SOBRE PENSAMENTO COMPUTACIONAL NA CONSTRUÇÃO DE UM TRIÂNGULO DE SIERPINSKI COM O GEOGEBRA

Lara Martins Barbosa[1]
Universidade Estadual Paulista – Unesp – Brasil.
lara-barbosa@hotmail.com

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva[2]
Universidade Estadual Paulista – Unesp – Brasil.
ricardo.scucuglia@unesp.br

[1] Mestranda do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (Unesp) – Campus de Rio Claro.

[2] Doutor em Educação e Professor do Departamento de Educação da Universidade Estadual Paulista (Unesp) – Campus de São José do Rio Preto.

RESUMO: As ideias apresentadas neste texto têm como cenário uma pesquisa em Educação Matemática cujo objetivo é investigar como estudantes de graduação em matemática exploram Geometria Fractal utilizando o software GeoGebra. Especificamente, são explorados aspectos concernentes ao Pensamento Computacional, os quais foram qualitativamente analisados em termos habilidades a partir da realização de sessões de experimento de ensino com uma dupla de estudantes. No presente caso, a construção dinâmica do Triângulo de Sierpinski e de um *GIF* que apresenta três iterações do fractal, a partir de uma atividade proposta, revelou as seguintes habilidades no processo de exploração dos estudantes: coleta, análise e representação de dados, abstração, criação de algoritmo e automatização, decomposição do problema, simulação e paralelização. Tais habilidades foram significativas para que estudantes compreendessem um algoritmo criado referente à construção que haviam realizado.

Palavras-chave: Fractais. GeoGebra. Pensamento Computacional.

ABSTRACT: The ideas presented in this text are based on a research in Mathematics Education, which aims to investigate how undergraduate students in mathematics explore Fractal Geometry using GeoGebra software. Specifically, aspects concerning Computational Thinking are explored, which were qualitatively analyzed in terms of skills from the development of teaching experiment sessions with a pair of students. In the present case, the dynamic construction of the Sierpinski Triangle and a GIF that presents three fractal iterations, from a proposed activity, revealed the following skills through students' exploration: data collection, analysis and representation, abstraction, algorithm creation and automation, decomposition of the problem, simulation and parallelization. These skills were relevant for students' understanding about a algorithm related to the construction they developed.

Keywords: Fractals. GeoGebra. Computational Thinking.

1 INTRODUÇÃO

O crescente interesse atual pela Geometria Fractal em vários campos da ciência, assim como a importância teórica da mesma, por ser uma linha não euclidiana de pensamento, mostra a necessidade de difundir os conceitos básicos desta Geometria entre estudantes do Ensino Superior (BARBOSA, 2005). Além da dimensão estética das figuras que a Geometria Fractal estuda e sua proximidade com objetos e fenômenos da natureza, pode-se afirmar que esta teoria constitui, atualmente, uma interessante alternativa de atuação em Educação Matemática (SINCLAIR et. al., 2016). Na Geometria Fractal, a interação com o computador é de suma importância, tendo em vista que muitos fractais são gerados a partir de funções iterativas ou por uma relação de recorrência (RABAY, 2013).

Considerando a atual fase das tecnologias digitais educacionais, o software GeoGebra pode ser considerado um dos maiores sucessos da Educação Matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014), sendo, inclusive, uma mídia relevante no ensino e aprendizagem de fractais (FARIA, 2012). Para Valente (2016), os computadores e softwares frequentemente têm sido utilizados nas escolas apenas como “ferramentas de escritório”, ou seja, usualmente, tem-se concebido o aluno meramente como um “usuário de maquinas”. Esse panorama tem intensificado um movimento de reflexão sobre como a tecnologia pode ser utilizada de modo que o aluno passe de usuário para alguém que pense, explore, construa e produza com computadores. Papert (1983), ao discutir questões sobre o software LOGO e a ideia de “construcionismo”, por exemplo, argumenta que alunos, ao buscarem aprender matemática com computadores utilizando programação, devem fomentar contextos nos quais se possa “pensar sobre o pensamento (matemático)”.

Neste artigo buscamos discutir aspectos referentes a habilidades do Pensamento Computacional (PC) em um cenário de construção de um fractal com o software GeoGebra. A atividade proposta e explorada neste estudo tem como origem uma pesquisa cujo objetivo é investigar aspectos do PC emergentes em um contexto no qual duplas de estudantes de graduação em Matemática investigam Geometria Fractal com o software GeoGebra. A pesquisa em questão é de cunho qualitativo, visto que nossa preocupação consiste no aprofundamento da compreensão de um grupo particular de alunos (BICUDO, 1993). Pretendemos, neste artigo, apresentar discussões evidenciadas acerca de habilidades do PC durante a realização de uma das atividades propostas a uma das duplas de alunos graduação participantes ao abordar a construção de um Triângulo de Sierpinski utilizando o GeoGebra.

