamado parâmetro não comutativo. Por fim, obtêm-se as equações de movimento e os respectivos modelos resultantes, que serão analisados para diferentes valores do parâmetro não comutativo, a fim de determinar como esse parâmetro influencia a dinâmica do fator de escala e se a não comutatividade favorece ou não a expansão acelerada do universo.

Palavras-chave: Modelos Cosmológicos. Não Comutatividade. Paredes de Domínio.

Abstract

The aim of this work is to study noncommutative cosmological models, in which noncommutativity is presented as an alternative explanation for the accelerated expansion of the Universe. In the current universe, such noncommutativity would be a remnant of a primordial universe where quantum interactions imposed a noncommutative geometry on space-time. The models were constructed based on the ADM formalism and the Schutz formalism to develop a Hamiltonian formulation of the

---

1Voluntária no Programa de Iniciação Científica da Universidade Federal de Juiz de Fora. Contato: ioletesmiranda@gmail.com / Currículo: lattes.cnpq.br/9507459864681626
2Professor orientador do Departamento de Física - ICE. Endereço Profissional do Professor Orientador: Universidade Federal de Juiz de Fora - ICE- Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Física. CEP: 36036-330 –Juiz de Fora -MG - Contato: gilneto@fisica.ufjf.br Currículo: lattes.cnpq.br/6670798990638833

theory of general relativity coupled to a perfect fluid. The fluid coupled to the theory will consist of domain walls, topological defects generated by spontaneous symmetry breaking during phase transitions in the early universe. Respecting the cosmological principle, the universe is described by the Friedmann-Robertson-Walker metric and, in the Hamiltonian formulation, noncommutativity is introduced into the algebra of Poisson brackets through the so-called noncommutative parameter. Finally, the equations of motion and the respective resulting models are obtained. These will be analyzed for different values of the noncomutative parameter to determine how that parameter influence the dynamics of the scale factor and whether noncommutativity favors the accelerated expansion of the universe or not.

Keywords: Cosmological Models. Noncommutativity. Domain Walls.

1 INTRODUÇÃO

Em 1998, evidências observacionais de supernovas do tipo Ia obtidas por Saul Perlmutter, Brian Schmidt e Adam Riess apontaram para a expansão acelerada do universo e, em 2011, eles receberam o Prêmio Nobel de Física pela descoberta (SCHMIDT, 2012). Entretanto, a expansão acelerada do universo não pode ser explicada por um universo composto apenas por matéria, pois este desaceleraria em decorrência da atração gravitacional. Logo, deve existir uma energia distribuída em todo o espaço que cause tal aceleração. Esta é a chamada energia escura, uma entidade física de natureza ainda desconhecida que possui pressão negativa e tem efeitos contrários ao da gravitação.

Este trabalho se propõe a oferecer uma interpretação alternativa da expansão acelerada do universo: logo após o *Big Bang*, na época denominada 'Universo Primordial', efeitos quânticos faziam com que as coordenadas que descreviam o universo não comutassem entre si, e parte dessa não comutatividade estaria presente, ainda hoje, no universo, sendo responsável pela aceleração de sua expansão. Assim, na presente tentativa de explicação da expansão acelerada do Universo, essa seria oriunda de uma causa puramente geométrica. Sem termos a necessidade de introduzir uma matéria com propriedades exóticas. O fluido de paredes de domínio se caracteriza por ter uma natureza repulsiva e, portanto, pressão negativa. Essa propriedade confere aos modelos cosmológicos obtidos com o uso de tal fluido uma expansão com uma taxa mais rápida do que a de modelos com fluidos usuais, que tem pressões positivas.

Neste trabalho, foi obtida uma formulação hamiltoniana da relatividade geral. Para tanto, foram utilizados o formalismo ADM (ARNOWITT, 2008) e o formalismo de Schutz (SCHUTZ, 1971). A abordagem hamiltoniana permite reformular a dinâmica do sistema em termos das variáveis do espaço de fase que, no presente caso, são as componentes da métrica do espaço-tempo e os potenciais velocidade que descrevem o fluido.Com o objetivo de introduzir a não comutatividade, foram impostos parênteses de Poisson deformados entre as variáveis do espaço de fase da formulação hamiltoniana do sistema e a evolução temporal dessas coordenadas foi obtida a partir das equações de Hamilton com o auxílio da equação de Friedmann, que formam um sistema de equações diferenciais. A evolução temporal do fator de escala do espaço-tempo quadri-dimensional pôde ser descrita como uma combinação das soluções desse sistema de equações diferenciais, que foram obtidas, numericamente, através do software Maple. Este processo foi repetido para diversos valores do parâmetro não comutativo e os dados gerados foram utilizados para analisar sua influência na dinâmica do fator de escala.

