
**MODELAGEM NUMÉRICA DE CAMPOS ELETROMAGNÉTICOS
PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

***THE FINITE ELEMENT METHOD APPLIED TO THE
NUMERICAL MODELLING OF ELECTROMAGNETIC FIELDS***

Delfim Soares Jr.¹, Lucas Vitor Fonseca de Oliveira²

¹ Doutor, Orientador, Faculdade de Engenharia, Universidade Federal de Juiz de Fora, Cidade Universitária, Bairro Martelos, CEP 36036-330, Juiz de Fora, MG, Brasil. E-mail: delfim.soares@ufjf.edu.br.

² Faculdade de Engenharia, Universidade Federal de Juiz de Fora, Cidade Universitária, Bairro Martelos, CEP 36036-330, Juiz de Fora, MG, Brasil. E-mail: lucas.vitor@engenharia.ufjf.br.

Resumo

O presente trabalho discute a aplicação do Método dos Elementos Finitos para análise de campos eletromagnéticos. Análises permanentes e transientes são aqui consideradas, sendo problemas de eletrostática, magnetostática e de propagação de ondas eletromagnéticas focados. No caso de análises transientes, procedimentos numéricos no domínio do tempo são empregados. Ao final do artigo, resultados numéricos são apresentados, ilustrando as potencialidades das técnicas discutidas.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos; Equações de Maxwell; Análise de Campos Eletromagnéticos; Modelagem Computacional.

Abstract

The present work discusses the application of the Finite Element Method to analyse electromagnetic fields. Steady-state and transient analyses are here considered, being electrostatic, magnetostatic and electromagnetic wave propagation problems focused. In the case of transient analyses, time-domain numerical procedures are employed. At the end of the paper, numerical results are presented, illustrating the potentialities of the discussed techniques.

Keywords: Finite Element Method; Maxwell Equations; Electromagnetic Field Analysis; Computational Modelling.

1. INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, várias técnicas numéricas avançadas têm sido aplicadas para modelagem de campos eletromagnéticos, permitindo análise precisa de complexos fenômenos descritos pelas equações de Maxwell. Dentre as principais técnicas atualmente empregadas, destaca-se o Método dos Elementos Finitos. Na abordagem por elementos finitos, os campos eletromagnéticos (ou seus potenciais) são decompostos com relação a algumas funções de interpolação básicas, sendo os coeficientes de tal decomposição representados em um vetor incógnita, a se determinar quando da solução de um sistema esparso e simétrico de equações lineares. O principal atrativo do método está no fato deste possuir grande flexibilidade para representação de geometrias complexas, bem como grande maleabilidade para tratamento de complexos fenômenos físicos.

No presente trabalho, o Método dos Elementos Finitos é empregado para análise de campos eletromagnéticos permanentes e transientes, sendo este aplicado à discretização espacial do modelo. No caso de análises transientes, foco é aqui dado a problemas de propagação de ondas eletromagnéticas, sendo análises no domínio do tempo consideradas e o método de Newmark aplicado.

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações de Maxwell, em sua forma diferencial, podem ser escritas conforme indicado abaixo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{J} \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1d)$$

onde \mathbf{E} e \mathbf{H} representam intensidades de campo elétrico e magnético, respectivamente; \mathbf{D} e \mathbf{B} representam densidades de fluxo elétrico e magnético, respectivamente; e \mathbf{J} e ρ representam corrente elétrica e densidade elétrica de carga, respectivamente. As relações constitutivas entre os campos acima especificados são dadas por:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2c)$$

onde os parâmetros ϵ , μ e σ representam, respectivamente, a permissividade, permeabilidade e condutividade do meio.

Combinando as equações (1) e (2), equações vetoriais de ondas descrevendo campos elétricos e campos magnéticos podem ser obtidas, conforme especificado a seguir:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) + \epsilon \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 = -\partial \mathbf{J} / \partial t \quad (3a)$$

$$\nabla \times (\epsilon^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) + \mu \partial^2 \mathbf{H} / \partial t^2 = \nabla \times (\epsilon^{-1} \mathbf{J}) \quad (3b)$$

sendo a velocidade de propagação do meio dada por $c = (\epsilon\mu)^{-1/2}$.