2 PENSAMENTO COMPUTACIONAL

Wing (2006) apresentou o termo “Computational Thinking” traduzido como “Pensamento Computacional (PC)” que se baseia no poder e nos limites de processos de computação, quer eles sejam executados por um ser humano ou por uma máquina. De acordo com Wing (2008), o PC está relacionado a diversos tipos de pensamentos, pois

> [PC] é um tipo de pensamento analítico. Compartilha com o pensamento matemático, de maneira geral, meios pelos quais podemos abordar a solução de um problema. Ele compartilha com o pensamento em engenharia as maneiras gerais pelas quais podemos abordar um projeto e a avaliação de um sistema grande e complexo que opera dentro das restrições do mundo real. Compartilha com o pensamento científico as maneiras gerais pelas quais podemos abordar a compreensão da computabilidade, da inteligência, da mente e do comportamento humano (WING, 2008, p. 3717, tradução nossa).

Após o surgimento do termo, pesquisadores buscam compreender como a computação pode ser utilizada para possibilitar o desenvolvimento desse tipo de pensamento nos estudantes. Para Mannila et al (2014, p. 2, tradução nossa) PC “é um termo que abrange um conjunto de conceitos e processos de pensamento da ciência da computação que ajudam na formulação de problemas e suas soluções em diferentes campos[1]”. Na mesma direção Lu e Fletcher (2009) apresentam algumas ideias relacionadas ao PC:

> 1) é uma maneira de resolver problemas e projetar sistemas que se baseiam em conceitos fundamentais para a ciência da computação; 2) significa criar e fazer uso de diferentes níveis de abstração, para entender e resolver problemas de forma mais eficaz; 3) significa pensar algoritmicamente e com a capacidade de aplicar conceitos matemáticos para desenvolver soluções mais eficientes, justas e seguras; 4) significa entender as consequências da escala, não só por razões de eficiência, mas também por razões econômicas e sociais (LU; FLETCHER, 2009, p. 1, tradução nossa).

Apesar dessas compreensões acerca do PC, não há entre os pesquisadores da área uma definição consensual. Ainda assim, eles têm caminhado em direção a entender a especificidade desse pensamento e como este pode ser incorporado no currículo das escolas. Ainda que muito tímida, a literatura sobre o PC mostra que assim como a leitura ou escrita, suas habilidades são fundamentais para todo ser humano, seja ele da área de computação ou não. Sua inserção na escola ainda requer muitos esforços como a formação de professores para desenvolver uma prática em sua disciplina ou de modo interdisciplinar que caminhe nessa direção.

---

[1] CT is a term encompassing a set of concepts and thought processes from CS that aid in formulating problems and their solutions in different fields.

Valente (2016) discute que uma tentativa de identificar conceitos e operacionalizar o PC foi realizada por duas organizações, a *International Society for Technology in Education* (ISTE) e a *American Computer Science Teachers Association* (CSTA). Tais organizações alegam que o PC inclui, mas não se limita, a características de formulação de problemas; organização e análise de dados; representação de dados; automação de soluções; identificação, análise e implementação de soluções; e a generalização do processo de resolução. (ISTE/CSTA, 2011). Trabalhando junto com pesquisadores da Ciência da Computação e das áreas de Humanas, elas apresentaram uma definição para o PC que pudesse nortear as atividades realizadas na Educação Básica, identificando nove conceitos: coleta de dados, análise de dados, representação de dados, decomposição de problema, abstração, algoritmos e procedimentos, automação, simulação e paralelização.

Segundo ISTE/CSTA (2011, p. 8-9) esses conceitos podem ser descritos como:

- **Coleta de Dados:** "Processo de coleta de informações apropriadas";
- **Análise de Dados:** "Encontrar sentido para os dados, buscando padrões e tirando conclusões";
- **Representação de Dados:** "Retratar e organizar dados em gráficos, palavras ou imagens apropriadas";
- **Decomposição do Problema:** "Dividir o problema em partes menores e gerenciáveis";
- **Abstração:** "Reduzir a complexidade para definir a ideia principal";
- **Algoritmos e Procedimentos:** "Série de etapas ordenadas tomadas para resolver um problema ou atingir algum objetivo";
- **Automação:** "Utilizar computadores ou máquinas que realizam tarefas repetitivas ou tediosas";
- **Simulação:** "Representar ou modelar um processo. A simulação também envolve a execução de experimentos usando modelos";
- **Paralelização:** "Organizar recursos para executar simultaneamente tarefas para alcançar um objetivo comum".

Considerando esses mesmos aspectos do PC, Barr e Stephenson (2011) descrevem exemplos de como tais conceitos podem ser incorporados em disciplinas no campo da Ciência da Computação, Matemática, Ciências Naturais, Sociologia e Artes. O Quadro 1 apresenta aspectos que podem ser caracterizados no currículo de Matemática e de Ciência da Computação.

