

## Um estudo sobre a mecânica de árvores<sup>1</sup>

### *A study about the mechanics of trees*

Paula de Oliveira Ribeiro<sup>2</sup>

Marcelo Miranda Barros<sup>3</sup>

DOI: <https://doi.org/10.34019/2179-3700.2019.v19.29894>

#### Resumo

Este trabalho apresenta um estudo do comportamento mecânico de árvores 2D geradas por geometria fractal sujeitas a momentos ou forças horizontais concentradas nas extremidades livres. O modelo geométrico considerado é o da família de árvores autossimilares, ou seja, aquelas evoluídas a partir de proporções constantes pré-definidas. Tais proporções definem a quantidade de ramos filhos de cada ramo pai ( $b$ ), a relação entre os comprimentos de pai e filhos ( $\lambda$ ) e entre as larguras de pai e filhos ( $w$ ). Com a variação de tais parâmetros é possível gerar uma infinidade de árvores, com diferentes características mecânicas. As propriedades mecânicas estudadas foram: momento fletor, tensão normal e energia de deformação elástica devidos à flexão. Estas propriedades foram estudadas sob dois pontos de vista: valores absolutos em cada ordem e relativos entre ordens consecutivas. Foi estudada também a energia elástica total nas árvores e em um cilindro de mesmo volume para efeito de comparação. Foi verificado que a estrutura ramificada é muito mais eficiente na absorção de energia. Uma possível aplicação deste trabalho é na geração de energia elétrica através da vibração de estruturas de árvores associadas a dispositivos piezoelétricos.

**Palavras-chave:** Árvores. Energia. Mecânica.

#### Abstract

This paper presents a study about the mechanical behavior of 2D trees generated by fractal geometry subjected to moments or horizontal loads concentrated at the free ends. The considered geometric model is the family of self-similar trees, that is, those evolved from pre-defined constant proportions. Such proportions define the number of child branches of each parent branch ( $b$ ), the relationship between parent and child lengths ( $\lambda$ ) and between parent and child widths ( $w$ ). With the variation of such parameters it is possible to generate an infinity of trees, with different mechanical characteristics. The mechanical properties studied were: bending moment, normal stress and elastic strain energy due to bending. These properties were studied from two points of view: absolute values in each order and relative values between consecutive orders. The total elastic energy within the trees and in a cylinder of same volume were also studied for comparison purposes. It has been found that the branched structure is much more efficient in energy absorption. One possible application of this result is in the generation of electric energy through the vibration of tree structures associated with piezoelectric devices.

<sup>1</sup> Trabalho premiado no Seminário de Iniciação Científica da UFJF em 2016.

<sup>2</sup> Bolsista do programa PROVOQUE-UFJF. E-mail: paula.ribeiro@engenharia.ufjf.br

<sup>3</sup> Professor orientador do Departamento de Estruturas - Faculdade de Engenharia - Universidade Federal de Juiz de Fora. Rua José Lourenço Kelmer, s/n, Campus Universitário, São Pedro, 25651-075, Juiz de Fora, MG, Brasil. E-mail: marcelo.barros@uff.edu.br



**Keywords:** Trees. Energy. Mechanics.

## 1 INTRODUÇÃO

Sistemas ramificados estão presentes na natureza, como na vascularização de plantas e animais (NIKLAS, 1992), nos rios sobre a superfície da terra (TARBOTON; BRAS; RODRIGUEZ-ITURBE, 1988), em descargas elétricas (KUDO, 1998). Sistemas que evoluem naturalmente tendem a se ramificar a fim de fazer de forma facilitada o transporte de entidades físicas, tais como fluidos e eletricidade (THOMPSON, 1917).

Estruturas ramificadas podem ser descritas pela geometria fractal. A geometria fractal foi proposta por Mandelbrot (1988), tornando possível a descrição de objetos de estruturas irregulares que não eram descritas pela geometria euclidiana. Segundo Nussenzveig (2003), os fractais são conjuntos cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada e que têm essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas.

Neste trabalho, o modelo geométrico considerado é o da família de árvores autossimilares, ou seja, evoluídas em termos de proporções constantes pré-definidas entre ramos pais e filhos (BARROS; BEVILACQUA, 2015). Foram considerados dois modelos com diferentes solicitações externas: momento concentrado ou força horizontal nas extremidades livres. O primeiro é o referencial e o segundo tem como função representar o vento de forma estática.