Tendo em consideração modelos bidimensionais, as equações (3) podem ser simplificadas e re-escritas, de forma genérica, da seguinte forma:

$$\nabla(\kappa^{-1} \nabla\theta) - \varphi \partial^2\theta / \partial t^2 = \gamma \quad (4)$$

onde θ é uma grandeza escalar representando, de forma genérica, uma componente de intensidade de campo elétrico ou magnético e γ representa um termo genérico de fonte. κ e φ assumem os valores de ϵ ou μ , de acordo com o caso em análise.

Uma vez definida a equação diferencial que governa o problema bidimensional em foco, as condições de contorno temporais e espaciais do modelo necessitam ser especificadas para completa definição do mesmo. As condições iniciais (condições de contorno temporais) para o modelo em questão são dadas por:

$$\theta = \theta^0 \quad (5a)$$

$$\partial\theta / \partial t = \theta_t^0 \quad (5b)$$

onde θ^0 representa o valor inicial do campo (i.e., relativo ao tempo $t = 0$) e θ_t^0 representa o valor inicial da derivada temporal primeira do campo. As condições de contorno espaciais para o modelo em foco são dadas por:

$$\theta = \bar{\theta} \quad (6a)$$

$$\phi = \nabla\theta \cdot \mathbf{n} = \bar{\phi} \quad (6b)$$

onde a equação (6a) descreve condições de contorno essenciais ou de Dirichlet e a equação (6b) descreve condições de contorno naturais ou de Neumann (\mathbf{n} representa um vetor unitário normal ao contorno, em (6b)).

Para casos particulares, onde as variações temporais dos campos envolvidos podem ser desprezadas, as equações de Maxwell podem ser simplificadas, gerando o seguinte problema de campo potencial permanente:

$$\nabla(\kappa^{-1} \nabla\theta) = \gamma \quad (7)$$

onde, mais uma vez, θ é uma grandeza escalar, representando desta vez, todavia, um campo potencial cuja combinação de derivadas espaciais (gradiente etc.) descreve os campos elétricos ou magnéticos do modelo em análise. As condições de contorno associadas à análise de problemas descritos pela equação (7) são dadas pelas equações (6), acima especificadas.

Para maiores detalhes acerca das equações diferenciais que regem a análise de problemas transientes e permanentes em eletromagnetismo (aqui descritas de forma sucinta), as seguintes referências são indicadas: Lorrain et al. (2000), Hayt et al. (2003). No item que se segue, a discretização espacial do modelo descrito pela equação (4) (análise transiente) e pela equação (7) (análise permanente), pelo Método dos Elementos Finitos, é descrita.

3. DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

Aplicando-se o método dos resíduos ponderados (formulação fraca) à equação (4), a seguinte equação integral, base para análise por intermédio do Método dos Elementos Finitos, pode ser obtida:

$$\int_{\Omega} \kappa^{-1} \nabla w \cdot \nabla \theta d\Omega + \int_{\Omega} \phi w \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} d\Omega = \int_{\Gamma_{\phi}} w \kappa^{-1} \bar{\phi} d\Omega - \int_{\Omega} w \gamma d\Omega \quad (8)$$

onde Ω e Γ_{\emptyset} descrevem o domínio e o contorno natural do modelo em análise, respectivamente, e w representa as funções de peso sendo utilizadas, iguais às funções de interpolação, uma vez que se adota formulação de Galerkin. As funções de interpolação, por sua vez, são usadas para aproximar as variáveis de campo existentes ao longo dos elementos finitos. Desta forma, pode-se escrever:

$$\theta(X, t) = \sum_{j=1}^J N_j(X) \theta_j(t) \quad (9)$$

onde J são os números de nós do elemento finito em questão e N_j representa uma função de interpolação espacial (X descreve coordenadas espaciais).

Utilizando aproximações numéricas do tipo (9), a equação (8) pode ser trabalhada e re-escrita de forma matricial, conforme se segue:

$$\mathbf{M} \Theta_{tt}^n + \mathbf{K} \Theta^n = \mathbf{F}^n \quad (10)$$

onde Θ^n representa o vetor que contém os valores nodais do campo incógnita θ no tempo t_n (Θ_{tt}^n contém os valores de $\partial^2 \theta / \partial t^2$); \mathbf{F}^n é o vetor de forças nodais atuantes; e \mathbf{M} e \mathbf{K} são as matrizes de massa e rigidez, respectivamente. As expressões para as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} , bem como para o vetor \mathbf{F} , são dadas por:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \varphi \mathbf{N} d\Omega \quad (11a)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}^T \kappa^{-1} \nabla \mathbf{N} d\Omega \quad (11b)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma_{\emptyset}} \mathbf{N}^T \kappa^{-1} \bar{\theta} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \gamma d\Omega \quad (11c)$$

onde \mathbf{N} é a matriz de interpolação, formada pelas funções de interpolação especificadas na equação (9). Uma vez obtida a equação matricial (10), resta ainda

resolve-la no tempo, tema a ser discutido no item que se segue, onde a discretização temporal é abordada.