Quadro 1 - Caracterizando os Conceitos/Habilidades na Matemática e na Ciência da Computação

Habilidade	Situação Matemática	Situação Computacional
Coleta de Dados	Encontrar uma fonte de dados para um determinado problema, por exemplo, lançando moedas ou jogando dados.	Encontrar uma fonte de dados para um determinado problema.
Análise de Dados	Contar as ocorrências dos lançamentos de moedas e analisar os resultados. (Estatística).	Criar um programa para fazer cálculos estatísticos básicos a partir de um conjunto de dados.
Representação de Dados	Utilizar histogramas; gráfico de pizza; gráfico de barras para representar os dados. Utilizar conjuntos, listas, gráficos, etc. para representar os dados coletados.	Utilizar estruturas de dados como matriz, lista vinculada, vetores, gráfico, tabelas, etc.
Decomposição do Problema	Aplicar corretamente a ordem de operações em uma expressão.	Definir objetos e métodos; definir funções.
Abstração	Utilizar variáveis em álgebra; interpretar e identificar fatos essenciais em um problema; estudar funções em álgebra e comparar com funções em programação. Utilizar a iteração para resolver problemas.	Utilizar procedimentos para unir um conjunto de comandos frequentemente repetidos que executam uma função; usar condicionais, loops, recursão, etc.
Algoritmos e Procedimentos	Realizar operações de divisão, fatoração, adição ou subtração.	Estudar algoritmos clássicos; implementar um algoritmo para um determinado problema.
Automação	Utilizar ferramentas computacionais como The Geometer's Sketchpad, StarLogo e bloco de códigos utilizando o Python.	Envolve a mecanização das soluções (ou de suas partes), permitindo que máquinas nos ajudem a solucionar os problemas (RIBEIRO; FOSS; CAVALEIRO, 2017, p. 7).
Simulação	Representar graficamente uma função em um plano cartesiano e modificar os valores das variáveis.	Animação de algoritmo, varredura de parâmetro.
Paralelização	Resolver sistemas lineares e multiplicação de matrizes.	Utilizar Thread[2], pipelining[3], dividindo dados ou tarefas de maneira a serem processados em paralelo.

Fonte: Quadro elaborado pelo autor, 2018.

[2] Programas que trabalham como um subsistema.

[3] Segmentação de instruções.

A investigação conduzida nesta pesquisa consiste fundamentalmente em identificar e discutir indícios acerca da presença dessas nove habilidades na exploração da atividade proposta durante uma das sessões do experimento de ensino com uma das duplas participantes. Especificamente, discutiremos aspectos referentes a exploração da primeira atividade proposta e explorada pela dupla de estudantes de graduação em matemática. Antes, consideramos pertinente apresentar alguns esclarecimentos do ponto de vista metodológico.

3 METODOLOGIA DE PESQUISA QUALITATIVA

Como afirmam Bogdan e Biklen (1994, p. 209), os estudos de natureza qualitativa "devem revelar maior preocupação pelo processo e significado e não pelas suas causas e efeitos". Levando-se em consideração tal perspectiva, destacamos que o objetivo da presente pesquisa está centrado em identificar e analisar habilidades do PC que emergiram durante a exploração de atividades que propõe a construção de fractais utilizando o software GeoGebra, conduzido por alunos de graduação em Matemática. Ao todo foram elaboradas e exploradas 4 atividades matemáticas, aos quais foram exploradas por 3 duplas de estudantes de graduação em Matemática. Cada atividade foi investigada cada dupla em uma sessão de aproximadamente 2 horas de duração. Portanto, nesta pesquisa, foram realizadas 12 sessões de experimentos de ensino, totalizando 24 horas de registros em vídeos.

Por uma opção metodológica (MARSHAL, 1996), neste artigo, discutimos apenas registros referentes a segunda parte da primeira atividade com uma das duplas participantes da pesquisa. Os alunos, aqui referidos como Blenda e Gabriel, exploraram a atividade sob a mediação de um dos autores desse artigo, a qual atuou como professora-pesquisadora. O principal objetivo da primeira atividade elaborada foi a construção do Triângulo de Sierpinski utilizando o software Geogebra. Dessa maneira, conseguimos discutir algumas respostas satisfatórias para a pergunta diretriz desta pesquisa: Que habilidades em termos de PC emergem quando alunos de graduação em Matemática exploram Geometria Fractal com o software GeoGebra?

Durante o estudo, os principais procedimentos para produção de dados foram a realização e registros audiovisuais das sessões de experimento de ensino, anotações dos pesquisadores (diário de campo) e registro escrito dos estudantes em suas "folhas de atividades". Nesse cenário,

> Um experimento de ensino envolve uma sequência de sessões de ensino (....). Uma sessão de ensino inclui um agente de ensino, um ou mais alunos, uma testemunha das sessões de ensino e um método de gravação do que acontece durante a sessão. Esses registros, se disponíveis, podem ser usados na preparação de sessões subsequentes, bem como na reali-

> zação de uma análise conceitual retrospectiva do experimento de ensino. Estes elementos são pertinentes para todos os experimentos de ensino (Steffe; Thompson, 2000, p. 273, tradução nossa).