As propriedades mecânicas estudadas foram: momento fletor, tensão normal devida à flexão, energia de deformação elástica de flexão. Essas propriedades foram estudadas sob dois pontos de vista: valores absolutos em cada ordem e relativos entre ordens consecutivas. O estudo das proporções entre ordens permite estudar as características de organização da árvore e prever se os valores das propriedades em estudo são máximos nas ordens extremas ou no tronco caso haja comportamento monótono. Além disso, foi estudada a energia total das árvores.

Supondo que as estruturas ramificadas são eficientes sob o ponto de vista de acréscimo de energia devido à deformação, uma possível aplicação deste trabalho é a geração de energia elétrica a partir de árvores artificiais. Árvores artificiais associadas a material piezoelétrico podem gerar energia renovável quando vibram, por exemplo devido ao vento.

### 1.1 Objetivos

O objetivo geral do trabalho foi determinar como as propriedades geométricas, os parâmetros evolutivos e o tipo de solicitação interferem nas propriedades mecânicas de estruturas ramificadas. Os objetivos específicos foram:

- Estudar o comportamento mecânico de estruturas de árvores sujeitas a diferentes solicitações externas;
- Encontrar as relações entre os parâmetros geométricos e o comportamento mecânico das árvores;
- Estudar a eficiência de estruturas ramificadas na absorção de energia elástica.

## 2 METODOLOGIA

A metodologia do trabalho consiste em encontrar expressões analíticas gerais para as propriedades mecânicas em função dos parâmetros geométricos. Foram estudados dois modelos de árvores com solicitações externas diferentes, a saber: momentos ou forças horizontais aplicadas nas extremidades.

### 2.1 Geometria da árvore

As árvores autossimilares são definidas a partir de três parâmetros geométricos que relacionam quantidade, comprimento e largura entre ramos pais e filhos em todas as ordens da árvore e são representados, respectivamente, por  $b, \lambda, w$ . Além disso,  $k$  é o identificador das ordens,  $N_k$  é o número de ramos na ordem  $k$ ,  $\lambda_k$  é o comprimento dos ramos da ordem  $k$  e  $w_k$  é a largura dos ramos da ordem  $k$ . Assim, os parâmetros geométricos são definidos da seguinte forma:

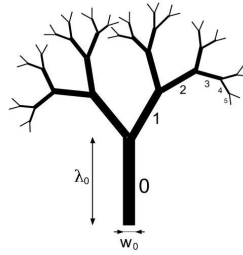
$$b = \frac{N_{k+1}}{N_k} \quad (0)$$

$$\lambda = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \quad (2)$$

$$w = \frac{w_k}{w_{k+1}} \quad (3)$$

A caracterização completa de uma árvore é feita pelos parâmetros  $b, \lambda$  e  $w$ , pelo parâmetro evolutivo  $n$  e pelo tronco inicial  $\lambda_0, w_0$ . A Figura 1 mostra um exemplo de árvore autossimilar com valores iguais para  $\lambda$  e  $w$ , i.e., que apresenta similaridade geométrica.

Figura 1 – Exemplo de árvore autossimilar com parâmetros  $b = 2$ ,  $\lambda = 1.5$ ,  $w = 1.5$  e  $n = 6$ .



Fonte: Ribeiro (2016).

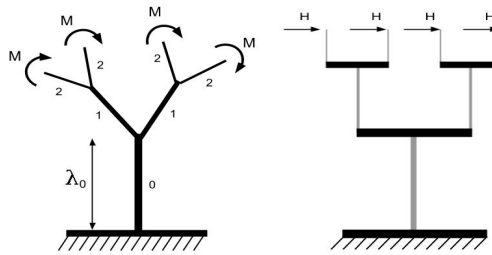
## 2.2 Modelos

O modelo geométrico autossimilar proposto tem como característica a mesma relação entre elementos pai e filho em toda a árvore, i.e.,  $b$ ,  $\lambda$  e  $w$  são constantes. Cada conjunto de parâmetros escolhido gera árvores com comportamento mecânico diferenciado. Os modelos propostos consistem de árvores autossimilares onde os elementos são considerados como barras com comportamento elástico linear. O tronco principal é considerado engastado enquanto que as extremidades são livres e sofrem ações externas.