No caso de análises permanentes (modelos regidos pela equação (7)), metodologia análoga pode ser considerada quando da discretização espacial por elementos finitos, e o seguinte sistema final de equações algébricas é obtido:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{F} \quad (12)$$

onde a matriz de rigidez e o vetor força são especificados pelas equações (11b) e (11c), respectivamente.

Para maiores detalhes acerca da discretização espacial por intermédio de elementos finitos aqui brevemente discutida, as seguintes referências são indicadas: Bathe (1996), Nathan et al. (1997), Zienkiewics et al. (2000), Jin (2002).

4. DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

Para se tratar a integração no tempo relativa à equação matricial ordinária (10), algum esquema baseado em diferenças finitas pode ser adotado. O presente trabalho faz uso do método de Newmark para tal finalidade (Newmark, 1959). Levando-se em consideração o método de Newmark, as seguintes aproximações podem ser adotadas:

$$\boldsymbol{\Theta}_{tt}^n = (\alpha\Delta t^2)^{-1}(\boldsymbol{\Theta}^n - \boldsymbol{\Theta}^{n-1}) - (\alpha\Delta t)^{-1}\boldsymbol{\Theta}_t^{n-1} - ((2\alpha)^{-1} - 1)\boldsymbol{\Theta}_{tt}^{n-1} \quad (13a)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_t^n = \boldsymbol{\Theta}_t^{n-1} + \Delta t(1 - \beta)\boldsymbol{\Theta}_{tt}^{n-1} + (\Delta t \beta)\boldsymbol{\Theta}_{tt}^n \quad (13b)$$

onde $\beta \geq 0.5$ e $\alpha \geq 0.25(0.5 + \beta)^2$ são os parâmetros do método de Newmark e Δt é o passo de tempo em consideração.

Substituindo as expressões (13) em (10), o sistema final de equações algébricas a seguir pode ser obtido:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\Theta}^n = \mathbf{B}^n \quad (14)$$

onde \mathbf{A} e \mathbf{B} representam, respectivamente, a matriz e o vetor efetivo do sistema, sendo dados por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K} + (1/(\alpha\Delta t^2))\mathbf{M} \quad (15a)$$

$$\mathbf{B}^n = \mathbf{F}^n + \mathbf{M}((\alpha\Delta t^2)^{-1}\boldsymbol{\Theta}^{n-1} + (\alpha\Delta t)^{-1}\boldsymbol{\Theta}_t^{n-1} + ((2\alpha)^{-1} - 1)\boldsymbol{\Theta}_{tt}^{n-1}) \quad (15b)$$

Por intermédio do sistema de equações (14) o modelo transiente pode ser solucionado a cada passo n de tempo (podendo o modelo permanente ser solucionado, de forma análoga, por intermédio do sistema de equações (12)).

5. ANÁLISES NUMÉRICAS

Apresentam-se a seguir as análises numéricas de alguns modelos transientes e permanentes. No caso de modelos transientes, os seguintes parâmetros são aqui adotados com relação ao método de Newmark: $\beta = 0.5$ e $\alpha = 0.25$ (regra trapezoidal), o que gera uma metodologia de integração temporal incondicionalmente estável e com precisão de segunda ordem. Em todas as análises que se seguem, elementos finitos lineares (i.e., elaborados por intermédio de funções de interpolação baseadas polinômios lineares) são considerados.