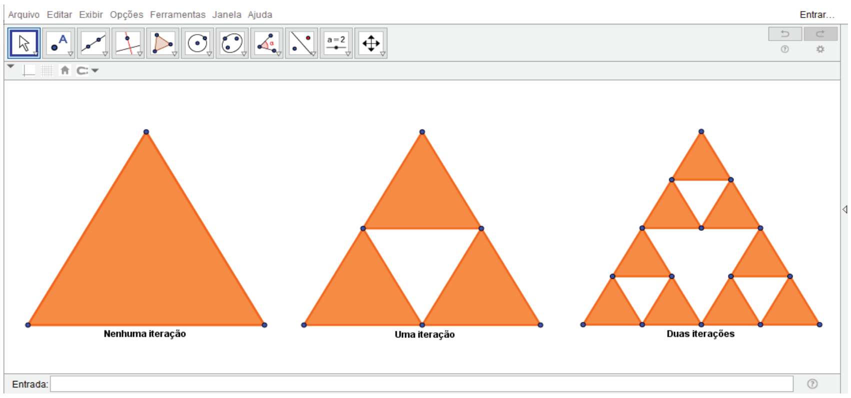
Especificamente com relação aos registros audiovisuais durante os experimentos, destaca-se que as sessões foram filmadas e as telas dos computadores foram captadas com o software *FlashBack* (gravador de desktop). Tais registros foram analisados com base no modelo analítico proposto por Powell, Francisco e Maher (2004).

Os participantes desta pesquisa foram seis discentes da disciplina de Geometria da graduação em Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus Rio Claro, os quais trabalharam em duplas durantes as sessões de experimentos de ensino. Essa disciplina foi ofertada no segundo semestre do curso em 2017. Os estudantes foram separados em três duplas e realizaram as atividades em momentos distintos, de modo a proporcionar um melhor acompanhamento dos mesmos. Ao final da atividade, foram realizadas algumas perguntas com intuito de saber o porquê da escolha de um determinado método para a construção proposta. Cada uma das três duplas participou de quatro sessões de ensino de aproximadamente duas horas cada. Vale ressaltar que neste artigo optamos em analisar apenas os eventos referentes a uma dupla em uma das sessões.

A atividade elaborada e explorada neste estudo, intitulada *Atividade 1 - Triângulo de Sierpinski*, objetivou compreender a definição e propriedades do fractal criado pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski. O *design* dessa atividade foi elaborado de modo que os alunos pudessem responder perguntas que os ajudariam no entendimento das características do fractal e a partir disso realizassem sua construção com o software GeoGebra. Vale salientar que os estudantes já tinham um conhecimento prévio do uso do GeoGebra e já haviam participado de uma aula/oficina cujo tema foi Geometria Fractal e a construção da Árvore Pitagórica, ministrado por autores deste artigo, para todos os alunos da disciplina de Geometria do curso de Matemática da Unesp, campus Rio Claro.

A primeira parte da atividade consistia em responder as seguintes perguntas (Quadro 1) a partir de uma construção (Figura 1) apresentada no GeoGebra:

Figura 1 – Iterações do Triângulo de Sierpinski



Fonte: Dados da pesquisa, 2018.

Quadro 1 - Primeira parte da Atividade 1: Triângulo de Sierpinski

1. Complete a tabela abaixo considerando apenas os triângulos laranjas em suas respostas.

Número de Iterações	Quantidade de triângulos	Comprimento* do lado	Perímetro de cada triângulo	Perímetro Total
0				
1				
2				

*Use a ferramenta  para auxiliar sua medição

2. Qual a quantidade de triângulos (laranjas) que terá na quarta iteração? Qual será o comprimento de seu lado? E o perímetro total da figura? Justifique.
3. Encontre o termo geral que permite calcular a quantidade de triângulos (laranjas) para a enésima iteração do Triângulo de Sierpinski.
4. Encontre o termo geral que permite calcular o comprimento do lado dos triângulos (laranjas) para a enésima iteração do Triângulo de Sierpinski.
5. Encontre o termo geral que permite calcular o perímetro de cada triângulo (laranja) para a enésima iteração do Triângulo de Sierpinski.
6. Encontre o termo geral que permite calcular o perímetro total para a enésima iteração do Triângulo de Sierpinski. Esse perímetro tende a qual valor? Justifique.
7. Complete a tabela abaixo considerando apenas os triângulos laranjas em suas respostas.

Número de Iterações	Quantidade de triângulos	Área* de cada triângulo	Área Total
0			
1			
2			

*Use a ferramenta  para auxiliar sua medição

8. Encontre o termo geral que permite calcular a área de cada triângulo (laranja) para a enésima iteração do Triângulo de Sierpinski.
9. Encontre o termo geral que permite calcular a área total para a enésima iteração do Triângulo de Sierpinski. Essa área tende a qual valor?
10. Já vimos que uma definição de Dimensão é dada pela Dimensão de Capacidade, calculada da seguinte forma:

$$D = -\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon}$$

Fonte: Quadro elaborado pelos autores, 2018.

