

DETERMINAÇÃO DA DIMENSÃO FRACTAL DE REDES DE DRENAGEM DE BACIAS HIDROGRÁFICAS: ESTUDO DE CASO

Luísa Santana Marques¹
Samanta Ferreira Bortoni²
Maria Helena Rodrigues Gomes³

RESUMO

O presente trabalho analisa diferentes métodos existentes para o cálculo da dimensão fractal da Bacia Hidrográfica do Ribeirão Marmelo. Difundido por Mandelbrot (1977), o conceito de fractais tem o intuito de estimar o grau de complexidade, auto-afinidade e auto-similaridade de objetos que estão associados a elementos da natureza que não se enquadram na geometria Euclideana clássica. A avaliação de características geomorfológicas de uma bacia hidrográfica, através de conhecimentos de geometria fractal e conceitos de hidrologia, constitui um elemento de grande importância, já que está ligada ao comportamento hidrológico da rede de drenagem. O estudo da fractalidade da bacia hidrográfica do Ribeirão Marmelo foi realizado através do manuseio de mapa do IBGE, com o auxílio de réguas, compassos e planímetros a partir de quatro métodos: Razões de Horton, Método da Distribuição da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais, Método do *Box-Counting* e Método de Richardson. Os resultados obtidos foram pertinentes ao limiar da faixa de valores encontrados na literatura, concluindo-se assim que redes de drenagem podem ser vistas como objetos fractais.

Palavras-chaves: Dimensão fractal. Redes de drenagem. Bacias hidrográficas.

INTRODUÇÃO

Desde sua consolidação, a hidrologia – ciência que trata da água na Terra, sua ocorrência, circulação e distribuição, suas propriedades físicas e químicas, e sua relação com o meio ambiente (TUCCI, 2002) – vem evoluindo significativamente em face da necessidade crescente de utilização

1 Bolsista do Programa BIC/UFJF.

2 Aluna e membro do Grupo de Educação Tutorial do Curso de Engenharia Sanitária e Ambiental da Faculdade de Engenharia da Universidade Federal de Juiz de Fora.

3 Professora orientadora do Departamento de Engenharia Sanitária e Ambiental da Faculdade de Engenharia da Universidade Federal de Juiz de Fora, - 4ª Plataforma Setor de Tecnologia - Rua João Lourenço Kelmer s/n – Bairro Marmelo – CEP: 36036-900 - Juiz de Fora – MG – Brasil. Fone: (32) 3229-3419 ramal 21 - Fax: (32) 3229-3401; e-mail: mariahelena.gomes@ufjf.edu.br

e preservação das bacias hidrográficas. Segundo DOOGE (1988 apud TUCCI, 2002), a Hidrologia Científica se contextualiza no desenvolvimento clássico do conhecimento científico, à medida que a Hidrologia Aplicada trata dos diferentes fatores relevantes ao provimento de água e saúde para a produção de alimento no mundo.

Seguindo os caminhos da hidrologia como ciência, em 1977, o matemático polonês Benoit Mandelbrot apresentou ao mundo o termo “fractal”, palavra esta baseada no adjetivo latino *fractus*, cujo significado é fraturado ou quebrado. De fato, o conceito de fractal designa-se a objetos irregulares que não se enquadram na geometria euclidiana, os quais são caracterizados por possuírem complexidade infinita, auto-afinidade e auto-similaridade.

Na mesma época, Mandelbrot (1977) difundiu também o conceito de dimensão fractal, a qual expressa, através de um número, o grau de irregularidade, complexidade, fragmentação ou diversidade de um determinado objeto em diversas escalas, possibilitando o estudo de objetos com complexidade infinita. E para o pesquisador, os fractais são conjuntos de objetos cuja dimensão fractal é superior a sua dimensão euclidiana (SILVEIRA, 2006). Com o advento da geometria fractal atrelado a conceitos de hidrologia básica, pode-se realizar uma melhor análise quantitativa das características do relevo de bacias hidrográficas e sua associação com o escoamento.

Diante disso, tem-se a geometria fractal como uma ferramenta a mais para o estudo da geomorfologia, tornando-se importante, já que o mundo passa por intensas variações climáticas e, de acordo com Villela e outros (1975), o conhecimento de características físicas de uma bacia hidrográfica pode auxiliar na melhor caracterização da evolução de uma bacia hidrográfica e na determinação das respostas de chuvas torrenciais em redes fluviais.

