

Otimização estrutural de treliças considerando restrições de frequências naturais de vibração¹

Truss structural optimization considering constraints of natural frequencies of vibration

José Pedro Gonçalves Carvalho²

Patrícia Habib Hallak³

Afonso Celso de Castro Lemonge⁴

DOI: <https://doi.org/10.34019/2179-3700.2018.v18.29874>

Resumo

Este artigo apresenta um Algoritmo Evolucionário (AE) baseado no comportamento de enxame de partículas (*Particle Swarm Optimization* - PSO) adaptado para a obtenção de soluções de problemas de otimização estrutural com restrições. O PSO é um algoritmo de fácil implementação e competitivo perante os demais algoritmos populacionais inspirados na natureza. Neste artigo, são analisados problemas de otimização estrutural de treliças submetidas a restrições de frequências naturais de vibração. Para o tratamento destas restrições, incorpora-se ao PSO uma técnica de penalização adaptativa (*Adaptive Penalty Method* - APM), que tem demonstrado robustez e eficiência quando aplicada no tratamento de problemas de otimização com restrições. O algoritmo proposto é validado através de experimentos computacionais em problemas de otimização estrutural amplamente discutidos na literatura.

Palavras-chave: Otimização Estrutural. Particle Swarm Optimization. Frequências Naturais de Vibração.

Abstract

This paper presents an Evolutionary Algorithm (EA) based on Particle Swarm Optimization (PSO) adapted to obtain solutions of constrained structural optimization problems. The PSO is an algorithm that is easy to be implemented and competitive with other population-based algorithms inspired by nature. In this paper, structural optimization problems of trusses subjected to natural vibration frequency restrictions are analyzed. To handle the constraints, an Adaptive Penalty Method (APM) is incorporated to the PSO, which has shown robustness and efficiency when applied to constrained optimization problems. The proposed algorithm is validated through computational experiments on structural optimization problems widely discussed in the literature.

Keywords: Structural optimization. Particle Swarm Optimization. Natural vibration frequencies.

¹ Trabalho premiado no Seminário de Iniciação Científica da UFJF em 2015.

² Bolsista de Iniciação Científica - Engenharia Civil/UFJF.

³ Co-orientadora no projeto de Iniciação Científica - Engenharia Civil/UFJF. patricia.hallak@ufjf.edu.br

⁴ Orientador no projeto de Iniciação Científica - Engenharia Civil/UFJF. afonso.lemonge@ufjf.edu.br



1 INTRODUÇÃO

A otimização é de grande interesse em várias áreas das ciências e do mundo real de uma forma geral. Especialmente, ela tem grande aplicabilidade nas diversas áreas da engenharia, possibilitando encontrar soluções que apresentem baixo custo (minimização) e/ou um máximo desempenho (maximização). Na engenharia estrutural, os recentes avanços tecnológicos aliados ao desenvolvimento de recursos e técnicas computacionais têm permitido o projeto de estruturas cada vez mais arrojadas. Estas estruturas, mais leves e flexíveis que as concebidas no passado, demandam a análise mais apurada do seu comportamento quando solicitadas por ações que variam ao longo do tempo, por exemplo.

Dentre as ações que induzem vibrações estruturais, têm-se as ações ambientais corriqueiras, tais como vento, veículos e pedestres. Desta forma, o estudo da dinâmica das estruturas não pode ser desprezado nas modelagens mais complexas que atualmente são mais fidedignas e desejadas. Esforços e deslocamentos provenientes de carregamentos dinâmicos antes negligenciados na análise das estruturas, talvez pela falta de algum tipo de recurso tecnológico ou de conhecimento, são de vital importância.

Na otimização estrutural, quando se depara com projetos que demandam a análise de características dinâmicas, estes aspectos são incluídos na formulação do problema de otimização estrutural. Comumente, nos problemas de otimização estrutural, define-se uma ou mais funções que representam o custo ou o desempenho que, em sua maioria, são submetidas a restrições. Estas funções são definidas como funções objetivo. Em muitos casos, as restrições limitam deslocamentos, tensões e, no caso de aspectos dinâmicos, por exemplo, frequências naturais de vibrações mínimas.

