

ANÁLISE DE CAMPOS PERMANENTES PELO ACOPLAMENTO ITERATIVO MEF-MEC

Henrique de Oliveira Caiafa Duarte *
Delfim Soares Júnior **

RESUMO

Neste trabalho, a modelagem numérica de campos eletromagnéticos estáticos é abordada pelo acoplamento dos métodos dos elementos finitos (MEF) e de contorno (MEC). Duas metodologias iterativas são consideradas para o acoplamento, cujas técnicas permitem que cada subdomínio do modelo seja analisado de forma independente, sendo a interação entre os subdomínios estabelecida por intermédio de condições de interface. Na 1ª abordagem, condições de contorno essenciais (Dirichlet) são prescritas nas interfaces dos subdomínios discretizados pelo MEC, enquanto condições de contorno naturais (Neumann) são prescritas nas interfaces dos subdomínios discretizados pelo MEF. Na 2ª abordagem, estas condições de interface são trocadas. Em ambos os casos, parâmetros de relaxamento otimizados são empregados, de forma a garantir e/ou agilizar a convergência do algoritmo iterativo.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno, Método dos Elementos Finitos, Acoplamento Iterativo, Eletromagnetismo Computacional.

INTRODUÇÃO

Com os avanços tecnológicos da computação, o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) passaram a ser usados para resolução de equações diferenciais parciais e o acoplamento entre esses dois métodos passou a ser estudado para se desfrutar das vantagens de cada um. Este acoplamento pode ser feito de diversas maneiras, sendo o método iterativo abordado neste artigo.

Como características principais do MEF, têm-se: (i) boa eficiência computacional e fácil implementação para solução de problemas complexos; (ii) flexibilidade na geração da malha; (iii) cálculos em nível de elementos distribuídos ao longo do domínio; (iv) dificuldade em se modelar meios

* Bolsista PROBIC/FAPEMIG/UFJF.

** Professor Orientador da Faculdade de Engenharia - UFJF.

Endereço Profissional do Professor Orientador:

Faculdade de Engenharia, Universidade Federal de Juiz de Fora, Cidade Universitária, Bairro Martelos, CEP 36036-330, Juiz de Fora, MG, Brasil. E-mail: delfim.soares@ufjf.edu.br

infinitos; (v) facilidade para se modelar meios heterogêneos etc. Já o MEC é caracterizado por: (i) boa eficiência computacional e implementação mais elaborada; (ii) grande facilidade na geração de malha associada à flexibilidade; (iii) cálculos em nível de elementos de contorno; (iv) modelagem trivial de meios infinitos; (v) dificuldade para se modelar meios heterogêneos etc.

Devido às distintas vantagens destes métodos, o acoplamento dos mesmos se faz de grande importância para se obter uma ferramenta eficaz de análise, unindo-se o melhor de dois mundos. O acoplamento iterativo abordado neste trabalho permite que diferentes subdomínios do modelo sejam discretizados pelo MEF ou pelo MEC e analisados de forma independente, sendo condições de interface prescritas nos contornos comuns aos subdomínios (Li, 1996; Bo et al., 2006; Soares Jr., 2008). Estas condições de interface baseiam-se nas condições de equilíbrio e continuidade nas fronteiras dos subdomínios.

No caso da análise de campos eletromagnéticos estáticos, é importante ressaltar que, tanto nos subdomínios discretizados pelo MEF quanto pelo MEC, condições de contorno essenciais devem ser prescritas, de forma a evitar singularidades nos sistemas de equações, justificando assim a implementação de duas técnicas distintas de acoplamento iterativo, permitindo uma maior flexibilidade quando da análise dos problemas.

METODOLOGIA

EQUAÇÕES DE MAXWELL

Os fenômenos eletromagnéticos são regidos pelas equações de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -\partial \vec{D} / \partial t + \vec{J} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (4)$$

onde \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{J} e ρ representam a intensidade de campo elétrico, intensidade de campo magnético, densidade de campo elétrico, densidade de campo magnético, densidade superficial de corrente elétrica e densidade volumétrica de cargas, respectivamente.

Entre \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{J} existem ainda as seguintes relações constitutivas:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (5)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (7)$$

onde μ , ϵ e σ representam a permeabilidade magnética, permissividade elétrica e condutividade elétrica do sistema, respectivamente.