Os critérios de ordenamento dos canais da rede de drenagem de uma bacia hidrográfica foram estudados por Horton (1945) e simplificados por Strahler (1952), posteriormente (GOMES, 1997). Segundo Strahler (1952 apud Silveira, 2006), todos os canais com origem na fonte são ditos de primeira ordem; o encontro de dois canais de mesma ordem origina um canal de ordem $N+1$; quando canais de ordens diferentes se encontram, o canal imediatamente a jusante recebe a ordem do maior canal que o formou; e a bacia receberá a ordem do maior canal contido em seu interior. A Fig. 1 esquematiza os critérios de Strahler.

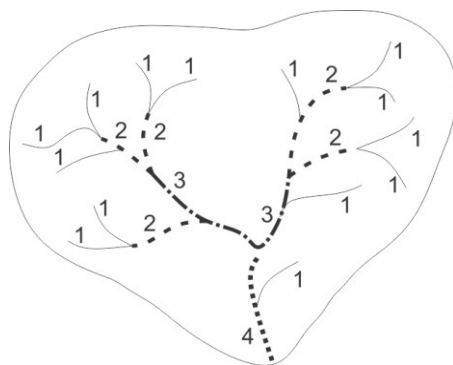


Fig. 1 - Ordenação dos canais de uma rede de drenagem segundo Strahler (http://www.hidrotec.ufv.br/metodologia_resultados.html)

Além da ordenação das redes de drenagem de uma bacia hidrográfica, Horton (1945 apud Vestena, 2010) deduziu a Lei do Número de Canais (R_B) e a Lei do Comprimento dos Canais (R_L), representadas, respectivamente, pela estrutura geológica (razão de bifurcação) da rede e pela estrutura geométrica (razão de comprimento). Continuando o trabalho de Horton, Smart (1972 apud Vestena, 2010) propôs a Lei da Área de Drenagem (R_A), que é a razão de área. As três leis podem ser escritas no seguinte formato:

Lei do Número de Canais:

$$R_B \cong \frac{N_{xi-1}}{N_{xi}} \quad (2)$$

Lei do Comprimento de Canais:

$$R_L \cong \frac{L_{xi}}{L_{xi-1}} \quad (3)$$

Lei da Área de Drenagem:

$$R_A \cong \frac{Ax_i}{Ax_{i-1}} \quad (4)$$

Os resultados encontrados devem pertencer a faixas de valores de: 3 a 5 para a razão de bifurcação; 1,5 a 3,5 para a razão de comprimento; e 3 a 6 para a razão de área, segundo Strahler (1952 apud Araujo et al., 2011).

Segundo Mandelbrot (1977 apud Gomes, 1997), para compreender a dimensão fractal pode-se assumir N_c esferas n -dimensionais de diâmetros d para cobrir certo objeto no espaço n -dimensional. N_c e d relacionam-se na seguinte equação:

$$N_c(d) \approx d^{-D} \quad (1)$$

A dimensão fractal não quantifica a forma de um objeto fractal, apenas a sua complexidade, e as dimensões dos objetos são valores contínuos entre as dimensões euclidianas, assim, pode-se pensar na irregularidade com um aumento na dimensão, (SILVEIRA, 2006).

Segundo Serra e Karas (1997) apud Silveira (2006), os fractais possuem alta complexidade e estão relacionados com o espaço que a figura ocupa. Segundo os autores, as dimensões fractais são valores fracionários entre um e dois.

Christofoletti e Christofoletti (1994) apud Araujo (2011) afirmaram que bacias hidrográficas que representam estruturas bidimensionais, apresentam dimensão fractal D_f entre 2 e 2,99. E para La Barbera e Rosso (1989) apud Gomes (1997), a dimensão fractal para as redes de drenagem, em função das razões de Horton, não tende a um valor constante, porém está compreendida no intervalo entre 1,5 e 2,0.

METODOLOGIA

O objetivo do estudo visa à análise e comparação da dimensão fractal por diferentes métodos existentes e à consequente verificação das características geomorfológicas e hidrológicas da região.