5.1. Modelos permanentes

Neste subitem modelos permanentes são analisados, sendo aqui considerados um problema de campo potencial elétrico e um de campo potencial

magnético. O campo potencial elétrico é uma grandeza escalar, cujo gradiente fornece o campo elétrico atuante no modelo. O campo potencial magnético, por sua vez, é uma grandeza vetorial, cujo rotacional fornece o campo magnético atuante. No caso de análises bidimensionais, o vetor potencial magnético pode ser representado por uma grandeza escalar que simboliza a única componente cartesiana não nula deste vetor, perpendicular ao plano de análise. Tem-se assim, mais uma vez, a análise de um campo potencial escalar, sendo o modelo então descrito pela equação diferencial (7) e pela sua forma discretizada (12).

5.1.1. Eletrostática

Analisa-se aqui o campo potencial elétrico (e seu gradiente, que descreve o campo elétrico do modelo) gerado por um sistema condutor-porcelanar. 5159 elementos finitos triangulares são empregados para discretização espacial do modelo, sendo parte de tal discretização ilustrada na Fig.1a. A densidade de carga no modelo (representada por condições de contorno no modelo matemático) é dada por $\rho = 10 \text{ C/m}^3$, sendo a permissividade relativa da porcelana dada por $\epsilon_r = 7$ (i.e., sete vezes a permissividade do ar). O campo potencial elétrico calculado, bem como seu gradiente, é apresentado na Fig.1b.

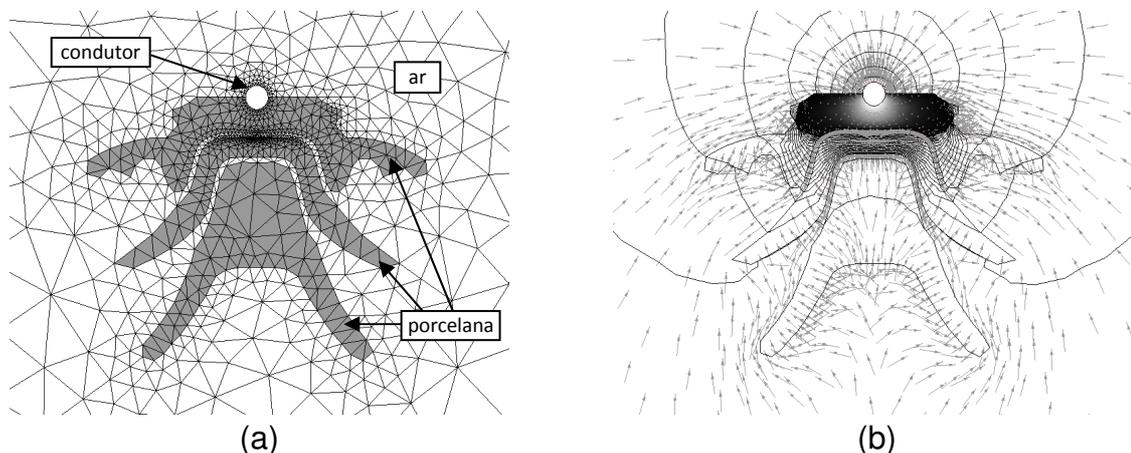


Fig.1 – Análise eletrostática: (a) sistema condutor-procelana-ar e discretização espacial adotada; (b) campo potencial elétrico calculado (linhas de equipotencial) e seu gradiente (vetores desenhados com mesmo módulo).

5.1.2. Magnetostática

No presente subitem analisa-se a componente z do vetor potencial magnético (e seu rotacional, que descreve o campo magnético do modelo), de um modelo condutor-ferro-ar descrito no plano xy , conforme indicado na Fig.2a. Uma malha regular de 10000 elementos quadrangulares é empregada na análise. A corrente atuante no sistema (representada por fontes no modelo matemático) é caracterizada por $\mathbf{J}_z = 1\text{A/m}^2$ e a permeabilidade relativa do ferro é dada por $\mu_r = 1000$. O campo potencial magnético calculado (componente z) é apresentado na Fig.2a, sendo seu rotacional apresentado em detalhe na Fig.2b, tendo em consideração uma região pre-selecionada (ver região de zoom na Fig.2a).