No modelo 0 todas as extremidades recebem ação de momento concentrado de valor fixo. Como consequência, as barras transmitem esse momento que se distribui de forma constante ao longo de um mesmo elemento e um ramo pai transmite os momentos vindos de seus ramos filhos. Vale destacar que a inclinação das barras quando a ação é dada por momentos externos não influencia no momento fletor ao longo das barras.

No modelo 1 todas as extremidades recebem ação de forças horizontais de valor fixo. O efeito de flexão gerado nas barras depende da distância das forças às seções nas barras e, portanto, cada barra não sofre flexão constante e o ângulo de abertura das ramificações influencia nos momentos fletores nas barras. Portanto as barras serão consideradas com ângulo nulo, i.e., verticais, pois neste caso se maximiza os momentos fletores e assim será estudado o caso mais desfavorável. Neste modelo as barras verticais são consideradas flexíveis e as horizontais rígidas, de maneira que as barras horizontais não influenciem na análise mecânica da estrutura. Este modelo de solicitação pode ser usado para representar a ação do vento como ação estática. A Figura 2 ilustra os modelos 0 e 1.

Figura 2 – Representação dos modelos 0 (esquerda) e 1 (direita)



Fonte: Ribeiro (2016).

## 2.3 Propriedades mecânicas

Os ramos de uma árvore têm, em geral, característica de serem longos e, dependendo da carga externa, são sujeitos a flexões de grande intensidade. Estudamos, portanto, o momento fletor, tensão normal devido à flexão e energia de deformação elástica de flexão.

O momento fletor é a causa da flexão que ocorre em uma barra quando sujeita a forças com componentes perpendiculares ao seu eixo ou à tendência de giro perpendicular ao seu eixo. O momento relativo é definido pela razão entre os momentos fletores máximos em ordens consecutivas, isto é,  $m = M_k^{máx} / M_{k+1}^{Máx}$ .

A tensão representa a sollicitação em um determinado ponto da estrutura. A tensão normal devido à flexão depende do momento fletor, do momento de inércia da seção transversal e da posição em relação ao eixo neutro. A tensão normal absoluta é dada por  $\sigma_k = M_k w_k / 2I_k$  e a relativa por  $\sigma = \sigma_{máx,k} / \sigma_{máx,k+1}$ .

A energia de deformação elástica é o acréscimo de energia que um membro absorve ao ser submetido a uma deformação elástica. Em uma barra de comprimento  $L$ , módulo de elasticidade  $E$  e momento de inércia  $I$  sujeita a um momento fletor  $M(s)$ , a energia elástica é obtida pela seguinte expressão:  $W = 1/2 \int_0^L \frac{M(s)^2}{EI} ds$ . A proporção entre energias totais de ordens consecutivas é dada por  $W = \frac{W_k}{W_{k+1}} = \frac{W_{n-K-1}}{W_{n-K}}$ , sendo  $K = n - k - 1$ .

## 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 3.1 Propriedades mecânicas

Foram deduzidas expressões capazes de quantificar o valor do momento fletor, tensão e energia em cada elemento da estrutura ramificada, conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – Equações das propriedades mecânicas