2 METODOLOGIA

Neste trabalho, construímos modelos cosmológicos não comutativos a partir de uma formulação hamiltoniana da relatividade geral. Para isso, utilizamos a métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), que é construída a partir do Princípio Cosmológico e, por isso, descreve o espaço-tempo quadridimensional de um universo homogêneo e isotrópico (D'INVERNO, 1992). Essa métrica é representada pelo elemento de linha

$$ds^2 = -N^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)\right] \quad (1)$$

onde N é a função lapso, advinda do formalismo ADM, $a(t)$ é o fator de escala, k é a constante de curvatura e pode assumir os valores 1, 0 e -1, e r, θ e ϕ são as coordenadas esféricas usuais do espaço tridimensional.

Para tratar o fluido perfeito que compõe o universo, foi utilizado o formalismo de Schutz, que se propõe a descrever a quadrivelocidade do fluido relativístico U_ν em função de seis potenciais velocidade:

$$U_\nu = \mu^{-1}\left(\phi_{,\nu} + \zeta\beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}\right) \quad (2)$$

onde μ é a entalpia do fluido, S sua entropia, θ e ϕ não possuem interpretações físicas claras, e ζ e β estão associados à rotação do fluido (SCHUTZ, 1970). No presente caso, de um universo homogêneo e isotrópico, ζ e β devem ser nulos.

Além disso, a condição de normalização da quadrivelocidade U_ν fornece:

$$U^\nu U_\nu = -1 \ . \qquad (3)$$

Combinando (2) e (3) obtém-se a relação entre a entalpia μ, a métrica do espaço-tempo quadridimensional e os demais potenciais-velocidade. Assim,

$$\mu^2 = -g^{\sigma\nu} \left(\phi_{,\sigma} + \zeta\beta_{,\sigma} + \theta S_{,\sigma}\right) \left(\phi_{,\nu} + \zeta\beta_{,\nu} + \theta S_{,\nu}\right) \ . \qquad (4)$$

Considerando um referencial comóvel ao fluido homogêneo e isotrópico, onde a quadrivelocidade $U_\nu = (N, 0, 0, 0)$, a métrica é dada por (1) e os potenciais ζ e β se anulam, a equação (4) resulta em:

$$\mu = \left[-g^{00}(\phi_{,0} + \theta S_{,0})^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{N} \ . \qquad (5)$$

A partir de algumas considerações termodinâmicas, a equação (5) e a equação de estado de um fluido perfeito, $p = \alpha\rho$, onde p é a pressão do fluido, α uma constante característica de cada fluido e ρ sua densidade, chega-se à pressão do fluido em termos dos potenciais-velocidade e da função lapso.

$$p = \alpha \left(\frac{\dot{\phi} + \theta \dot{S}}{N(1+\alpha)}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}} \qquad (6)$$

A fim de encontrar a densidade Hamiltoniana total de um universo homogêneo e isotrópico, primeiramente deve-se escrever, em termos dos potenciais-velocidade e dos elementos da métrica, **a formulação Lagrangiana da relatividade geral. Nesta formulação, a ação S é formada por um termo puramente geométrico derivado da ação de Einstein–Hilbert e um termo referente a campos de matéria e é dada por**

$$S = \int \sqrt{-g} \left(R + 16\pi p\right) \ d^4x \ , \qquad (7)$$

onde g é o determinante da métrica e R é o escalar de curvatura. Com esta ação, é possível obter as equações de Einstein através de um princípio variacional.

A ação total pode ser escrita como a soma da ação geométrica, S_G, e a ação do fluido, S_f. Assim,

$S = 16\pi\,(S_G + S_f)$

$$S_G = \frac{1}{16\pi}\int R\sqrt{-g}\; d^4x \qquad (8)$$

$$S_f = \int \left(\sqrt{-g}p\right)\; d^4x\ .$$

Introduzindo a métrica (1) e a equação de estado do fluido (6) na ação (8), tem-se:

$$S_G = \int \left(6kNa - \frac{6a\dot{a}^2}{N}\right)\; dtd^3x\ , \qquad (9)$$

$$S_f = \int \left[N^{-\frac{1}{\alpha}}a^3\alpha\left(\frac{\dot{\phi}+\theta\dot{S}}{1+\alpha}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} e^{-\frac{S}{\alpha}}\right]\; dtd^3x \qquad (10)$$