O estudo foi realizado com base em mapas fornecidos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE (1981), na escala de 1:50.000. A bacia hidrográfica estudada foi a bacia do Ribeirão Marmelo, que está localizada no município de Juiz de Fora, na Zona da Mata Mineira, no domínio geológico Complexo de Juiz de Fora (PDJF, 1996). De acordo com Marques e outros (2012), a região possui o relevo montanhoso e mais acidentado em determinadas regiões, e apresenta

um clima tropical úmido, caracterizado por duas estações bem definidas: verão quente e úmido, e inverno frio e seco. O Ribeirão Marmelo pertence à bacia hidrográfica do rio Paraíba do Sul, a qual possui uma importância estratégica, pois abastece municípios dos Estados de Minas Gerais, Rio de Janeiro e São Paulo.



Fig. 2 - Mapa da região na escala 1:50.000 fornecido pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE, 1981).

Foram utilizados quatro métodos para o cálculo da dimensão fractal: cálculo através das Leis de Horton e três métodos gráficos – Método da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais, Método *Box-Counting* e Método de Richardson.

Com o intuito de estabelecer uma relação entre a dimensão fractal e as razões de Horton foram feitos vários estudos com parâmetros que caracterizam as bacias hidrográficas. Para isso, La Barbera e Rosso (1989) consideraram as leis de número de canais e comprimento de canais invariáveis para diversas escalas (GOMES, 1997). O cálculo da Dimensão Fractal pode ser obtido a partir das Leis de Horton segundo as equações:

$$D = \frac{\log R_B}{\log R_L}, R_B > R_L \quad (5)$$

$$D = 1, R_B \leq R_L \quad (6)$$

O Método da Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais, proposto por Tarboton e outros (1988), permite o cálculo da dimensão fractal de uma rede de drenagem com o auxílio de um instrumento de medida, a régua. Os canais são medidos um a um, desde seu ponto inicial até seu ponto final linearmente.

Tarboton e outros (1988) observaram que a probabilidade de ocorrência de r é proporcional a r^{-D} , denotando uma distribuição hiperbólica, escrita como:

$$p = \text{Prob}[\text{comprimento} > l] \approx l^{-D} \quad (7)$$

Onde D é a dimensão fractal e l é o comprimento dos canais.

A probabilidade de excedência é dada por:

$$P = \frac{m}{n+1} \quad (8)$$

Onde m é a ordem de um canal em uma lista ordenada do mais longo ao mais curto e n é o número total de canais da rede de drenagem.

A dimensão fractal é dada pela inclinação da reta ajustada aos pontos no gráfico da probabilidade de excedência em função do comprimento dos canais.

O segundo método gráfico utilizado, Método *Box-Counting*, proposto por Lovejoy e outros (1987) apud Silveira (2006), consiste em cobrir toda a rede de drenagem com uma malha de quadrículas de diferentes escalas e contabilizar as quadrículas que possuem canais. Mediante a construção de um gráfico do tamanho das quadrículas em função do número de quadrículas, pode-se obter a dimensão fractal através do coeficiente angular da reta.

O número de quadrículas $N(r)$ necessário para cobrir a rede de drenagem é dado pela seguinte equação:

$$N(r) \sim (1/r)^D \quad (9)$$

A dimensão fractal também foi determinada através do Método de Richardson, proposto por Tarboton e outros (1988), em que todos os canais da rede de drenagem são medidos através do número de passos com o auxílio de um instrumento de medida, o compasso. Quanto menor for o tamanho do passo, maior a exatidão.

Relacionando o número de passos com o tamanho de cada passo, em um gráfico log-log, uma inclinação i é observada. A dimensão fractal é dada por:

$$L \approx r^{1-D} \quad (10)$$

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A bacia do Ribeirão Marmelo foi classificada com grandeza de 4ª ordem, de acordo com o sistema de classificação de redes de drenagem proposto por Strahler (1952) apud Araujo e outros (2011).

As Razões de Horton calculadas foram: $R_L=2,93$; $R_B=4,68$; e $R_A=5,93$, cujos valores encontram-se dentro dos limites estabelecidos pela literatura. Para cálculo da dimensão fractal por meio das Razões de Horton foi utilizada a equação 5. O valor encontrado para dimensão fractal D_f igual a 1,44 (Tab. I) é coerente com aqueles encontrados na literatura para redes de drenagem naturais.