Para resolver os problemas de otimização são encontrados na literatura vários tipos de algoritmos. Estes podem ser classificados em determinísticos ou probabilísticos. Alguns são razoavelmente eficientes mas de aplicabilidade limitada dependendo do tipo de função objetivo e do tipo de restrições requerendo, por exemplo, que ambas sejam contínuas e diferenciáveis. Por outro lado, os algoritmos inspirados na natureza, entre outras denominações, conhecidos como metaheurísticas bioinspiradas, atingiram um uso expressivo nas últimas décadas. Apesar de serem consideradas de alto custo computacional na análise de problemas, as metaheurísticas inspiradas na natureza são muitas vezes adotadas em razão da larga aplicabilidade e robustez. Entre as mais

famosas, destacam-se os Algoritmos Genéticos (AGs) (Holland, 1973), Otimização inspirada em Colônia de Formigas (ACO) (Coloni *et al.*, 1992), Otimização por Enxame de Partículas (PSO) (Kennedy & Eberhart, 1995), dentre muitos outros.

Alguns trabalhos podem ser encontrados na literatura em que as meta-heurísticas são utilizadas para resolver problemas de otimização estrutural, levando-se em consideração, entre outros dados, as restrições de frequências naturais de vibração. Em Wei *et al.* (2010), foi utilizado um AG paralelo na otimização dimensional e de forma de treliças com restrições de frequências naturais de vibração. Gomes (2011) fez uso de um PSO em problemas de otimização dimensional e de forma. Zuo *et al.* (2011) utilizaram um método de reanálise de autovalor adaptável para a otimização estrutural com restrições de dinâmica baseada em um AG.

Em Kaveh & Zolghadr (2012), é proposta uma hibridização de dois algoritmos, *Charged System Search* e *Big Bang-Big Crunch*, para a solução de problemas de otimização com restrições de frequências naturais de vibração. Em Pholdee & Bureerat (2014), foram estudados problemas de otimização dimensional com restrições de dinâmica com o objetivo de avaliar o desempenho de várias metaheurísticas. Kaveh & Javadi (2014) compararam nove metaheurísticas para a otimização de treliças com restrições de frequência naturais de vibração. A otimização dimensional e de forma de estruturas treliçadas também é utilizada por Kaveh & Zolghadr (2014), considerando várias restrições de frequências naturais de vibração. Em Carvalho *et al.* (2015 e 2018), foram discutidos problemas de otimização de treliças submetidas a múltiplas frequências naturais de vibração e agrupamento automáticos das barras através de restrições de cardinalidade.

Este trabalho tem por objetivo tratar problemas de otimização de treliças planas com restrições de frequências naturais de vibração. Estes problemas com restrições são transformados em problemas sem restrições através da introdução de uma função de penalização através de uma estratégia para tratamento de restrições chamada de APM (*Adaptive Penalty Method*) (Barbosa & Lemonge, 2002). O APM, por sua vez, é acoplado a um PSO e o desempenho do algoritmo é analisado através de testes em problemas comumente discutidos na literatura.

O restante do texto é organizado da seguinte forma: na Seção 2, descreve-se o problema de otimização estrutural; na Seção 3, descreve-se o algoritmo PSO; na Seção 4, apresenta-se a estratégia usada para o tratamento das restrições do problema de

otimização estrutural e; na Seção 5, os experimentos numéricos são descritos, analisados e comparados. Finalmente, as conclusões e trabalhos futuros são apresentados na Seção 6.

2 O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

O problema de otimização estrutural analisado neste trabalho se refere à otimização dimensional ou de forma ou ambas simultaneamente de treliças planas ou espaciais. Ou seja, as variáveis de projeto são as áreas das seções transversais das barras (otimização dimensional) ou as posições de alguns nós da estrutura (otimização de forma). Como a otimização feita neste trabalho tem como restrições as frequências naturais de vibração f , o problema de otimização é escrito como: encontrar um conjunto de áreas $a = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ e as coordenadas de alguns nós da estrutura $c = \{X_1, Y_1, Z_1, \dots, X_i, Y_i, Z_i\}$ que minimizem o seu peso W .

$$W(a, c) = \sum_{i=1}^N \rho A_i L_i \quad (1)$$

sujeito às restrições de frequências naturais de vibração normalizadas

$$1 - \frac{f_j}{f_k} \leq 0 \quad 1 \leq j \leq m \quad (2)$$

onde ρ é o peso específico do material, A_i é a área da seção transversal, L_i é o comprimento da i -ésima barra da estrutura, f_j é a j -ésima frequência natural de vibração da estrutura, f_k são os k valores de frequências naturais mínimas que a estrutura deverá ter, N é o número de barras e m é o número de restrições. Nota-se que L_i pode ter seu valor alterado entre as soluções candidatas quando se considera otimização de forma.