Sabendo-se que $\vec{E} = -\nabla V$ e $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, onde V e \vec{A} representam campos potenciais, podemos representar problemas da eletrostática e da magnetostática (bidimensional) pela equação de Poisson, uma vez que as equações de Maxwell sejam trabalhadas e reorganizadas, resultando em:

$$\epsilon \nabla^2 V = -\rho \quad (8)$$

$$\nabla^2 A_k = -\mu J_k \quad (9)$$

Assim sendo, pode-se trabalhar com o mesmo algoritmo para os dois casos focados (eletrostática e magnetostática), considerando-se uma nomenclatura genérica, conforme é feito a seguir.

EQUAÇÕES GOVERNANTES

Partindo da equação de Poisson em sua forma genérica, temos:

$$k \nabla^2 u = \gamma; \text{ em } x \in \Omega \quad (10)$$

$$u(x) = \bar{u}(x); \text{ em } x \in \Gamma_u \quad (11)$$

$$q(x) = \partial u(x) / \partial \vec{n} = \bar{q}(x); \text{ em } x \in \Gamma_q \quad (12)$$

onde u é um campo potencial genérico e Ω e Γ ($\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$) representam o domínio e o contorno do modelo, respectivamente. As equações (11) e (12) descrevem condições de contorno essenciais e naturais, respectivamente, sendo \vec{n} o vetor normal unitário externo ao contorno. k representa a propriedade física do modelo e g a excitação de domínio.

Por intermédio de funções de interpolação (aqui representadas por N), as formas integrais da equação de Poisson levam a sistemas matriciais, tanto se considerando discretizações pelo MEF quanto pelo MEC. Vale ressaltar que o MEC utiliza também as soluções fundamentais do modelo, aqui representadas por q^* e u^* . Nos subitens que se seguem, se descreve de forma sucinta os sistemas de equações provenientes da discretização por elementos finitos e por elementos de contorno.

SISTEMA DE EQUAÇÕES DO MEF

As equações relativas ao MEF são descritas pelo sistema matricial (13) a seguir. Nesta equação, a matriz de rigidez é representada por K e o vetor de cargas nodais por F , sendo o cálculo destes dados pelas equações (14) e (15), respectivamente. O vetor incógnita u descreve valores nodais de potencial (Jin, 1996; Silvester and Ferrari, 1996).

$$Ku = F \quad (13)$$

$$K = \int_{\Omega} (\nabla N)^T k (\nabla N) d\Omega \quad (14)$$

$$F = \int_{\Gamma_q} N^T k \bar{q} d\Gamma - \int_{\Omega} N^T \gamma d\Omega \quad (15)$$

Nas equações (14) e (15), N representa a matriz de interpolação do modelo, sendo esta composta pelas funções de interpolação no elemento (assim como no MEC).

SISTEMA DE EQUAÇÕES DO MEC

O MEC é regido pelo sistema matricial (16), formado pelos vetores u e q (valores de potencial e fluxo, respectivamente), pela matriz geométrica diagonal C ($C_{kk} = 1$ para $x \in \Omega$; ; $0 < C_{kk} < 1$ para $x \in \Gamma$; $C_{kk} = 0$ para $x \notin \Omega \cup \Gamma$) e pelas matrizes de influência H e G , sendo estas calculadas de acordo com as equações (17) e (18), respectivamente (Pozrikidis, 2002).

$$(\mathbf{H} + \mathbf{C})\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (16)$$

$$\mathbf{H} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{q}^* d\Gamma \quad (17)$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (18)$$

Nas equações (17) e (18), \mathbf{q}^* e \mathbf{u}^* representam os termos da solução fundamental de fluxo e de potencial, respectivamente.

ALGORITMO DE ACOPLAMENTO ITERATIVO

Primeiramente, para o estabelecimento do acoplamento dos dois métodos numéricos, devem ser consideradas as condições de continuidade e equilíbrio nas interfaces dos subdomínios discretizados pelo MEF e pelo MEC:

$$\mathbf{u}_I^F = \mathbf{u}_I^B \text{ para } \mathbf{x} \in \Gamma^I \quad (19)$$

$$\mathbf{f}_I^F + \mathbf{f}_I^B = \mathbf{0} \text{ para } \mathbf{x} \in \Gamma^I \quad (20)$$

onde Γ^I representa a interface e os superescritos F e B indicam elemento finito (finite element) e elemento de contorno (boundary element), respectivamente.