Nas figuras 3, 4 e 5 são apresentadas as curvas geradas pelos métodos método da Probabilidade da Excedência do Comprimento de Canais, método de *Box-counting* e método de Richardson, respectivamente. A dimensão fractal D_f foi obtida para esses três métodos através da determinação inclinação da reta tangente ajustada ao conjunto de pontos utilizados em cada método. Esses valores encontram-se reunidos na Tab. I, e estão, também, em conformidade com aqueles encontrados na literatura.

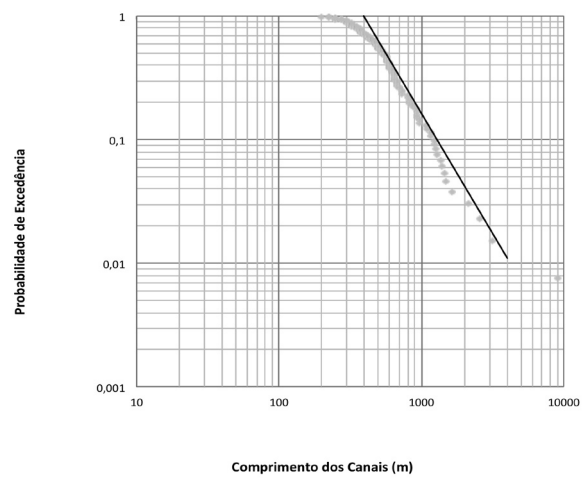


Fig. 3 – Dimensão fractal obtida pelo Método da Probabilidade da Excedência do Comprimento de Canais para a Bacia do Ribeirão Marmelo

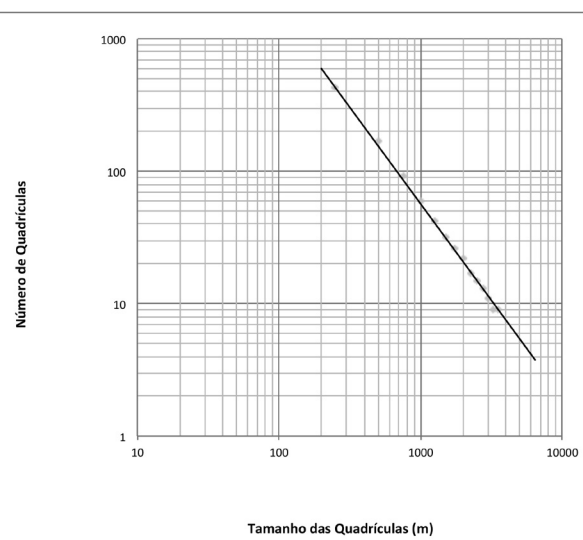


Fig. 4 – Dimensão fractal obtida pelo Método *Box-counting* para a Bacia do Ribeirão Marmelo

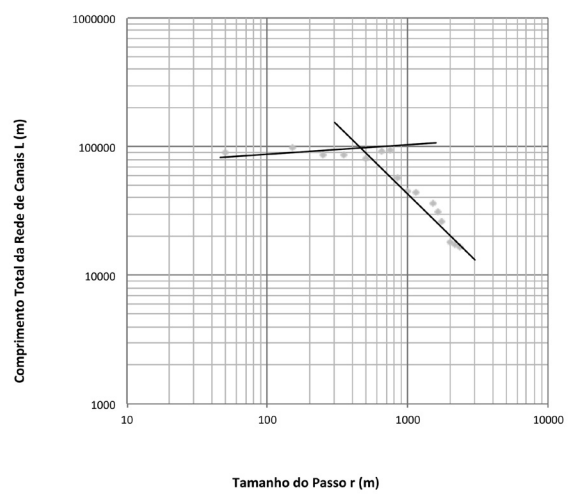


Fig. 5 – Dimensão fractal obtida pelo Método de Richardson para a Bacia do Ribeirão Marmelo

Analisando-se os valores de Df reunidos na Tab. I, pode-se observar que a dimensão fractal tende para faixa de valores entre 1,5 a 2, apresentando uma variação que pode ser justificada devido às características heterogêneas da bacia. E quando comparados com os valores encontrados por Tarboton e outros (1988), Gomes (1997), La Barbera e Rosso (1989) apud Gomes (1997), entre outros, nota-se que a rede de drenagem do Ribeirão Marmelo pode ser considerada como um objeto fractal.

Tab. I - Dimensão fractal para os diferentes métodos estudados.