Para a determinação das frequências naturais de vibração a modelagem da estrutura consiste na associação das matrizes de massa e rigidez dos elementos que a compõem (com seus respectivos dados de entrada - coordenadas dos nós, módulo de elasticidade, peso específico, comprimento e área de cada elemento), formando duas matrizes globais de massa e rigidez da estrutura. Feito esse procedimento, as frequências naturais de vibração são obtidas a partir dos autovalores da matriz $[(f_n^2 f_n^2 \dots \mathbf{M}) + \mathbf{K}]$, onde \mathbf{M} e \mathbf{K} são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez da estrutura e f_n são os

autovalores correspondentes às n frequências naturais de vibração da estrutura.

3 OTIMIZAÇÃO POR ENXAME DE PARTÍCULAS

O algoritmo de otimização por enxame de partículas, mais conhecido como PSO (*Particle*

Swarm Optimization), foi originalmente desenvolvido por Eberhart & Kennedy (1995) a partir de observações feitas no comportamento social de grupos de pássaros. Segundo esta inspiração, os pássaros são considerados partículas em um espaço de busca multidimensional e o objetivo a ser alcançado é um ponto neste espaço, no caso de otimização de funções, o ponto ótimo.

O PSO é um algoritmo populacional e evolutivo. Ele se baseia na atualização das velocidades das partículas ao longo do tempo e esta atualização impacta na modificação do seu posicionamento. Considerando que a velocidade de uma partícula i pode ser representada por v_i e a posição da mesma como sendo x_i , os vetores de velocidade e posição desta partícula i são armazenados durante o processamento do algoritmo em um tempo t e utilizados para a atualização do enxame no tempo $t + 1$.

A atualização da velocidade v_i e a posição x_i de cada partícula i são apresentadas nas Eqs. (3) e (4), respectivamente:

$$v_i(t+1) = v_i(t) + c_1 \cdot r_1(x_{pbest} - x_i) + c_2 \cdot r_2(x_{gbest} - x_i) \quad (3)$$

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (4)$$

onde v_i é a velocidade de cada partícula, t é a iteração atual, c_1 e c_2 são constantes de aceleração para controlar a influência da informação cognitiva e social, respectivamente e r_1 e r_2 são números aleatórios reais entre 0 e 1 com distribuição uniforme. O x_{pbest} é a melhor posição de cada partícula até então e x_{gbest} é a melhor posição entre todas as partículas do enxame. A posição $x_i(t+1)$ é a posição da partícula na iteração $t + 1$ e $v_i(t+1)$ é sua velocidade.

O conjunto inicial de partículas x é gerado de forma pseudo-aleatória no espaço de busca, atendendo aos limites estabelecidos na Eq. (5).

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, \quad i = 1, \dots, n; \quad x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

onde x_i^L e x_i^U são, respectivamente, os limites inferiores e superiores das posições das partículas, e n é o número total de partículas.

O algoritmo básico de otimização por enxame de partículas pode ser descrito brevemente utilizando os seguintes passos:

1. Inicializar um enxame de partículas (posições) e velocidades aleatoriamente distribuídos dentro do espaço de busca.
2. Calcular a função objetivo.
3. Definir x_{pbest} e x_{gbest} iniciais.
4. Para cada partícula do enxame:
 - Atualizar a velocidade e a posição utilizando as Eqs. (3) e (4).
 - Calcular a função objetivo.
5. Atualizar x_{pbest} .
6. Repetir os passos 4 e 5 até que uma condição de parada seja satisfeita.

4 TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES

Funções de penalização têm ocupado uma parte da literatura sobre otimização com restrições por décadas (Smith & Coit, 1995). Elas têm por objetivo aproximar um problema com restrições por um problema sem restrições.

Dentre as várias técnicas de penalização, destacam-se as estáticas, as dinâmicas e as adaptativas. Neste trabalho, foi utilizada uma técnica de penalização adaptativa, na qual os valores dos coeficientes de penalização são adaptados ao longo do processo de evolução.