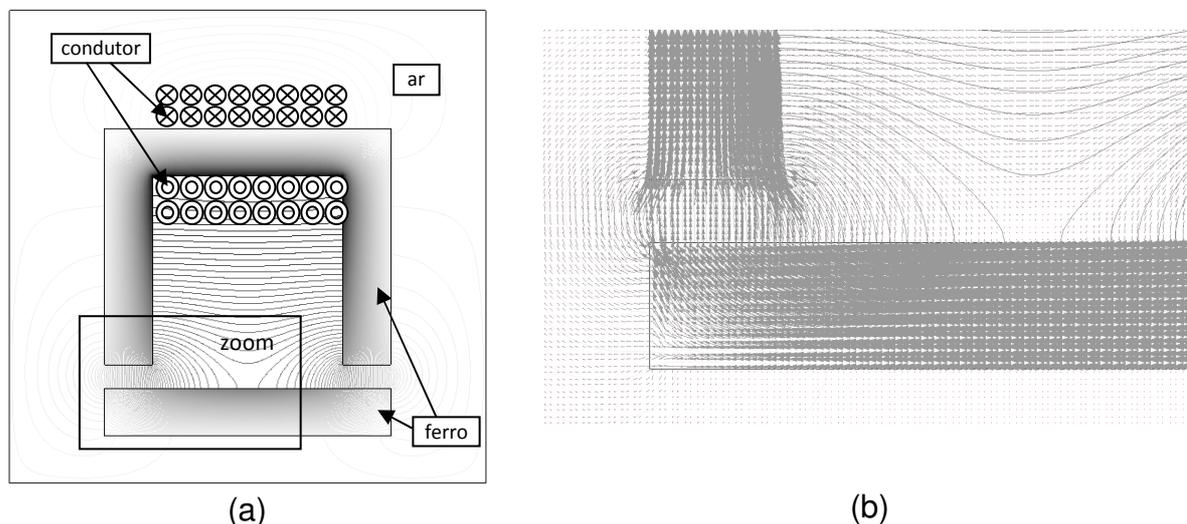


Fig.2 – Análise magnetostática: (a) sistema condutor-ferro-ar e campo potencial magnético calculado (linhas de equipotencial); (b) rotacional do vetor potencial (vetores desenhados em escala) na região de zoom.

5.2. Modelos transientes

Neste subitem analisam-se problemas de propagação de onda. Considera-se aqui um sistema condutor-concreto-aço-ar Soares Jr.(2008), estando o fio condutor (com corrente temporal senoidal) disposto entre duas paredes, uma de concreto e uma de aço. Um esquema do sistema em análise é apresentado na Fig.3a, sendo o campo elétrico calculado (componente perpendicular ao plano) apresentado na Fig.3, tendo-se em consideração diferentes instantes de tempo. O passo de tempo adotado para análise temporal em questão é dado por $\Delta t = 5 \times 10^{-12} \text{s}$.

Analisando-se os resultados, percebem-se claramente as distintas velocidades de propagação de onda nos diferentes meios em análise. Observa-se que a velocidade de propagação no aço é relativamente bastante baixa, bloqueando a penetração de campo elétrico no mesmo.

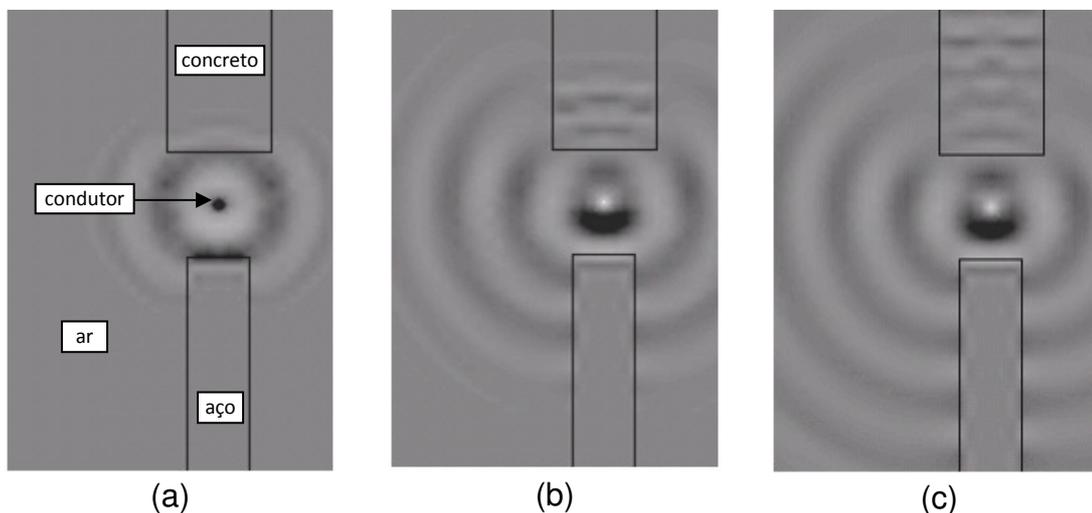


Fig.3 – Análise de propagação de onda eletromagnética – campo elétrico calculado em diferentes instantes de tempo: (a) $t = 3 \times 10^{-10}s$; (b) $t = 6 \times 10^{-10}s$; (c) $t = 10 \times 10^{-10}s$.