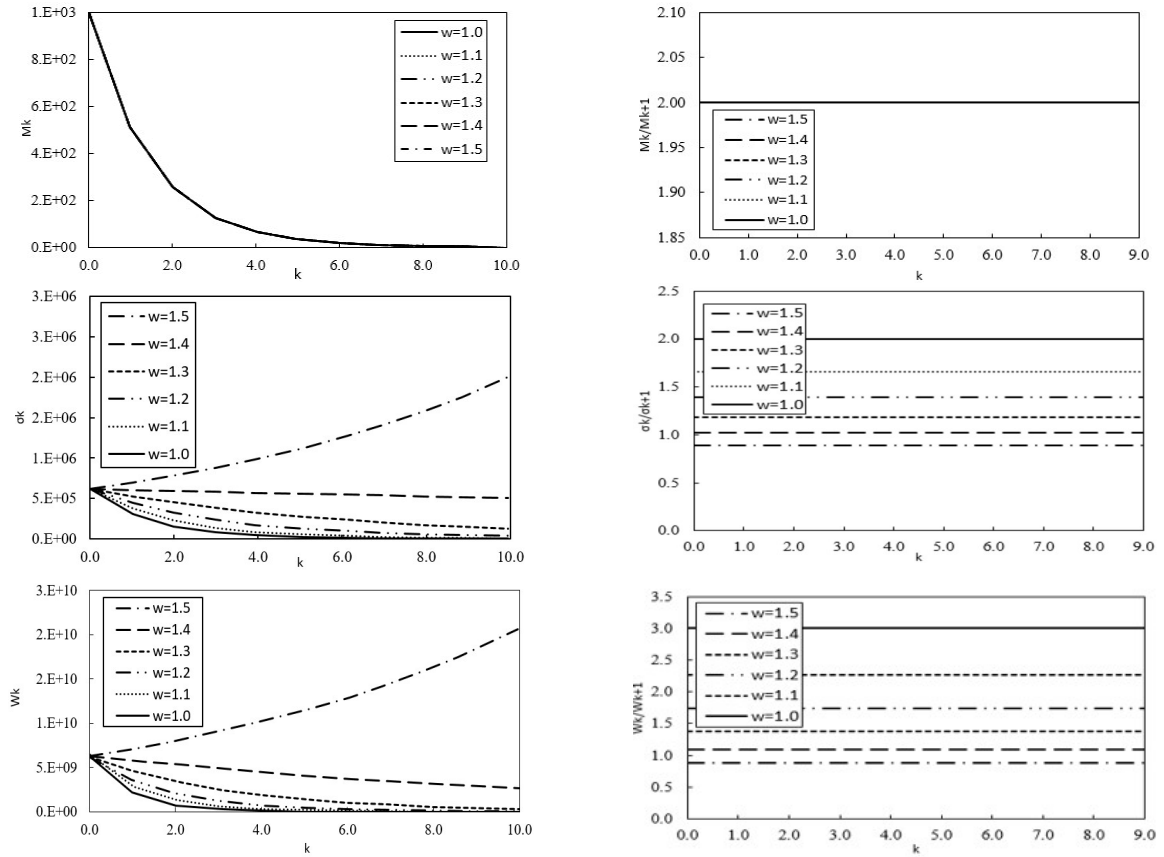
Modelo	Propriedade	Valor absoluto	Valor relativo
Modelo 0	Momento fletor	$M_k = Mb^{n-k-1}$	$m = b$
	Tensão normal	$\sigma_k = \frac{6Mb^{n-k-1}}{w_0^2 w^{-2k}}$	$\sigma = \frac{b}{w^2}$
	Energia	$W_k = 6 \frac{b^k \lambda_0 \lambda^{-k} (Mb^{n-k-1})^2}{E w_0^3 w^{-3k}}$	$W = \frac{b\lambda}{w^3}$
Modelo 1	Momento fletor	$M_k = Hb^{n-k-1} \sum_{i=k}^{n-1} \lambda_i$	$m = bh_k(\lambda)$
	Tensão normal	$\sigma_k = \frac{6Hb^{n-k-1} \sum_{i=k}^{n-1} \lambda_i}{w_0^2 w^{-2k}}$	$\sigma = \frac{m}{w^2}$
	Energia	$W_{n-K-1} = \frac{H^2 b^{2K} N_{n-K-1} \lambda_{n-K-1}}{2EI_{n-k-1} \lambda^{2K}} g_k(\lambda)$ $W_{n-1} = \frac{N_{n-1} H^2 \lambda_{n-1}^3}{6EI_{n-1}}, K = 0$	$W = \frac{b\lambda}{I} \bar{g}_k(\lambda)$

Fonte: Autor (2018).