Em Barbosa & Lemonge (2002), é proposto um método de penalização adaptativa denominado APM (*Adaptive Penalty Method*) para aplicação em problemas com restrições. O APM adapta o valor dos coeficientes de penalização de cada restrição fazendo uso de informações coletadas da população, tais como a média da função objetivo e o nível de violação de cada restrição. A função aptidão é definida como:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \text{ é factível} \\ f(x) + \sum_{j=1}^m k_j v_j(x), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

tal que

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) > \langle f(x) \rangle \\ \langle f(x) \rangle, & \text{se } f(x) \leq \langle f(x) \rangle \end{cases}$$

onde $\langle f(x) \rangle$ é a média dos valores da função objetivo da população atual.

O parâmetro de penalização k_j é definido como:

$$k_j = \frac{\langle v_j(x) \rangle}{\langle f(x) \rangle} \left| \frac{\langle v_j(x) \rangle}{\langle f(x) \rangle} \right| \frac{\langle v_j(x) \rangle}{\sum_{i=1}^m [v_j(x)]^2} \frac{\langle v_j(x) \rangle}{\sum_{i=1}^m [v_j(x)]^2}$$

tal que $\langle v_j(x) \rangle$ é o somatório das violações v_j de todos os indivíduos dividido pelo número de indivíduos da população (factíveis e infactíveis), ou seja, é a média da violação $v_j(x)$.

5 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Os experimentos computacionais foram realizados com o objetivo de testar o PSO juntamente com o APM e compará-lo com outros métodos para a obtenção de soluções para os problemas de otimização com restrições de frequências naturais de vibração existentes na literatura. Os testes envolvem 3 problemas de otimização em engenharia estrutural: treliças planas de 10, 37 e 200 barras.

O PSO adotado utilizou os seguintes parâmetros: codificação real das variáveis, $c_1 = 1.4961$ e $c_2 = 1.4961$. Para cada problema foi utilizado uma quantidade de partículas diferente: 100 para as treliças de 10 e 37 barras e 150 para a treliça de 200 barras. Os testes foram realizados num total de 50 execuções independentes e apenas os indivíduos factíveis foram considerados como solução.

Os resultados dos problemas propostos são apresentados através de tabelas e figuras. As tabelas contêm o método, a melhor solução, os valores da mediana, média e o desvio padrão (std) e, finalmente, a pior solução. Nas tabelas com comparações, os melhores resultados são destacados em negrito. As figuras apresentam uma representação das melhores soluções encontradas para os problemas, sendo que a espessura das linhas é proporcional às áreas das barras encontradas.

5.1 Treliça plana de 10 barras

O primeiro experimento considerado é a treliça de 10 barras plana ilustrada pela Fig. 1. As variáveis de projeto são as áreas da seção transversal dos dez elementos. Em cada nó livre (1-4) é adicionado uma massa não estrutural de 453.6 kg (1000 lbs). O material é o alumínio, com módulo de elasticidade $E = 68.95$ GPa e massa específica de 2767.99 kg/m³. As frequências naturais de vibração mínimas são $f_1 \geq f_1 \geq 7$ Hz, $f_2 f_2 \geq 15$ Hz e $f_3 f_3 \geq 20$ Hz. O limite inferior das áreas da seção transversal é $6.4516 \times 10^{-5} 10^{-5}$ m² e o superior $4 \times 10^{-3} 10^{-3}$ m². Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 1 e o melhor peso encontrado foi 532.2188 kg. Na Fig. 2, é ilustrado o melhor resultado encontrado para a treliça plana de 10 barras.

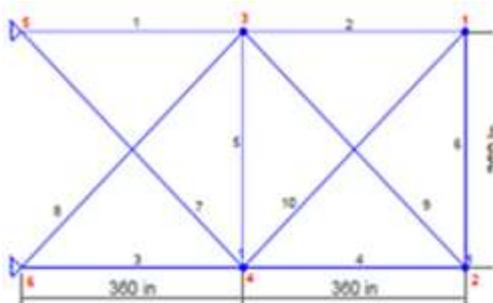


Figura 1: Treliça plana de 10 barras.

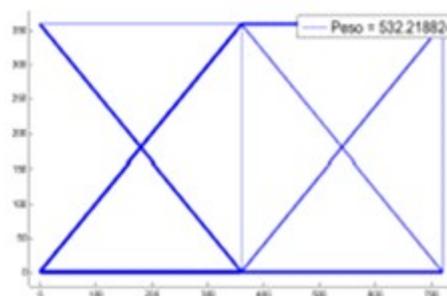


Figura 2: Melhor resultado encontrado para a treliça de 10 barras.