Método	Dimensão Fractal
Razões de Horton	1,44
Probabilidade de Excedência do Comprimento de Canais	2,01
Método de <i>Box-Counting</i>	2,16
Método de Richardson	1,71

CONCLUSÃO

Os resultados obtidos demonstram que, independente do método aplicado, a bacia do Ribeirão Marmelo possui um padrão de ramificação que cobre toda a área de drenagem e confirmam o pressuposto de Tarboton e outros (1988), o qual afirma que a dimensão fractal igual a 2 indica que a rede de drenagem cobre todo o espaço. Além disso, pode-se notar uma ligação entre a dimensão fractal e as razões de Horton. Os resultados obtidos podem fornecer subsídios importantes para a hidrologia quantitativa.

AGRADECIMENTOS

As autoras agradecem a Pró-Reitoria de Pesquisa da UFJF, pela bolsa de iniciação científica concedida e ao Núcleo de Análise Geo-Ambiental do Departamento de Transporte da Faculdade de Engenharia da UFJF pelos mapas e informações fornecidos.

DETERMINATION OF FRACTAL DIMENSION OF RIVER NETWORKS: STUDY OF CASE

ABSTRACT

This present study analyzes different common methods which are used for calculating the fractal dimension in the watershed of the Marmelo Stream. Published by Mandelbrot (1977), the concept of fractals estimates the complexity, self-affinity and self-similarity of objects that do not fit the Euclidean classical geometry. The evaluation of geomorphological characteristics of watersheds, supported by fractal geometry and hydrology concepts, is an important factor in the knowledge of the hydrological behavior of river networks. The fractality study of the Marmelo Stream watershed was carried out by using the IBGE map and simple measuring instruments.

Four methods were used as mentioned: the Horton's Laws, the Geometric Stream Length Exceedence Probability Method, the *Box-Counting* Method and the Richardson's Method. The results were compared to the relevant literature values, concluding that river networks can be viewed as fractal objects.

Keywords: Fractal dimension. River networks. Watersheds

REFERÊNCIAS

ARAUJO, C. S.; MARQUES, L. S.; BORTONI, S. F.; SILVEIRA, V. A.; GOMES, M. H. R. “**Determinação da dimensão fractal de uma rede de drenagem brasileira.**” in Congresso Nacional Del Agua Chaco, Resistencia, Argentina, 2011.

GOMES, M. H. R. “**Análise Fractal de Redes de Canais de Bacias hidrográficas na Escala 1:50.000.**” 1997, 83f. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo/SP, 1997.

HIDROTEC. “Metodologias utilizadas no desenvolvimento do atlas digital das águas de minas” Disponível em: http://www.hidrotec.ufv.br/metodologia_resultados.html. Acesso em: 15 de janeiro de 2013.

MANDELBROT, B. B. “Fractals: Form, Chance and Dimension”, Freeman and Company. New York, 1977.

MARQUES, L. S.; BORTONI, S. F.; GOMES, M. H. R. “Análise da bacia hidrográfica do Ribeirão Marmelo sob o enfoque da geometria fractal”, in XI Simpósio de Recursos Hídricos do Nordeste, João Pessoa, Paraíba, 2012.

PREFEITURA MUNICIPAL DE JUIZ DE FORA “**Plano Diretor de Juiz de Fora. Diagnóstico**”, v.1. Instituto de Pesquisa e Planejamento da Prefeitura Municipal de Juiz de Fora, 1996.

SILVEIRA, N. F. Q. “**Análise fractal de bacias hidrográficas de região de encosta e região de planalto com base em cartas topográficas e em fotografias aéreas.**” 2006, 191p. Tese (Doutorado em Engenharia Ambiental) Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis/SC. 2006.

TARBOTON, D. G.; BRAS, R. L.; ITURBE, I. R. “The Fractal Nature of Networks”. **Water Resources Research**. v. 24, n. 8. p. 1317-1322, 1988.

TUCCI, C.E.M., “Hidrologia: Ciência e Aplicação” 3ª ed, ABRH, 2002.

VESTENA, L. R.; KOBAYAMA, M. “A geometria fractal da rede de drenagem da bacia hidrográfica do Caeté, Alfredo Wagner - SC.” **Revista Árvore**, Viçosa-MG, v.34, n.4, p.661 – 668, 2010.

VILLELA, S. M.; MATTOS, A. “Hidrologia Aplicada”. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 245p.1975.