A Figura 1 abaixo exemplifica um problema genérico tendo em conta discretização numérica por intermédio destes dois métodos.

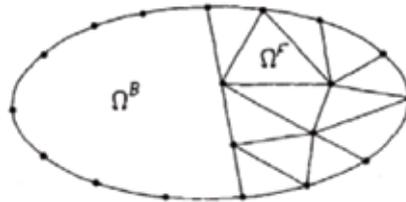


Figura 1. Corpo modelado por subdomínios discretizados pelo MEF e pelo MEC.

A partir destas condições de continuidade e equilíbrio, foram desenvolvidas duas metodologias de acoplamento iterativo, conforme se discute a seguir.

PRIMEIRA METODOLOGIA

Nesta primeira abordagem, condições de contorno essenciais ou de Dirichlet são prescritas nas interfaces dos subdomínios discretizados pelo MEC, enquanto condições de contorno naturais ou de Neumann são prescritas nas interfaces dos subdomínios discretizados pelo MEF. As etapas do algoritmo de solução são descritas a seguir.

(i) Estando valores para os potenciais nas interfaces do MEC atribuídos, os sistemas de equações do MEC são resolvidos, sendo os fluxos q_I^B calculados nas interfaces;

(ii) Com os valores de fluxo q_I^B calculados, estes são convertidos para valores de forças nodais f_I^B , cujo negativo servirá de condição de contorno para os nós do MEF na interface (eq. 20).

(iii) Os sistemas de equações do MEF são resolvidos, sendo os valores de potenciais u_I^F obtidos. Os novos potenciais u_I^B para os nós de interface dos elementos do MEC são obtidos pela ponderação descrita abaixo (segundo a relação (19) e adotando um parâmetro de relaxamento α):

$$u_{i, n+1}^B = \alpha u_{i, n}^F + (1 - \alpha) u_{i, n-1}^B \quad (21)$$

$$\alpha = (e_n^B, e_n^B - e_n^F) / \|e_n^B - e_n^F\|^2 \quad (22)$$

$$e_n^{B/F} = u_{i, n}^{B/F} - u_{i, n-1}^{B/F} \quad (23)$$

(iv) Segue-se para o passo (i) do algoritmo, continuando o processo iterativo. A iteração termina quando a diferença normalizada dos vetores de potencial $u_{i, n+1}^F$ e $u_{i, n}^F$ torna-se menor do que uma dada tolerância ε .

SEGUNDA METODOLOGIA

Nesta segunda abordagem, as condições de interface são trocadas em relação à primeira metodologia. As etapas do algoritmo de solução são descritas a seguir.

(i) Estando valores para os potenciais nas interfaces do MEF atribuídos, os sistemas de equações do MEF são resolvidos, sendo os fluxos q_i^F calculados nas interfaces, a partir dos gradientes dos potenciais;

(ii) Com os valores de fluxos q_i^F calculados, estes são utilizados como condição de contorno q_i^B para o MEC ($-k^B q_i^B = k^F q_i^F$), sendo as interfaces do MEC discretizadas por nós duplos (devido a discontinuidades nos valores de gradiente providos do MEF);

(iii) Os sistemas de equações do MEC são resolvidos, sendo os valores de potenciais u_i^B obtidos. Os novos potenciais para os nós de interface dos elementos do MEF são obtidos pela ponderação descrita abaixo:

$$u_{i, n+1}^F = \alpha u_{i, n}^B + (1 - \alpha) u_{i, n-1}^F \quad (24)$$

$$\alpha = (e_n^F, e_n^F - e_n^B) / \|e_n^F - e_n^B\|^2 \quad (25)$$

$$e_n^{B/F} = u_{i, n}^{B/F} - u_{i, n-1}^{B/F} \quad (26)$$

(iv) Segue-se para o passo (i) do algoritmo, continuando o processo iterativo. A iteração termina quando a diferença normalizada dos vetores de potencial $u_{i, n+1}^B$ e $u_{i, n}^B$ torna-se menor do que uma dada tolerância ε .