Sendo $N(\epsilon)$ o número de figuras na enésima iteração e ϵ o fator de redução do lado da figura na enésima etapa. Calcule a dimensão do Triângulo de Sierpinski. Use o GeoGebra para o cálculo e comente o resultado.

Já a segunda parte da atividade solicitava aos alunos que construíssem o fractal, elaborassem um *GIF*[4] e respondessem duas perguntas referentes a construção.

Quadro 2 - Segunda parte da Atividade 1

<u>Agora é com vocês!</u> Utilize as ferramentas do GeoGebra e construa o Triângulo de Sierpinski com o máximo de iterações que conseguir. Faça um GIF da construção. 1. Quais conceitos matemáticos foram importantes na obtenção do fractal? Justifique. 2. Quais conceitos matemáticos podem ser explorados durante a construção do fractal? Justifique.

Fonte: Quadro elaborado pelos autores, 2018.

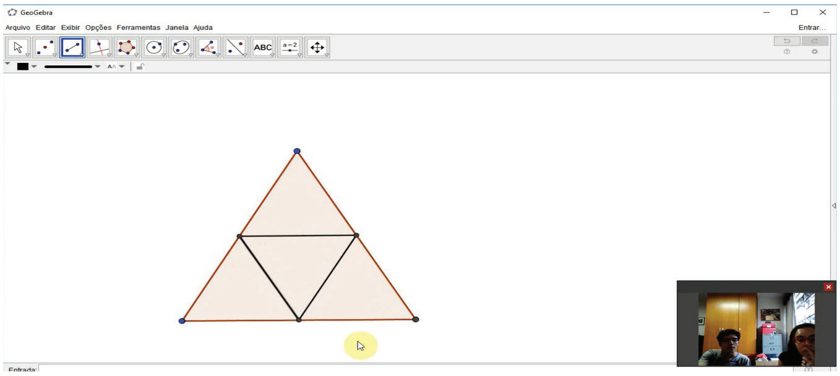
Na próxima seção apresentamos discussões que surgiram durante a construção do fractal na sessão de experimento de ensino conduzida pela dupla Blenda e Gabriel, de modo a identificar habilidades do PC e compreender aspectos que os caracterizam nesse cenário.

4 ANÁLISE DE DADOS

Primeiramente, consideramos importante destacar que os alunos estavam "livres" para utilizar/criar qualquer ferramenta no software, ou seja, a dupla poderia utilizar outros recursos além daqueles sugeridos direta ou indiretamente no enunciado da atividade proposta. Assim, inicialmente, Blenda e Gabriel iniciaram sua construção a partir de um triângulo equilátero utilizando a ferramenta *polígono regular*, posteriormente construíram o ponto médio de cada segmento utilizando a ferramenta *ponto médio ou centro* e então traçaram os segmentos que uniram os três pontos. A figura 2 apresenta a construção inicial da dupla.

[4] A sigla GIF significa Graphics Interchange Format (Formato de Mudança de Gráficos) é "[...] um formato de arquivo de imagens digitais, que podem ser utilizadas com várias cenas em um único arquivo" (MOTTA-ROTH et al., 2000, p. 39) fazendo com que as imagens se movimentem, em um tipo de animação.

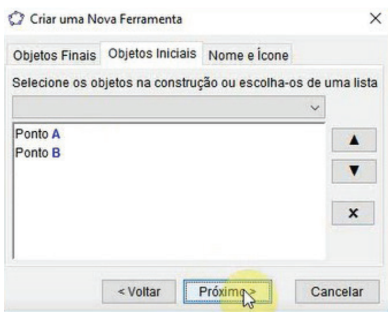
Figura 2 – Construção inicial, Blenda e Gabriel



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

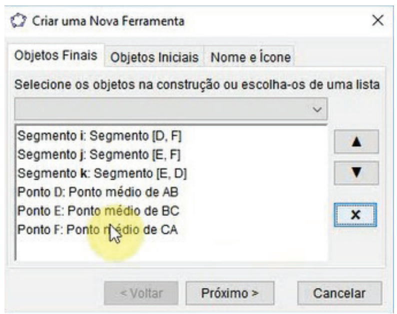
A dupla não apresentou dificuldades em iniciar a construção, acreditamos que isso se deva pelo fato de já conhecer o software e ter compreendido como se dá a construção do fractal, o que faz emergir três conceitos/habilidades do PC, coleta, análise e representação de dados. A partir dessa construção criaram uma "Nova Ferramenta" no software, com o objetivo de replicar toda a construção já realizada, de modo iterativo e rápido, abstraindo o problema, criando um algoritmo e automatizando a construção, outras três habilidades presentes no PC. Para facilitar a escolha dos objetos da ferramenta, Gabriel solicitou a exibição dos rótulos. A dupla refletiu por um tempo quais seriam os Objetos Finais e Objetos Iniciais e então optaram pelo que é apresentado na Figura 3 e na Figura 4.