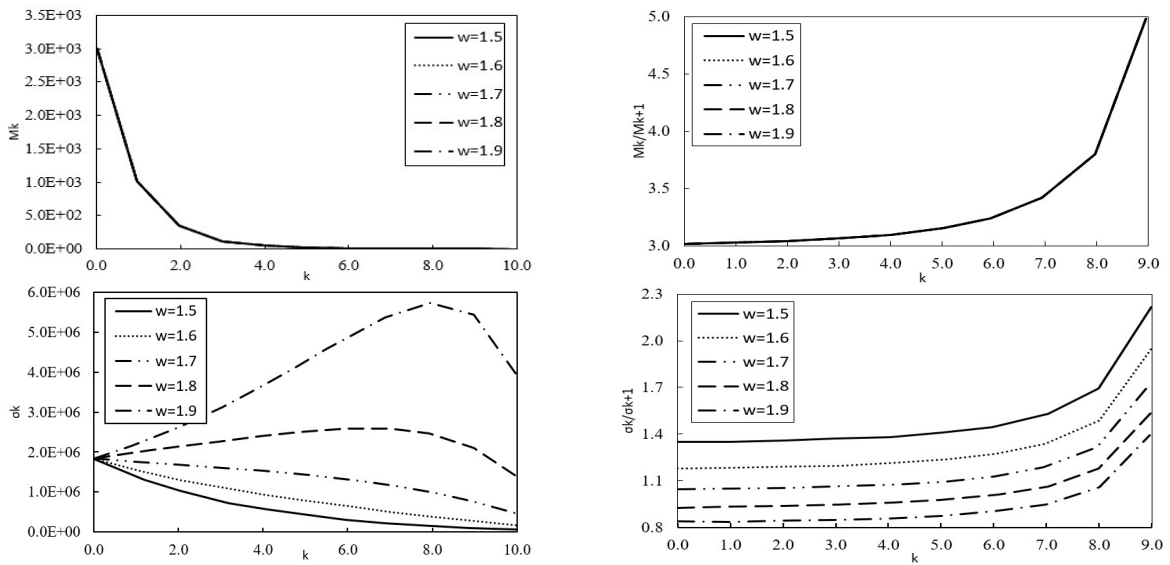
$$h_k(\lambda) = \frac{1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-k-1}}{1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-k-2}}; g_k(\lambda) = \sum_{i=1}^K (i\lambda^{i-1} + (K-i+1)\lambda^{i+K-1}) + \frac{\lambda^{2K}}{3}; \bar{g}_k(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^K (i\lambda^{i-1} + (K-i+1)\lambda^{i+K-1}) + \frac{\lambda^{2K}}{3}}{\sum_{i=1}^{K-1} (i\lambda^{i-1} + (K-i)\lambda^{i+K-2}) + \frac{\lambda^{2(K-1)}}{3}}$$

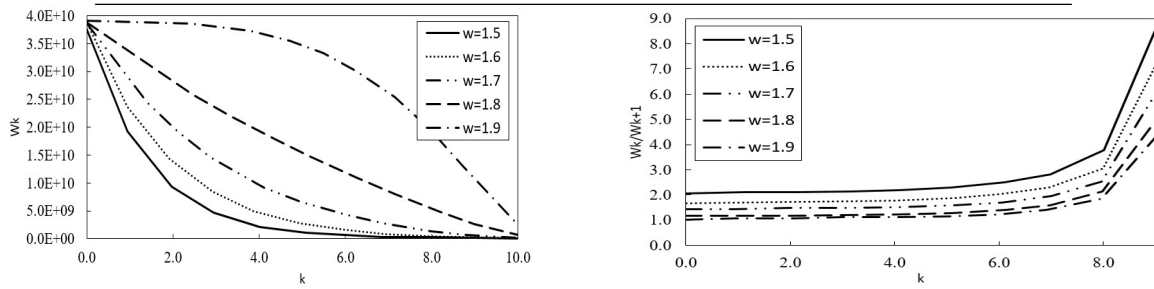
A Figura 3 apresenta as propriedades mecânicas ao longo das ordens de uma árvore, para diferentes valores de  $w$ . Os parâmetros considerados foram:  $n=11, b=2.0, \lambda=1.5, M=1.0, H=1.0, \lambda_0=1, w_0=0.1$ .

Figura 3 – Representação gráfica da variação das propriedades mecânicas ao longo da estrutura  
**Modelo 0**



**Modelo 1**





Fonte: Autor (2018).

Ao analisar as expressões e os gráficos acima é possível destacar como os parâmetros geométricos influenciam no comportamento mecânico, conforme apresentado na Tabela 2.