Ressalta-se que, nas primeira e segunda metodologias, o parâmetro de relaxamento α ($0 < \alpha \leq 1$) é computado (ver eq.(22) ou eq.(25)) tendo em consideração a minimização do funcional de erro:

$$f(\alpha) = \|u_{i, n}^{B/F}(\alpha) - u_{i, n-1}^{B/F}(\alpha)\|^2 \quad (27)$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Duas análises de um modelo simples serão apresentadas a seguir: uma considerando meio homogêneo e outra considerando meio heterogêneo, de forma a ilustrar a precisão das metodologias discutidas. O problema em foco é esquematizado pela Figura 2 abaixo:

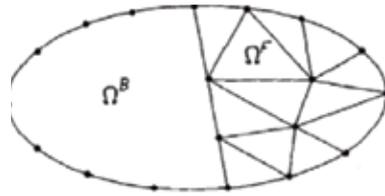


Figura 2. Esquema do problema a ser analisado

Conforme se observa na Figura 2, uma interface curva é adotada entre os sub-domínios de MEF e de MEC, de forma a evitar uma análise numérica trivial quando da consideração do caso homogêneo (para o caso homogêneo, a resposta analítica do problema em questão é conhecida, sendo caracterizada por um gradiente constante segundo a direção vertical e um gradiente nulo segundo a direção horizontal).

ANÁLISE 1 (MEIO HOMOGÊNEO)

Nesta primeira análise, a relação entre as constantes relativas a cada meio k_B/k_F vale 1. A Figura 3 ilustra os resultados obtidos para os campos potencial e gradiente ao longo da malha do MEF pelos dois métodos de acoplamento MEF-MEC discutidos.

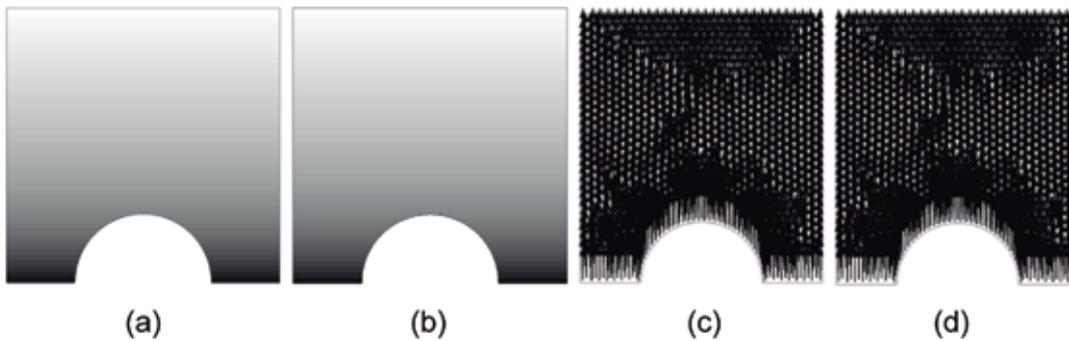


Figura 3. Meio homogêneo: campo potencial calculado pelo (a) método 1 e (b) método 2 campo gradiente calculado pelo (c) método 1 e (d) método 2 de acoplamento MEF-MEC.

Na Figura 4, os gráficos que explicitam os valores de potencial calculados ao longo do eixo y do modelo são apresentados, estando os resultados obtidos em concordância com a resposta analítica do modelo.

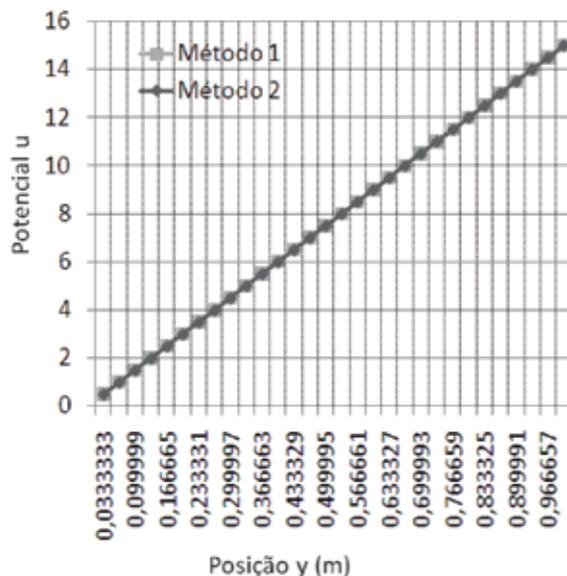


Figura 4. Valor de potencial encontrado em função da posição y.