A transição da formulação Lagrangiana para a Hamiltoniana é feita a partir das equações de Hamilton, que definem os momenta canonicamente conjugados ao fator de escala e a cada potencial-velocidade. Assim, a partir das densidades Lagrangianas (9) e (10) e dos momenta é possível escrever as densidades Hamiltonianas:

$$H_G = -\frac{P_a^2}{24a} - 6ka\ , \qquad (11)$$

$$H_f = \frac{P_\phi^{\alpha+1}e^S}{a^{3\alpha}}\ . \qquad (12)$$

Introduzindo as transformações canônicas

$$
\begin{aligned}
T &= -P_S e^{-S} P_{\phi}^{-(\alpha+1)} \ , \\
P_T &= P_{\phi}^{(\alpha+1)} e^{S} \ , \\
\overline{\phi} &= \phi - (\alpha+1)\frac{P_S}{P_{\phi}} \ , \\
P_{\overline{\phi}} &= P_{\phi}
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

a densidade Hamiltoniana toma a seguinte forma:

$$
\mathcal{H} = N(H_G + H_f) = -\frac{NP_a^2}{24a} - N6ka + \frac{NP_T}{a^{3\alpha}} \ . \qquad (14)
$$

As variáveis dinâmicas da teoria, a, T, P_aeP_T, são comutativas. Propõe-se, então, uma formulação onde a Hamiltoniana mantenha a mesma forma, mas com variáveis que não comutem entre si. Assim, obtém-se a densidade Hamiltoniana não comutativa.

$$
\mathcal{H}_{nc} = -\frac{NP_{a_{nc}}^2}{24a_{nc}} - N6ka_{nc} + \frac{NP_{T_{nc}}}{a_{nc}^{3\alpha}} \ . \qquad (15)
$$

A não comutatividade entre as novas variáveis é inserida nos parênteses de Poisson, através do parâmetro não comutativo γ:

$$
\begin{aligned}
&\{a_{nc}, P_{T_{nc}}\} = \{T_{nc}, P_{a_{nc}}\} = \gamma \\
&\{a_{nc}, P_{a_{nc}}\} = \{T_{nc}, P_{T_{nc}}\} = 1 \\
&\{a_{nc}, T_{nc}\} = \{P_{T_{nc}}, P_{a_{nc}}\} = 0
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

Para simplificar o estudo desse modelo, as variáveis não comutativas serão reescritas em termos de variáveis comutativas e do parâmetro não comutativo, assim:

$$
\begin{aligned}
a_{nc} &= a_c + \frac{\gamma T_c}{2} \ , \\
T_{nc} &= T_c + \frac{\gamma a_c}{2} \ , \\
P_{a_{nc}} &= P_{a_c} + \frac{\gamma P_{T_c}}{2} \ , \\
P_{T_{nc}} &= P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2} \ .
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

Pode-se mostrar que essas transformações satisfazem os parênteses de Poisson deformados até a primeira ordem em γ (OLIVEIRA-NETO, 2017).

Então, substituindo as relações (17) e usando o calibre conforme, $N = a_{nc}$, no elemento de linha de FRW (1), e na densidade hamiltoniana (15), obtêm-se:

$$ds^2 = -\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2}\right)^2 dt^2 + \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2}\right)^2 \left[\frac{1}{1-kr^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2)\right] ,$$

(18)

$$\mathcal{H}_{nc} = -\frac{\left(P_{a_c} + \frac{\gamma P_{T_c}}{2}\right)^2}{24} - N6k\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2}\right) + \frac{P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2}}{\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2}\right)^{3\alpha - 1}} .$$ (19)

Da Hamiltoniana (19), obtêm-se as equações de movimento:

$$\begin{aligned}
\dot{a}_c &= \{a_c, \mathcal{H}_{nc}\} = \frac{\partial \mathcal{H}_{nc}}{\partial P_{a_c}} = -\frac{1}{12}\left(P_{a_c} + \frac{\gamma P_{T_c}}{2}\right) + \frac{\gamma}{2}\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2}\right)^{1-3\alpha} , \\
\dot{T}_c &= \{T_c, \mathcal{H}_{nc}\} = \frac{\partial \mathcal{H}_{nc}}{\partial P_{T_c}} = -\frac{\gamma}{24}\left(P_{a_c} + \frac{\gamma P_{T_c}}{2}\right) + \left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2}\right)^{1-3\alpha} , \\
\dot{P}_{a_c} &= \{P_{a_c}, \mathcal{H}_{nc}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{nc}}{\partial a_c} = 12k\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2}\right) + \frac{(3\alpha - 1)\left(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2}\right)}{\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2}\right)^{3\alpha}} , \\
\dot{P}_{T_c} &= \{P_{T_c}, \mathcal{H}_{nc}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{nc}}{\partial T_c} = 6k\gamma\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2}\right) + \frac{\gamma}{2}\frac{(3\alpha - 1)\left(P_{T_c} + \frac{\gamma P_{a_c}}{2}\right)}{\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2}\right)^{3\alpha}} .
\end{aligned}$$