Tabela 2 – Correlação entre os parâmetros geométricos e o comportamento mecânico

Modelo	Propriedade	Intervalo	Comportamento
Modelo 0	Momento fletor	-	Máximo no tronco
		$w < \sqrt{b}$	Máxima no tronco
	Tensão normal	$w > \sqrt{b}$	Máxima na extremidade
		$w = \sqrt{b}$	Constante
		Energia	$w < \sqrt[3]{b\lambda}$
$w > \sqrt[3]{b\lambda}$	Máxima na extremidade		
Modelo 1	Momento fletor	-	Máximo no tronco
		$w < \sqrt{b\lambda}$	Máxima no tronco
	Tensão normal	$w > \sqrt{b(\lambda + 1)}$	Máxima na extremidade
		$w < \sqrt[3]{b\lambda^3}$	Máxima no tronco
		$w > \sqrt[3]{b(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda)}$	Máxima na extremidade

Fonte: Autor (2018).

### 3.2 Eficiência do sistema ramificado na absorção de energia

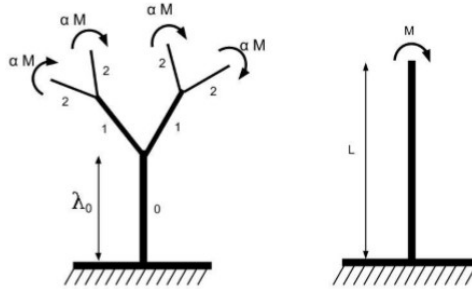
Nesta seção será estudada a energia elástica total de um sistema ramificado e de um cilindro de mesmo volume a fim de verificar qual estrutura é mais eficiente.

#### 3.2.1 Modelo 0

O momento concentrado no cilindro será  $M$  e nas extremidades livres da árvore será  $\alpha M$ , com  $\alpha$  variando entre  $1/b^{n-1}$  e 1, representando, respectivamente, a situação em que a solicitação externa é dividida entre todas as extremidades e a situação em que todos os ramos da extremidade recebem a carga de solicitação total (modelo para ação do vento). A Figura 4 mostra as ações consideradas no cálculo da eficiência.



Figura 4 – Estrutura ramificada e cilindro de seção constante com momentos nas extremidades



Fonte: Ribeiro (2016).

O volume total da estrutura ramificada é dada por:

$$V_{TOTAL} = \sum_{k=0}^{n-1} N_k w_k \lambda_k \quad (4)$$

O volume total do cilindro ao considerar  $\bar{w} = w_0$  é dado por:

$$\bar{V} = \bar{w}L = w_0L \quad (5)$$

Considerando que os volumes são iguais e dividindo a Equação (6) por  $(w_0 \lambda_0)$ , tem-se:

$$\sum_{k=0}^{n-1} N_k w_k \lambda_k = w_0L \quad (6)$$

ou

$$L = \lambda_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{b}{w\lambda} \right)^k \quad (7)$$

### Energia total no modelo 0

A energia elástica total armazenada é dada pela soma da energia em todas as ordens:

$$W_{TOTAL} = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_{n-1} \quad (8)$$

Dividindo a Equação (8) por  $W_0$ , obtém-se:

$$W_{TOTAL} = W_0 \sum_{k=0}^{n-1} (W^{-1})^k \therefore W_{TOTAL} = W_0 \frac{(W^{-1})^n - 1}{W^{-1} - 1} \quad (9)$$

Sendo,  $W_0 = \frac{12\lambda_0 M^2 b^{2n-2}}{2Ew_0^3}$ ,  $W = \frac{b\lambda}{w^3}$  e substituindo na Equação (9), tem-se:

$$W_{TOTAL} = \left( \frac{12\lambda_0 M^2 b^{2n-2}}{2Ew_0^3} \right) \left( \frac{\left( \frac{w^3}{b\lambda} \right)^n - 1}{\left( \frac{w^3}{b\lambda} \right) - 1} \right) \quad (10)$$

### Energia total do cilindro

A energia total do cilindro é calculada a partir de:

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(M(s))^2}{EI} ds \quad (01)$$

Substituindo  $M(s) = M$  e o valor de L, Equação (7), tem-se:

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} \lambda_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{b}{w\lambda} \right)^k \quad (02)$$