Os gráficos apresentados na Figuras 5 ilustram a convergência do processo iterativo. Nas análises relativas à Figura 5(a), parâmetros de relaxamento foram fixados (isto é, as eq. (22) e (25) não foram consideradas), sendo os números de iterações obtidos pelos dois métodos de acoplamento apresentados na figura. Já os gráficos apresentados na Figura 5(b) ilustram os valores de α calculados a cada passo iterativo (bem como o número máximo de iterações), tendo-se em conta a utilização das eq. (22) e (25), considerando-se os dois métodos de acoplamento MEF-MEC.

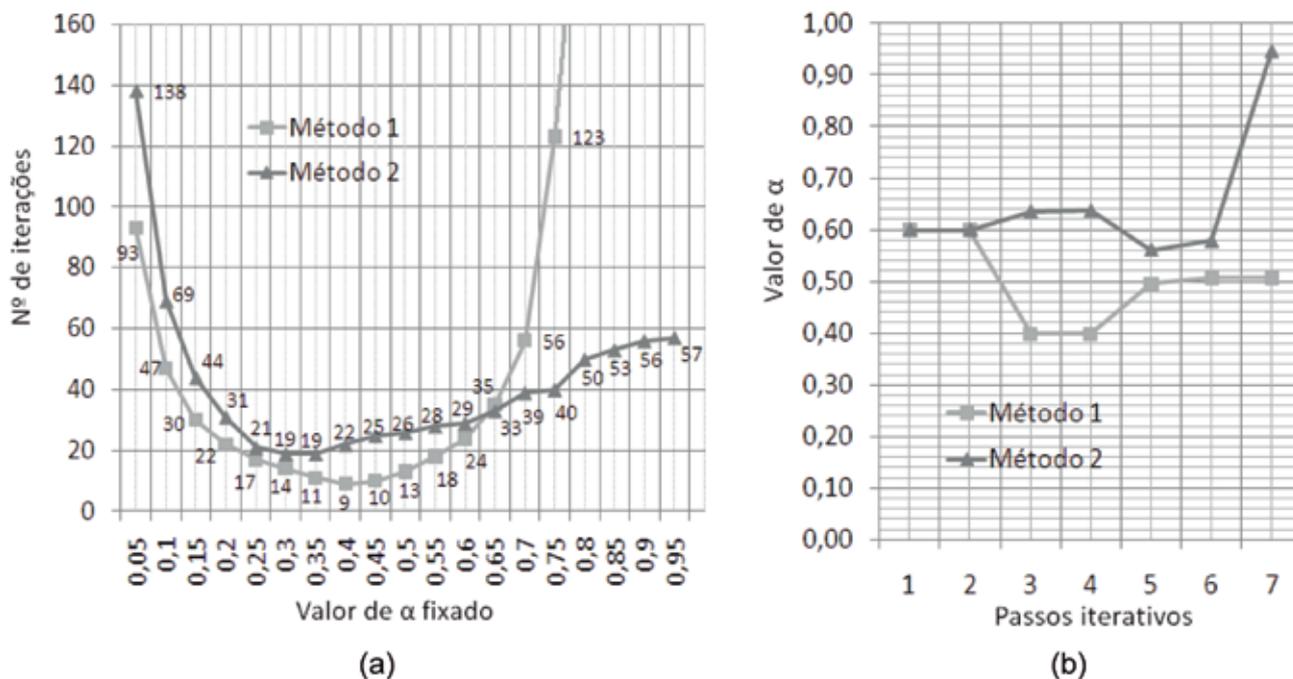


Figura 5. (a) Número de iterações para convergência do resultado para cada valor de α fixado e (b) valor de α calculado a cada passo iterativo (meio homogêneo).