Figura 3 – Objetos Iniciais da Ferramenta



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Figura 4 – Objetos Finais da Ferramenta



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Seguem trechos do diálogo durante a criação da ferramenta:

> **Gabriel:** Os objetos iniciais vão ser o A e o B. O polígono não (já se referindo aos objetos finais), os segmentos...

Nesse momento Gabriel retirou os segmentos g, h e f, que são os segmentos do primeiro triângulo criado, deixando apenas os segmentos criados a partir do ponto médio.

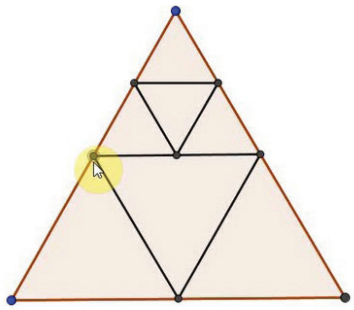
> **Blenda:** Você vai deixar só esses segmentos que a gente criou, né?!
> **Gabriel:** Isso, só os pretos.

Após a decisão sobre os segmentos buscaram explorar quais pontos deverão fazer parte dos objetos finais. Nesse momento eles fizeram uma Decomposição do Problema, analisando primeiramente os segmentos e posteriormente os pontos.

> **Gabriel:** Então a gente precisa do D, do F e do E, né?!
> **Blenda** (confirma com um movimento positivo e em seguida argumenta)**:** Mas o C precisa também, porque ele está na base do polígono.
> **Gabriel:** É que se eu colocar para ele criar um C, quando eu selecionar o A e o D ele vai criar um C que vai sobrepor o F, então não tem necessidade.
> **Blenda:** Hummmm, entendi, entendi! Faz sentido.
> **Gabriel:** Aah, então é só isso, o D, E, F e os três segmentos.

Eles então concluíram a construção da ferramenta e a nomeiam de *Triângulo*. A ferramenta é então testada e apresenta o resultado que esperavam, o que faz presente a *Simulação*. Porém, Gabriel retomou toda a construção da ferramenta, mas dessa vez sem exibir o rótulo dos objetos, como já sabiam quais objetos escolher a criação da ferramenta *TriânguloSemRótulo* foi rápida e o resultado de sua primeira aplicação pode ser vista na Figura 5.

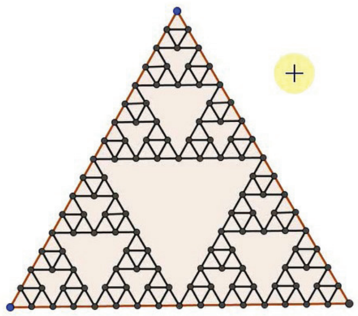
Figura 5 – Primeira Aplicação da Ferramenta TriânguloSemRótulo



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

A Figura 6 apresenta todas as aplicações que a dupla fez com a ferramenta.

Figura 6 – Após última aplicação da Ferramenta TriânguloSemRótulo



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Após a última aplicação da ferramenta, a dupla respondeu as questões dissertativas sobre a construção e então houve uma intervenção determinante dos pesquisadores. Seguem trechos:

Pesquisadora: Dessa construção que vocês fizeram, vocês conseguiriam fazer um GIF do fractal?

Gabriel: Eu acho que sim.

Blenda: Mas não tem o...(acena com a mão indicando o controle deslizante).

Gabriel: Controle deslizante.

Blenda: Controle deslizante.

Gabriel: A gente cria um controle deslizante e chama de "Iteração".

Blenda: Mas como a gente vai fazer para começar a ir e a voltar?

Gabriel: Vai ser inteiro, vai ser do zero até o... (Nesse momento Gabriel altera o intervalo do controle deslizante para números inteiros de 0 a 4).

Blenda: Ai a gente tem que fazer aquele negócio, de aparecer tal coisa se (Blenda se refere a condição para exibir um objeto).

Eles então refletiram e analisaram sobre as condições para cada objeto ser exibido e percebem que existem muitos segmentos a serem analisados. Uma intervenção foi feita pela pesquisadora, com o objetivo de esclarecer conceitualmente a construção desenvolvida até o momento por meio de *decomposição* do problema:

Pesquisadora: Quantos polígonos tem na construção de vocês?

Gabriel: Ahnnnn, você fala triângulos?

Pesquisadora: Sim.

Blenda: A gente fez quatro iterações?

Gabriel: É, a gente está com 81.

Pesquisadora: Quantos tem no GeoGebra de vocês?

Gabriel: Como assim?

Blenda: Quantos segmentos?

Pesquisadora: Quantos polígonos? Vocês disseram que deveria ter 81.

Gabriel: É!

Pesquisadora: No GeoGebra de vocês, onde está escrito polígono ou triângulo, tem quantos?