### Eficiência

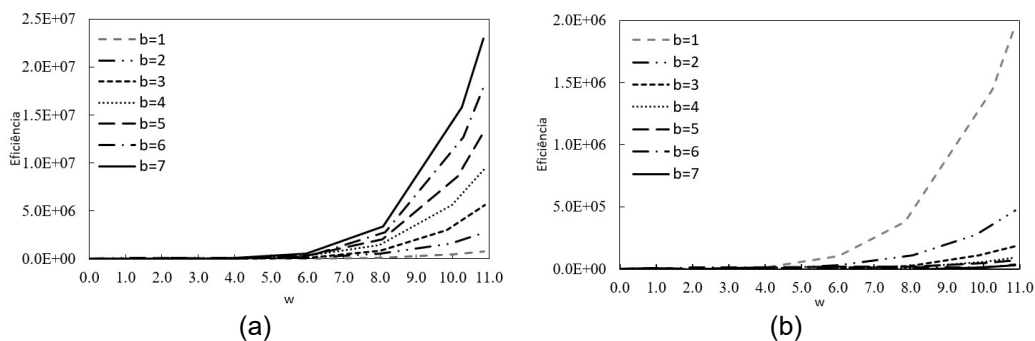
A eficiência é definida como a razão entre a energia total armazenada na estrutura ramificada e a energia total armazenada no cilindro onde ambos têm o mesmo volume:

$$e = \frac{W_{TOTAL}}{\bar{W}} \quad (03)$$

$$e = \frac{\left( \frac{w^3}{b\lambda} \right)^n - 1}{\left( \frac{w^3}{b\lambda} \right) - 1} \left( \frac{\alpha^2 b^{2n-2}}{\sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{b}{\lambda w} \right)^k} \right) \quad (14)$$

Os gráficos da Figura 5 apresentam a eficiência para os valores extremos de  $\alpha$ . Observa-se que a eficiência foi maior com o acréscimo de  $b$  para  $\alpha = 1$ , e a eficiência reduziu com acréscimo de  $b$  para  $\alpha = 1/b^{n-1}$ . O valor de  $n$  é igual a 3.

Figura 5 – Eficiência da estrutura ramificada em relação ao cilindro - Modelo 0 (a)  $\alpha = 1$  (b)  $\alpha = 1/b^{n-1}$

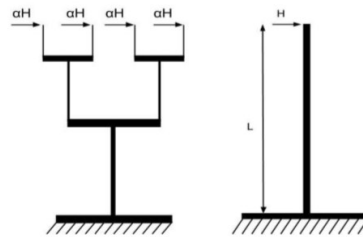


Fonte: Ribeiro (2016).

### 3.2.2 Modelo 1

Neste tópico, será calculada a eficiência do modelo ramificado em comparação ao não ramificado para as cargas do modelo 1, conforme apresentado na Figura 6.

Figura 6 – Estrutura ramificada e cilindro de seção constante com carga concentrada na extremidade



Fonte: Ribeiro (2016).

#### Energia total do modelo 1

A energia total é dada pelo somatório da energia nas ordens:

$$W_{TOTAL} = W_{n-1} + \sum_{K=1}^{n-1} W_{n-K-1} \quad (15)$$

Sendo,

$$W_{n-1} = 2 \frac{b^{n-1} \alpha^2 H^2 \lambda_0^3 \lambda^{-3(n-1)}}{E w_0^3 w^{-3(n-1)}} \quad (16)$$

$$\sum_{K=1}^{n-1} W_{n-K-1} = \sum_{K=1}^{n-1} 6 \left( \frac{\alpha^2 H^2 b^{2K} b^{n-K-1}}{E \lambda^{2K}} \cdot \left( \frac{\lambda_0}{w_0} \right)^3 \cdot \left( \frac{w}{\lambda} \right)^{3(n-K-1)} \cdot \left[ \sum_{i=1}^K (i \lambda^{i-1} + (K-i+1) \lambda^{i+K-1}) + \frac{\lambda^{2K}}{3} \right] \right) \quad (17)$$

#### Energia total do cilindro

Para o modelo 1, o momento do cilindro é dado por  $M(s) = H \cdot s$ . Substituindo o valor do momento na Equação (11), tem-se:

$$\bar{W} = 2 \frac{H^2}{E w_0^3} \left( \lambda_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{b}{w \lambda} \right)^k \right)^3 \quad (18)$$