Fonte: elaboração própria.

5.2 Treliça plana de 37 barras

O segundo experimento é a treliça de 37 barras plana com configuração inicial conforme a Fig. 3. Uma massa não estrutural de 10kg é adicionada em cada nó inferior, que permanece fixa durante toda a execução. O material é o aço, com módulo de elasticidade $E = 210$ GPa e massa específica de 7800 kg/m³. A minimização do peso é obtida variando-se áreas das seções transversais e forma da estrutura, havendo simetria dos nós equidistantes do centro da estrutura. As barras inferiores possuem área da seção transversal fixa de $4 \times 10^{-3} 10^{-3}$ m² e as demais são variáveis de projeto, com limites inferior e superior de $1 \times 10^{-4} 10^{-4}$ m² e $1 \times 10^{-3} 10^{-3}$ m², respectivamente. Os nós superiores podem movimentar-se verticalmente entre 0.8m e 2.0m de acordo com o referencial adotado na Fig. 4. Dessa maneira, somente cinco variáveis de forma e quatorze variáveis

dimensionais são consideradas na otimização. As frequências naturais de vibração mínimas são $f_1 f_1 \geq 20$ Hz, $f_2 f_2 \geq 40$ Hz e $f_3 f_3 \geq 60$ Hz. Os resultados dessa treliça são apresentados na Tabela 1, que mostra o melhor peso obtido igual a 369.1927kg. Uma ilustração do melhor resultado encontrado aqui é apresentada na Fig. 4.

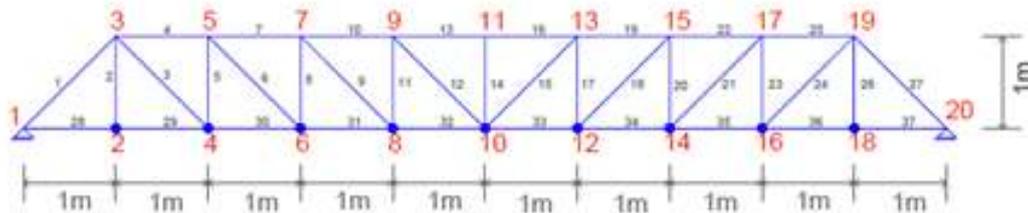


Figura 3 – Treliça plana de 37 barras

Fonte: elaboração própria.

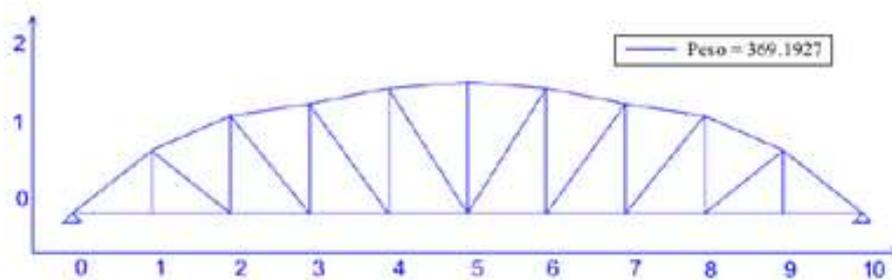


Figura 4 – Melhor resultado encontrado para a treliça de 37 barras

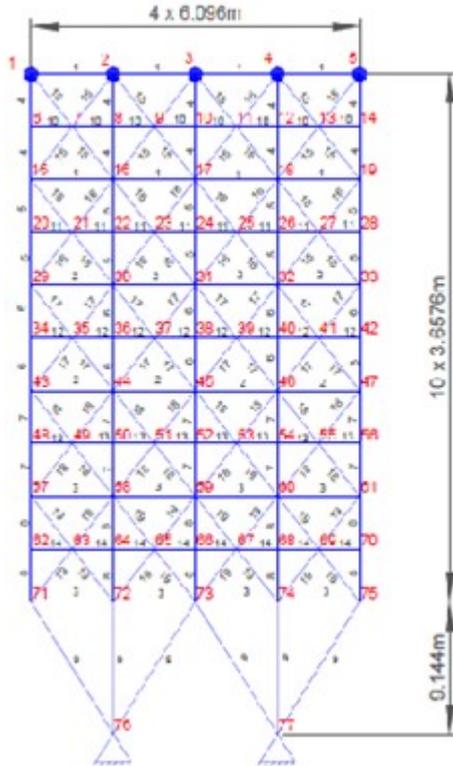
Fonte: elaboração própria.