Conforme se pode observar na Figura 5, as expressões propostas para o cálculo otimizado de α introduzem significativa melhora na convergência dos resultados.

ANÁLISE 2 (MEIO HETEROGÊNIO)

Nesta segunda análise, a relação entre as constantes relativas a cada meio k_B/k_F vale 10. Tendo-se em conta esta nova configuração, os resultados obtidos para o campo potencial e para o campo gradiente calculado ao longo da malha de MEF são apresentados na Figura 6, tendo-se em consideração os dois métodos de acoplamento MEF-MEC discutidos.

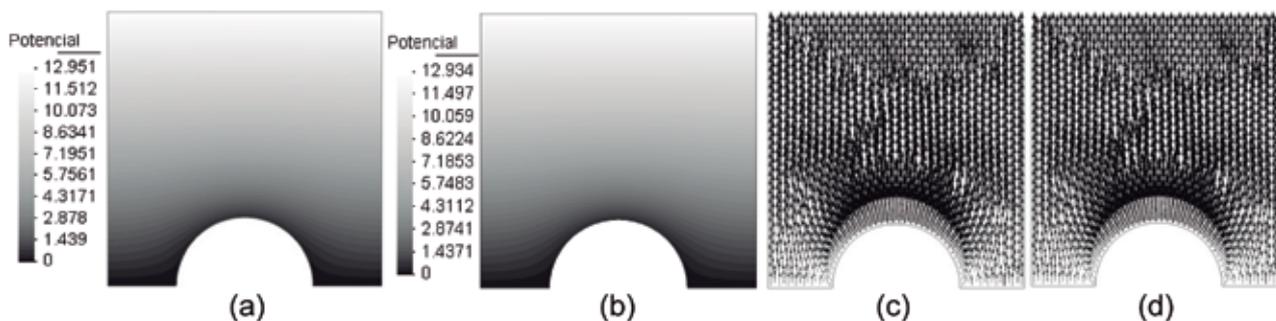


Figura 6. Meio heterogêneo: campo potencial calculado pelo (a) método 1 e (b) método 2 campo gradiente calculado pelo (c) método 1 e (d) método 2 de acoplamento MEF-MEC.

Analogamente à Figura 5, para o caso homogêneo, a Figura 7 é apresentada a seguir, para o caso heterogêneo:

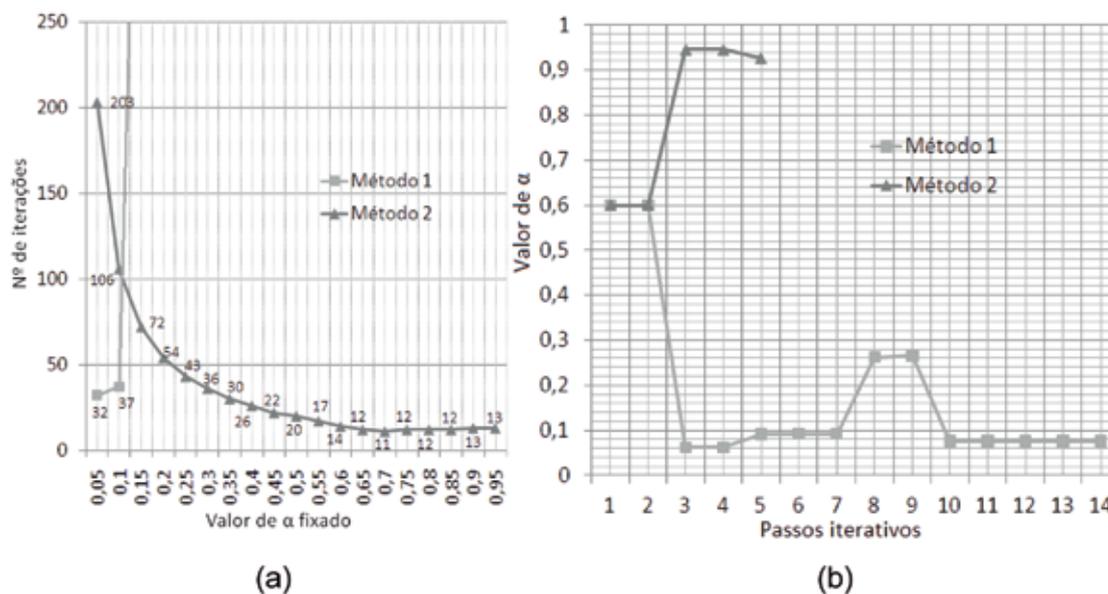


Figura 7. (a) Número de iterações para convergência do resultado para cada valor de α fixado e (b) valor de α calculado a cada passo iterativo (meio heterogêneo).