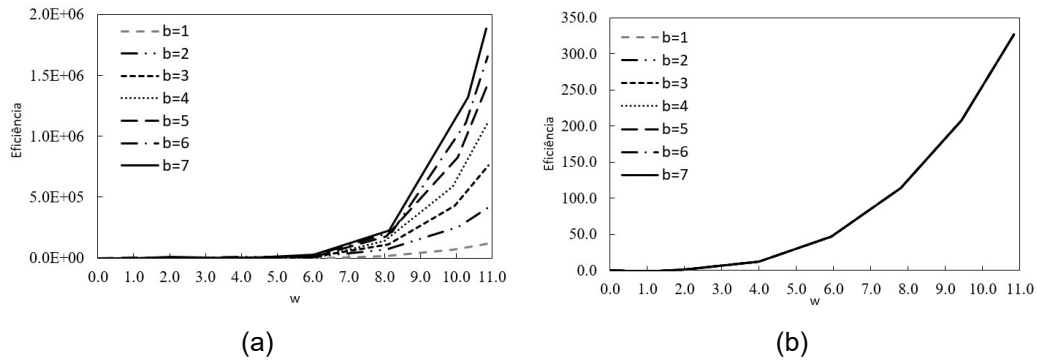
#### Eficiência

A eficiência é definida pela razão entre a energia total da estrutura ramificada e de um cilindro de mesmo volume, conforme apresentado na Equação (13).

$$e = \frac{2 \frac{b^{n-1} \alpha^2 H^2 \lambda_0^3 \lambda^{-3(n-1)}}{E w_0^3 w^{-3(n-1)}} + \sum_{K=1}^{n-1} 6 \cdot \left( \frac{\alpha^2 H^2 b^{2K} b^{n-K-1}}{E \lambda^{2K}} \cdot \left( \frac{\lambda_0}{w_0} \right)^3 \cdot \left( \frac{w}{\lambda} \right)^{3(n-K-1)} \cdot \left[ \sum_{i=1}^K (i \lambda^{i-1} + (K-i+1) \lambda^{i+K-1}) + \frac{\lambda^{2K}}{3} \right] \right)}{2 \frac{H^2}{E w_0^3} \left( \lambda_0 \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{b}{w \lambda} \right)^k \right)^3} \quad (19)$$

É possível observar pelos gráficos da Figura 7 que a eficiência foi maior com o acréscimo de  $b$  para  $\alpha = 1$ , e a eficiência foi independente de  $b$  para  $\alpha = 1/b^{n-1}$ .

Figura 7 – Eficiência da estrutura ramificada em relação ao cilindro - Modelo 1 (a)  $\alpha = 1$  (b)  $\alpha = 1/b^{n-1}$



Fonte: Ribeiro (2016).

## 4 CONCLUSÕES

Os resultados obtidos no estudo das propriedades mecânicas permitem a correlação entre os parâmetros geométricos e o comportamento mecânico da estrutura, sendo possível estabelecer intervalos de valores para tais parâmetros com a finalidade de atender a determinados requisitos, tais como tensão mínima no tronco e/ou energia máxima na extremidade. Quanto à energia total da estrutura ramificada em relação a energia total de um cilindro, foi possível observar a enorme eficiência da estrutura ramificada em todos os casos estudados principalmente no caso correspondente à ação do vento.

## 5 AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) pelo apoio a este projeto.

## REFERÊNCIAS

BARROS, M. M.; BEVILACQUA, L. Elastic fractal trees: a correspondence among geometry, stress, resilience and material quantity. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 37, n. 5, p. 1479-1483, sep. 2015.

KUDO, K. Fractal analysis of electrical trees. **IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation**, v. 5, n. 5, p. 713-727, oct. 1998.

MANDELBROT, B. B. An introduction to multifractal distribution functions. In: Stanley, H. E.; Ostrowsky N. **Random Fluctuations and Pattern Growth: Experiments and Models**. NATO ASI Series (Series E: Applied Sciences), vol 157. Springer, Dordrecht, 1988. p.

279-291.

NIKLAS, K. J. **Plant biomechanics**: an engineering approach to plant form and function. Chicago. University of Chicago Press, 1992.

NUSSENZVEIG, M. **Complexidade&Caos**. 2. ed. Rio de Janeiro: UFRJ/COPEA, 2003.

RIBEIRO, P.O. **Estruturas de árvores: tensão e energia**. 2016. 76 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2016.

TARBOTON, D. G.; BRAS, R. L.; RODRIGUEZ-ITURBE, I. The fractal nature of river networks. **Water Resources Research**, v. 24, n. 8, p. 1317-1322, aug. 1988.

THOMPSON, D. W. **On Growth and Form**. Abridged ed. Cambridge: Cambridge University, 1917.