5.3 Treliça plana de 200 barras

A Fig. 5 apresenta a treliça de 200 barras plana. Nesse terceiro experimento, é adicionado aos nós 1 ao 5 uma massa não estrutural de 100kg e somente as áreas da seção transversal são otimizadas. São utilizados 19 grupos de elementos conforme Vu (2015). O material utilizado é o aço, com módulo de elasticidade $E = 210\text{GPa}$ e massa específica de 7860kg/m^3 . Os limites inferior e superior das áreas são de, respectivamente, $0.1 \times 10^{-4} \text{m}^2$ e $30 \times 10^{-4} \text{m}^2$. Observa-se que a área da seção transversal aumenta gradualmente em grupos de elementos (1, 2, 3), (4, 5, 6, 7, 8, 9), (10, 11, 12, 13, 14) e (15, 16, 17, 18, 19). Os resultados para essa treliça são apresentados na Tabela 1 com melhor valor final de 3113.7153 kg. A Fig. 6 ilustra o melhor resultado encontrado aqui

para a treliça de 200 barras.

Figura 5 – Treliça plana de 200 barras



Fonte: elaboração própria.

Figura 6 – Melhor resultado encontrado para a treliça de 200 barras

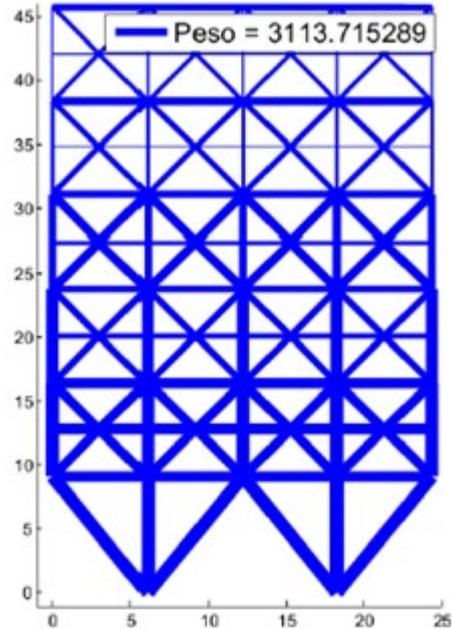


Tabela 1 – Resultados para as treliças planas de 10, 37 e 200 barras, onde “na” representa o número de avaliações da função objetivo

Problema	Melhor	Mediana	Média	Std	Pior	na
Treliça de 10 barras	532.2188	535.9770	537.1714	3.63e+00	544.2149	1500
Treliça de 37 barras	369.1927	383.2521	384.5321	8.85e+00	411.2526	1500
Treliça de 200 barras	3113.7153	4258.8199	4375.9841	9.12e+02	6659.4076	3000

Fonte: elaboração própria.

Tabela 2 – Melhores resultados para as treliças planas de 10 , 37 e 200 barras. HS , FA e DE representam *Harmony Search* e *Firefly Algorithm* e *Differential Evolution*, respectivamente (Miguel & Miguel, 2012). As áreas das seções transversais $A_i A_i$ estão em cm^2 , as coordenadas $Y_i Y_i$ dos nós em m e as frequências $f_j f_j$ em Hz.