Mais uma vez observa-se nas Figuras 7(a) e 7(b), como as expressões propostas para o cálculo otimizado de α introduzem significativa melhora na convergência dos resultados. Para a presente análise de meio heterogêneo tal aprimoramento é ainda mais acentuado tendo em consideração o método 1 de acoplamento MEF-MEC, uma vez que, conforme ilustrado na Figura 7(a), para este caso raramente se obtém convergência para valores fixos de α .

CONCLUSÃO

No ramo da engenharia, cada problema a ser estudado se encaixa melhor com determinada ferramenta de resolução. O MEF é eficiente em análises de meios heterogêneos e anisotrópicos, porém com domínio finito. Já o MEC se destaca em problemas com meios homogêneos finitos ou semi-infinitos, com rápida resolução numérica, devido ao fato das dimensões de suas matrizes terem ordem reduzida (discretização tão somente de contorno). Diversos outros métodos, como o método das diferenças finitas, volumes finitos, métodos *meshless* etc., possuem também melhores funcionalidades para determinados tipos de problemas.

Como o MEF e o MEC são tratados no programa relativo a análises acopladas iterativas como subrotinas praticamente independentes, torna-se fácil a implementação e a generalização dos códigos, podendo-se considerar com mínimo esforço uma série de diferentes métodos numéricos acoplados, desenvolvendo-se assim uma poderosa ferramenta numérica.

Portanto, pode-se notar que, além das vantagens oferecidas pelo algoritmo proposto neste trabalho, ele é capaz de oferecer uma enorme gama de possibilidades, visto que pode ser aprofundado em diversos estudos da engenharia, considerando diversos procedimentos numéricos distintos.

AGRADECIMENTOS

Agradecimentos são aqui prestados ao CNPq e à FAPEMIG pelo apoio financeiro conferido à presente pesquisa.

PERMANENT FIELDS ANALYSIS BY THE ITERATIVE FEM-BEM COUPLING

ABSTRACT

In this work, the numerical modeling of static electromagnetic fields is discussed taking into account the coupling of finite and boundary element methods (FEM and BEM, respectively). Two iterative techniques are considered for the coupling, allowing each subdomain of the model to be analyzed independently, being the interactions of the subdomains established through interface conditions. In the 1st approach, essential (Dirichlet) boundary conditions are prescribed at the interfaces of the sub-domains discretized by BEM, whereas natural (Neumann) boundary conditions are prescribed at the interfaces of the sub-domains discretized by FEM. In the 2nd approach, these interface boundary conditions are switched. In both cases, optimized relaxation parameters are employed to ensure and/or to speed up the convergence of the iterative algorithm.

Keywords: Boundary Element Method, Finite Element Method, Iterative Coupling, Computational Electromagnetism.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bo, Y. ; Juan, D. ; Ning, H. A domain decomposition algorithm with finite element-boundary element coupling. **Applied Mathematics and Mechanics**, vol. 27, n. 4, p. 519-525, 2006.

Jin, J. **The Finite Element Method in Electromagnetics**. USA, John Willey & Sons, INC., 2002.

Lin, C. C. An iterative finite element-boundary element algorithm. **Computers & Structures**, vol. 59, n. 5, p. 899-909, 1996.

Pozrikidis, C. **A Practical Guide to Boundary Element Methods with the Software Library BEMLIB**. USA, Chapman & Hall/CRC, 2002.

Silvester, P. P. ; Ferrari, R. L. **Finite elements for electrical engineers**. Third edition. Cambridge University Press, 1996.

Soares Jr., D. A Time-Domain FEM-BEM Iterative Coupling Algorithm to Numerically Model the Propagation of Electromagnetic Waves. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, vol. 32, n. 2, p. 57-68, 2008.