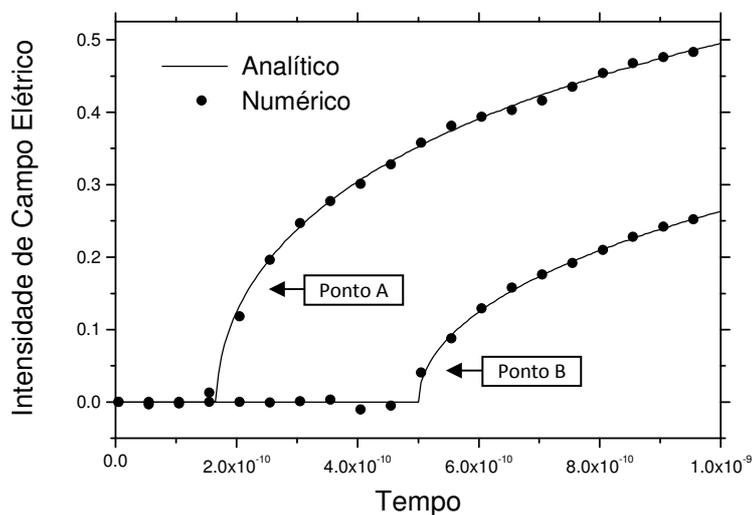


Fig.4 – Histórico de tempo da intensidade de campo elétrico calculada em análise de meio homogêneo.

Considerando-se meio homogêneo (ar) e corrente linear no tempo, a solução analítica do problema em questão pode ser calculada, conforme apresentado em Soares Jr. et al. (2008). Na Fig.4, os resultados numéricos obtidos

são comparados com tal solução analítica, considerando o campo elétrico em dois pontos: um distante de 5 cm do condutor (Ponto A) e outro distante de 15 cm (Ponto B). Boa concordância se observa entre os resultados apresentados na Fig.4.

6. CONCLUSÕES

O Método dos Elementos Finitos, conforme se pôde observar, é uma ferramenta poderosa para análise de problemas complexos em eletromagnetismo. No presente trabalho foram analisados problemas permanentes e transientes e os resultados encontrados estão em concordância com os previstos pela literatura. É importante ressaltar que os modelos aqui analisados são de alta complexidade (meios heterogêneos com geometria intrincada etc.) impossibilitando a análise dos mesmos por intermédio de técnicas analíticas. Desta forma, destaca-se a importância de metodologias numéricas avançadas, como as aqui apresentadas, para a solução de problemas reais e correntes na engenharia moderna.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Lorrain, P.; Corson, D.; Larraine, F. **Campos e ondas electromagnéticas**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2000.
- Hayt, W.H.; Buck, J.A. **Eletromagnetismo**. Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2003.
- Bathe, K.J. **Finite element procedures in engineering analisys**. New Jersey: Prentice-Hall.Inc, 1996.
- Ida, N.; Bastos, J.P.A. **Eletromagnetics and calculations of Fields**. New York: Springer, 1997.

- Zienkiewics, O.C.; Taylor, R.L. **The Finite Element Method - Vol 1. The Basis**. Barcelona: Buttherworth Heinemann, 2000.
- Jin, J. **The Finite Element Method in Eletromagnetics**. New York: Jonh Wiley & Sons Inc., 2002.
- Newmark, N.M. A method of computation for structural dynamics. **ASCE Journal of Engineering Mechanics Division**, n.85, p.67-94, 1959.
- Soares Jr., D. A time-domain FEM-BEM iterative coupling algorithm to numerically model the propagation of electromagnetic waves. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, n.32, p.57-68, 2008.
- Soares Jr., D.; Vinagre, M.P. Numerical computational of electromagnetic fields by the time-domain boundary element method and the complex variable method. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, n.25, p.1-8, 2008.