Blenda: Um.

Gabriel: Polígono, na real, só tem um.

Pesquisadora: Por quê?

Blenda: Porque a gente fez pelo segmento.

Gabriel: Porque a gente montou só com segmentos e não montou com um polígono dentro...

Blenda: ...do polígono.

Pesquisadora: E o Triângulo de Sierpinski são apenas segmentos ou polígonos?

Gabriel: É... polígono. (risos)

Blenda: Droga! A gente tinha que ter montado um polígono dos pontos médios.

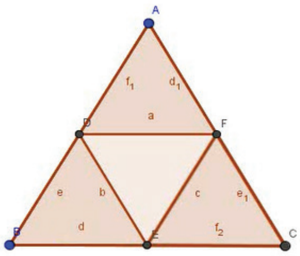
Gabriel: É porque iria ficar um em cima do outro. É, tá bom, então vamos começar de novo, vamos lá!

Blenda: risos.

Gabriel: Agora vamos fazer direito! (risos).

Em seguida, a dupla de estudantes apagou toda a construção deixando apenas o controle deslizante já criado. O início da nova construção foi o mesmo, criando o polígono regular de três lados e os pontos médios dos lados. Utilizando os pontos médios criam três novos polígonos (Figura 7).

Figura 7 – Início da Nova Construção



Fonte: Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Antes de criarem a ferramenta retiram os rótulos de todos os objetos. Nos Objetos Finais a dupla retirou apenas o Polígono 1 (triângulo inicial) e o ponto C, já nos Objetos Iniciais os pontos A e B foram mantidos, assim como na construção anterior. A ferramenta foi criada com o nome de Triângulo Polígono. Antes de aplicar a ferramenta, até concluir a terceira iteração (quantidade escolhida pela dupla), Gabriel argumenta:

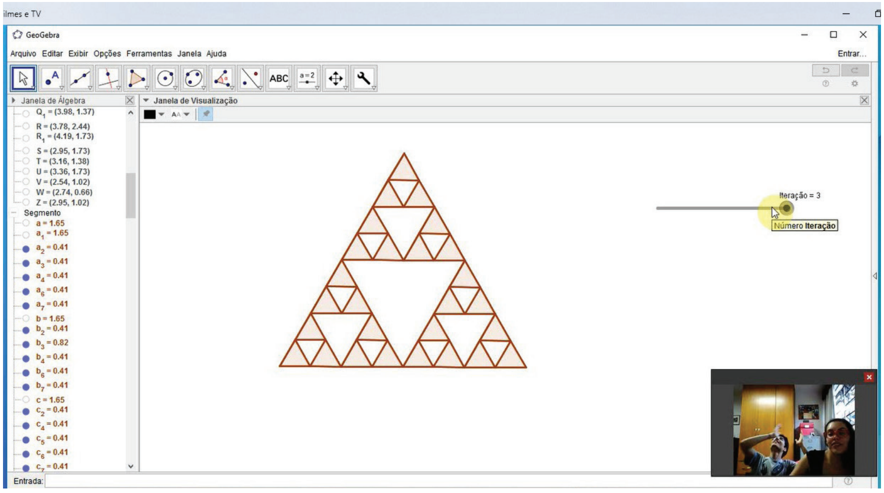
> **Gabriel**: Antes de começar a fazer muito, já vamos ver o que a gente vai exibir.
> **Blenda:** Ah, pra já ir arrumando...

Acontece então a *Paralelização* em que, ao mesmo tempo que a dupla aplicou a ferramenta, eles já programam as condições de exibição das iterações. Gabriel abriu as propriedades do Triângulo inicial "pol1" e altera sua condição de exibição, agora o triângulo só será exibido quando o controle deslizante "Iteração" for igual a zero. Eles aplicaram as demais condições nos outros polígonos, mas não se atentam que essas condições também devem ser programadas para os lados de cada polígono. Só perceberam que isso deve ser feito quando manipularam o controle deslizante e os segmentos ainda permanecem.

> **Blenda:** Arrumou os polígonos né? Agora tem que arrumar os segmentos.

Eles então utilizaram a janela de álgebra para auxiliar na busca pelos segmentos que devem receber as respectivas condições a cada iteração. A busca pelos segmentos foi trabalhosa, devido aos objetos dependentes que não aparecem na janela de álgebra, aparecem apenas no momento em que se abre a janela "Propriedades". Blenda e Gabriel aplicaram a ferramenta até obterem a terceira iteração do Triângulo de Sierpinski, que pode ser vista na Figura 8.

Figura 8 – Terceira Iteração da Nova Construção



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Algumas expressões de satisfação durante a construção puderam ser notadas no trecho transcrito a seguir, o qual revela aspectos sobre a produção de significados da dupla:

> **Blenda:** Aaah, fica tão bonitinho!
>
> **Gabriel:** Olha que lindinho!
>
> **Gabriel:** Agora foi? Agora foooi!
>
> **Blenda:** Ooo, graças!