Treliça de 10 barras			Treliça de 37 barras			Treliça de 200 barras		
Variáveis	PSO	FA	Variáveis	PSO	HS	Variáveis	PSO	DE
A_1	36.7086	36.198	$A_1 A_1, A_{27}$	4.4345	3.2031	A_1	2.2359	0.2789
A_2	14.5403	14.030	$A_2 A_2, A_{26}$	1.0000	1.1107	A_2	1.9635	0.2725
A_3	34.9325	34.754	$A_3 A_3, A_{24}$	1.0000	1.1871	A_3	5.1868	5.7222
A_4	14.8264	14.900	$A_4 A_4, A_{25}$	2.5124	3.3281	A_4	0.3938	0.5423
A_5	0.6525	0.654	$A_5 A_5, A_{23}$	2.1699	1.4057	A_5	0.9734	1.4830
A_6	4.6404	4.672	$A_6 A_6, A_{21}$	1.2057	1.0883	A_6	1.9885	3.1676
A_7	24.0361	23.467	$A_7 A_7, A_{22}$	2.3720	2.1881	A_7	6.1509	4.8800
A_8	24.4611	25.508	$A_8 A_8, A_{20}$	1.0000	1.2223	A_8	9.9244	7.9840
A_9	12.1267	12.707	$A_9 A_9, A_{18}$	1.5691	1.7033	A_9	30.0000	18.7813
A_{10}	12.7952	12.351	$A_{10} A_{10}, A_{19} A_{19}$	4.2249	3.1885	A_{10}	0.1000	0.1000
f_1	7.0000	7.0002	$A_{11} A_{11}, A_{17} A_{17}$	1.0000	1.0100	A_{11}	0.2711	0.1000
f_2	16.1961	16.1640	$A_{12} A_{12}, A_{15} A_{15}$	2.0277	1.4074	A_{12}	0.4265	0.1000
f_3	20.0020	20.0029	$A_{13} A_{13}, A_{16} A_{16}$	3.9947	2.8499	A_{13}	1.3110	0.1000
WW (kg)	532.22	531.28	A_{14}	1.0000	1.0269	A_{14}	5.7888	0.2326
			$Y_{2,19}$	1.2405	1.2409	A_{15}	1.0697	0.8481
			$Y_{7,15}$	1.3900	1.4464	A_{16}	1.6535	1.2137
			$Y_{9,13}$	1.5909	1.5334	A_{17}	2.4410	1.6352
			Y_{11}	1.6736	1.5971	A_{18}	1.9871	2.0476
			f_1	21.4651	20.0037	A_{19}	2.4792	4.3721
			f_2	41.7247	40.0003	f_1	5.0471	5.0004
			f_3	61.9832	60.0001	f_2	14.3587	12.3446
			WW (kg)	369.19	360.05	f_3	15.9180	15.0018
						WW (kg)	3113.72	2296.38

Fonte: elaboração própria.

5.4 Análise dos resultados

As tabelas 2 e 3 apresentam uma comparação dos resultados obtidos pelo PSO+APM com alguns resultados de algoritmos encontrados na literatura. Como os resultados obtidos neste artigo são preliminares, optou-se por não fazer estudos comparativos extensos com os vários resultados disponíveis na literatura. Em cada tabela são apresentadas as variáveis de projeto, as frequências naturais de vibração e o peso final da estrutura.

Os experimentos analisados neste trabalho (Trelças planas de 10, 37 e 200 barras) apresentaram peso final da estrutura maiores que os algoritmos da literatura usados para comparação. Pode-se afirmar que o PSO+APM se mostrou bastante competitivo, em particular, para as trelças de 10 e 37 barras. Entretanto, para a Trelça de 200 barras os resultados ainda não são competitivos. Espera-se com ajustes futuros no algoritmo usado neste artigo alcançar um desempenho melhor do mesmo nestes e em outros experimentos a serem analisados em trabalhos futuros.

6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A otimização dimensional e de forma de estruturas reticuladas é um problema de alto comportamento não linear devido às diferentes naturezas das variáveis envolvidas e da sensibilidade das frequências de vibração às mudanças na forma das mesmas. O algoritmo proposto pelo presente estudo em associação com o método de penalização utilizado se mostrou competitivo em dois dos exemplos analisados.

Foi adotado aqui um algoritmo de otimização por enxame de partículas padrão, diferentemente dos algoritmos com os quais os resultados encontrados foram comparados. Os experimentos aqui apresentados são comumente conhecidos na literatura e os resultados obtidos podem ser considerados satisfatórios. Conclui-se, portanto, que o método aqui apresentado pode ser utilizado para esse tipo de problema de otimização de maneira satisfatória.

Como trabalhos realizados após este artigo (Carvalho *et al.*, 2018 e 2019), foi considerada uma característica muito atrativa nas configurações estruturais que se trata da possibilidade de buscar melhores agrupamentos de barras e materiais, além dos pré-definidos pelo projetista em razão das simetrias das estruturas. Ainda neste contexto,

também estão sendo estudados problemas de otimização estrutural multiobjetivo considerando otimização dimensional, de forma e topológica simultaneamente envolvendo vários tipos de carregamentos e restrições.