(20)

A partir de (20) é possível obter um sistema de equações diferenciais acopladas cuja solução possibilita encontrar a evolução temporal do fator de escala (MIRANDA, 2023). Para um universo preenchido por paredes de domínio, usa-se a constante do fluido $\alpha = -2/3$. Logo, o sistema de equações diferenciais acopladas é dado por:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_c &= -k\left(a_c + \frac{\gamma T_c}{2}\right) - 3\left(\frac{\gamma a_c^2 \dot{a}_c}{2} - \frac{a_c^2 C}{12} - \frac{a_c \gamma T_c C}{12}\right) \\
\dot{T}_c &= \frac{\gamma \dot{a}_c}{2} + \frac{a_c^2 \gamma T_c}{2} + a_c^3
\end{aligned}$$ (21)

E do vínculo da superhamiltoniana, $H_G = 0$, obtém-se a equação de Friedmann:

$$-6(\dot{a_c}^2 + ka_c^2 + k\gamma a_c T_c) + a_c^3\left(C + \frac{3CT_c\gamma}{2a_c} - 6\gamma\dot{a}_c\right) = 0 \quad . \qquad (22)$$

Definidas as condições iniciais $a_0 = a_c(0)$, $\dot{a_0} = \dot{a_c}(0)$, $T_0 = T_c(0)$ e os valores dos parâmetros *C*, *k* e γ, o sistema de equações diferenciais pode ser resolvido numericamente com auxílio da equação de Friedmann para obtenção de condições iniciais coerentes.

Como resultado, serão obtidas as funções $a_c(t)$e$T_c(t)$, as quais podem ser utilizadas para determinar o fator de escala a_{nc} do modelo cosmológico. Isso é feito através da relação estabelecida entre as variáveis comutativas e não comutativas (17).

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção, a fim de simplificar a notação utilizada, as variáveis comutativas passarão a ser escritas sem índice e as variáveis não comutativas manterão o índice *nc*.

3.1 O caso $k = 0$

Usando$k = 0$ no sistema (21), obtém-se:

$$\ddot{a} = -3\left(\frac{\gamma a^2\dot{a}}{2} - \frac{a^2C}{12} - \frac{a\gamma TC}{12}\right)$$
$$\dot{T} = \frac{\gamma\dot{a}}{2} + \frac{a^2\gamma T}{2} + a^3 \qquad (23)$$

Da mesma forma, a equação de Friedmann (22) torna-se:

$$-6\dot{a}^2 + a^3\left(C + \frac{3CT\gamma}{2a} - 6\gamma\dot{a}\right) = 0\ . \qquad (24)$$

Agora nós vamos estudar como o parâmetro γ modifica a expansão do universo. Para isso, após definidas as condições iniciais a_0e T_0 e o parâmetro C, teremos que variar o parâmetro γ. Para cada conjunto de valores, utilizou-se a equação de Friedmann

(24) para obter a condição inicial $\dot{a}_0$ adequada e resolver o sistema de equações diferenciais (23).

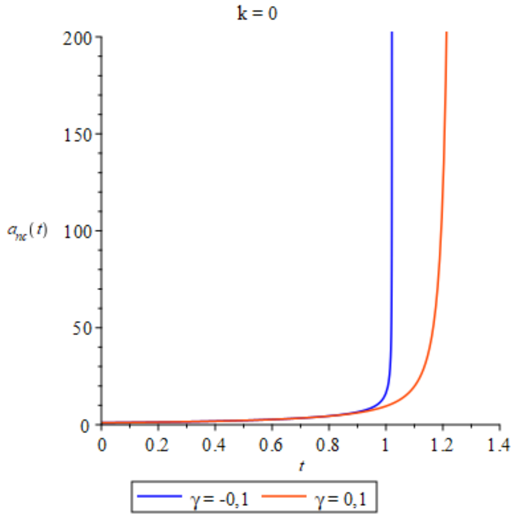
As Figuras 1, 2 e 3 mostram, para alguns valores de $\gamma \geq 0$ e $\gamma \leq 0$, respectivamente, a evolução temporal do fator de escala do universo. O caso comutativo, $\gamma = 0$, foi inserido para efeitos de comparação.

Em trabalhos anteriores (MIRANDA, 2023) também foi analisado o comportamento do fator de escala quando se varia os demais parâmetros presentes na teoria (a_0, $\dot{a}_0$, T_0, C,γ), enquanto os outros eram mantidos fixos. O mesmo foi feito para as outras possibilidades de curvatura, k = -1 e k = 1.

Figura 1: Fator de escala $a_{nc}(t)$ dos modelos cosmológicos não comutativos com k = 0, variando o valor do parâmetro não comutativo $\gamma \leq 0$ e mantendo fixos os valores de a_0 =1, T_0

Figura 2: Fator de escala a_{nc}(t) dos modelos cosmológicos não comutativos com k = 0, variando o valor do parâmetro não comutativo $\gamma \geq 0$ e mantendo fixos os valores de a_0 =1, T_0 =0 e C=10.

Figura 3: Fator de escala $a_{nc}(t)$ dos modelos cosmológicos não comutativos com k = 0, comparando valores de γ iguais em módulo, mas com sinais opostose mantendo fixos os valores de a_0=1, T_0=0 e C=10.



Fonte: O autor.

A não comutatividade foi utilizada para representar a energia escura em conjunto com o fluido de paredes de domínio, que podem ser entendidas como defeitos topológicos que surgiram em transições de fase do universo primordial. As equações resultantes possibilitaram a construção de modelos cosmológicos não comutativos e, quando necessário, a recuperação das equações para o modelo comutativo de forma simples e direta.

A análise dos modelos cosmológicos obtidos revelou que a não comutatividade favorece a expansão acelerada do universo e, em todos os casos, levou à singularidade do tipo *Big Rip*(OLIVEIRA-NETO, 2017). O instante de tempo para o qual ocorre a singularidade é dependente do parâmetro utilizado para representar a não comutatividade, sendo que os menores tempos se dão para os maiores valores do parâmetro em módulo.

Por fim, dados os resultados e as análises feitas, o presente trabalho foi bem-sucedido em mostrar a não comutatividade como uma possível explicação da energia escura.

Como propostas para continuação deste trabalho, é possível buscar uma estimativa do valor do parâmetro não comutativo a partir de dados observacionais ou, ainda, realizar a quantização do modelo utilizando a chamada Cosmologia Quântica. Em suma, essa quantização seria uma quantização canônica, ou seja, os parênteses de Poisson seriam transformados em comutadores e seria obtida uma equação análoga à equação de Schrödinger, a chamada equação de Wheeler-DeWitt.

REFERÊNCIAS

SCHMIDT, B. P. **Nobel lecture: Accelerating expansion of the universe through observations of distant supernovae**. Reviews of Modern Physics, APS, v. 84, n. 3, p. 1151, 2012. Disponível em: https://journals-aps.ez25.periodicos.capes.gov.br/rmp/pdf/10.1103/RevModPhys.84.1151. Acesso em: 14 out. 2024.

D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's relativity.** [S.l.: s.n.], 1992. ISBN 978-0-19-859686-8.

SCHUTZ, B. F. **Hamiltonian theory of a relativistic perfect fluid.** Physical Review D, APS, v. 4, n. 12, p. 3559, 1971. Disponível em: https://journals-aps.ez25.periodicos.capes.gov.br/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.4.3559. Acesso em: 14 out. 2024.

SCHUTZ, B. F. **Perfect fluids in general relativity:** velocity potentials and a variational principle. Physical Review D, APS, v. 2, n. 12, p. 2762, 1970. Disponível em: https://journals-aps.ez25.periodicos.capes.gov.br/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.2.2762. Acesso em: 14 out. 2024.

ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. Republication of: **The dynamics of**

general relativity. v. 40, p. 1997–2027, 2008. ISSN 0001-7701. Disponível em: https://arxiv.org/abs/gr-qc/0405109. Acesso em: 14 out. 2024.

OLIVEIRA-NETO, G.; VAZ, A. R. **Noncommutative cosmological model in the presence of a phantom fluid.**The European Physical Journal Plus, v. 132, n. 3, 1 mar. 2017. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1701.01162. Acesso em: 14 out. 2024.

MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. **Gravitation.** San Francisco: Freeman, 1973. ISBN 0716703440.

MIRANDA, I. S. **Modelos cosmológicos não comutativos com paredes de domínio**. UFJF: Trabalho de Conclusão de Curso [s.n.], 2023. Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/16825. Acesso em: 14 out. 2024.