7 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem às agências de fomento pelos seguintes apoios: CNPq (306186/2017-9) e FAPEMIG (TEC PPM 388/14, TEC PPM 174/18 e TEC APQ 00103-12). Universidade Federal de Juiz de Fora e PIBIC/CNPq/UFJF.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A.C.C. An adaptive penalty scheme in genetic algorithms for constrained optimization problems. **GECCO**, v. 2, p. 287-294, 2002.

CARVALHO, J. P. G.; CARVALHO, E. C. R.; BERNARDINO, H. S.; HALLAK, P. H.; LEMONGE, A. C. C. Solução de problemas de otimização estrutural com restrições de frequências de vibração via PSO. In: XXXVI IBERO-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL ENGINEERING, p. 1-15, Rio de Janeiro, Brasil, 2015.

CARVALHO, J. P. G.; LEMONGE, A. C.; CARVALHO, E. C.; HALLAK, P. H.; BERNARDINO, H.S. Truss optimization with multiple frequency constraints and automatic member grouping. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 57, n. 2, p. 547-577, 2018.

CARVALHO, J. P. G.; LEMONGE, A. C. C.; HALLAK, P. H.; VARGAS, D. E. C. A Differential Evolution to Find the Best Material Groupings in Truss Optimization. **International Conference on Engineering Optimization**. Springer, Cham, 2019.

COLORNI, A.; DORIGO, M.; MANIEZZO, V. Distributed optimization by ant colonies. **Proceedings of the first European conference on artificial life**, v. 142, p. 134-142, Paris, France, 1992.

EBERHART, R.; KENNEDY, J. A new optimizer using particle swarm theory. In: **Micro Machine and Human Science**, 1995. MHS'95., Proceedings of the Sixth International Symposium on, p. 39-43, 1995.

GOMES, H. M. Truss optimization with dynamic constraints using a particle swarm algorithm. In: **Expert Systems with Applications**, Elsevier, vol. 38, n.1, pp. 957-968, 2011.

HOLLAND, J. H. Genetic algorithms and the optimal allocation of trials. **SIAM Journal on Computing**, v. 2, n. 2, p. 88-105, 1973.

KARABOGA, D. **An idea based on honey bee swarm for numerical optimization**. Techn. Rep. TR06, Erciyes Univ. Press, Erciyes.

KAVEH, A.; JAVADI, S. M. Shape and size optimization of trusses with multiple frequency constraints using harmony search and ray optimizer for enhancing the particle swarm optimization algorithm. In: **ActaMechanica**, Springer, v. 225, n. 6, p. 1595-1605, 2014.

KAVEH, A.; ZOLGHADR, A. Truss optimization with natural frequency constraints using a hybridized CSS-BBBC algorithm with trap recognition capability. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 102, p. 14-27, 2012.

KAVEH, A.; ZOLGHADR, A. Comparison of nine meta-heuristic algorithms for optimal design of truss structures with frequency constraints. **Advances in Engineering Software**, Elsevier, v. 76, p. 9-30, 2014.

MIGUEL, L. F. F. Shape and size optimization of truss structures considering dynamic constraints through modern metaheuristic algorithms. **Expert Systems with Applications**, Elsevier, v. 39, n. 10, p. 9458–9467, 2012.

PHOLDEE, N.; BUREERAT, S. Comparative performance of meta-heuristic algorithms for mass minimisation of trusses with dynamic constraints. In: **Advances in Engineering Software**, Elsevier, v. 75, p. 1-13, 2014.

SMITH, A. E.; COIT, D.W. Penalty functions. In Handbook of Evolutionary Computation. **A Joint Publication of Oxford University Press and Institute of Physics**, v. 97, n. 1, p. C5, 1995.

VU, T. V. Weight Minimization of Trusses with Natural Frequency Constraints. In: 11TH WORLD CONGRESS ON STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION, 2015.

ZUO, W.; XU, T.; ZHANG, H.; XU, T. Fast structural optimization with frequency constraints by genetic algorithm using adaptive eigenvalue reanalysis methods. In: **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 43, n. 6, p. 799-810, 2011.

WEI, L.; TANG, T.; XIE, X.; SHEN, W. Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints based on parallel genetic algorithm. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 43, n. 5, p. 665-682, 2010.