Nesse momento se reforça a compreensão da construção do fractal e ainda faz com que possamos refletir sobre a importância de uma abordagem computacional quando se constrói fractais. O arquivo .ggb[5] da construção de Blenda e Gabriel pode ser acessado através do QRCode abaixo (Figura 9) ou através do link[6], assim como o *GIF* gerado pela dupla.

Figura 9 - QRCode que dá acesso ao arquivo .ggb e ao GIF, criados por Blenda e Gabriel na primeira atividade.

Fonte: Acervo dos autores, 2018.

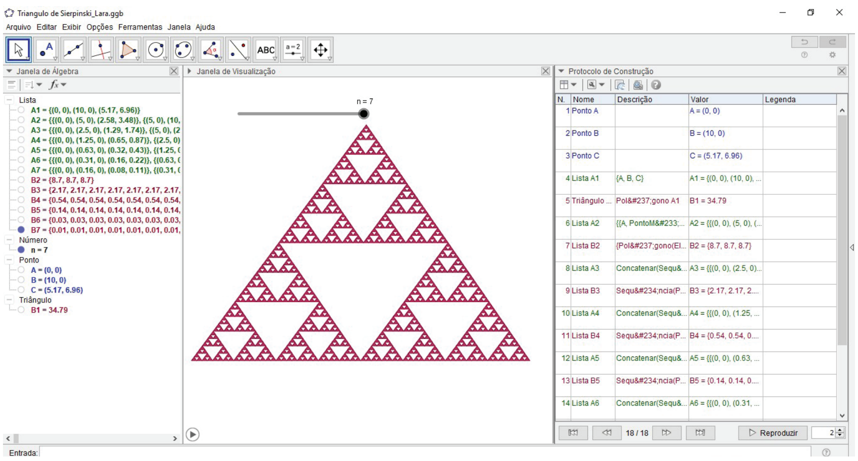
Na seção posterior foi apresentado a dupla o código de uma construção do Triângulo de Sierpinski realizada por um dos autores deste artigo. A programação realizada no GeoGebra faz com que o Triângulo de Sierpinski seja construído a partir de uma lista de comandos programados no campo de “Entrada”

[5] Os arquivos criados no software GeoGebra são salvos no formato .ggb, em que só é permitido abrir as construções no referido software.

[6] https://goo.gl/GMXaUE

do software. Inicialmente são construídos os pontos A, B e C, sendo posteriormente agrupados em uma lista. A partir dessa lista, um polígono é criado, dando origem ao triângulo inicial da construção. Os próximos passos da programação são baseados na construção de listas, nomeadas como A_ e B_, que seguem dois tipos de padrões, caracterizando a *Representação dos Dados* e a *Abstração*, defendidas por Barr e Stephenson (2011) como a utilização de listas e procedimentos que unem um conjunto de comandos frequentemente repetidos que executam uma determinada função. As listas nomeadas de A1, A2, ..., A7 foram construídas com o intuito de criar os pontos necessários para a construção dos polígonos em cada iteração do fractal. Note que tais lista não geram nenhuma construção geométrica no software. Já as listas nomeadas de B2, B3, ..., B7 foram criadas com o intuito de construir os polígonos pertencentes a cada iteração do fractal. As listas seguem um *Algoritmo* uma vez que segue uma série de etapas ordenadas tomadas para atingir um objetivo (ISTE/CSTA, 2011). A 16ª linha da programação mostra a construção do "Número n", que representa o controle deslizante criado para variar entre 1 e 7, número de iterações do Triângulo de Sierpinski contruído. Assim, a *Simulação* é caracterizada, uma vez que se condição a exibição das listas "B_" de acordo com a iteração que se deseja mostrar. Tal construção pode ser vista na Figura 10 e seu protocolo de construção no Quadro 2.

Figura 10 – Construção do Triangulo de Sierpinski realizada pela pesquisadora.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Quadro 2 - Protocolo de Construção do Triângulo de Sierpinski programado pela pesquisadora no GeoGebra

N.	Nome	Descrição
1	Ponto A	
2	Ponto B	
3	Ponto C	
4	Lista A1	{A, B, C}
5	Triângulo B1	Polígono A1
6	Lista A2	{{A, PontoMédio(A, B), PontoMédio(A, C)}, {PontoMédio(A, B), B, PontoMédio(B, C)}, {PontoMédio(A, C), PontoMédio(B, C), C}}
7	Lista B2	{Polígono(Elemento(A2, 1)), Polígono(Elemento(A2, 2)), Polígono(Elemento(A2, 3))}
8	Lista A3	Concatenar(Sequência({{Elemento(Elemento(A2, i), 1), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 1), Elemento(Elemento(A2, i), 2)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 1), Elemento(Elemento(A2, i), 3))}, {Elemento(Elemento(A2, i), 2), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 2), Elemento(Elemento(A2, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 2), Elemento(Elemento(A2, i), 3))}, {Elemento(Elemento(A2, i), 3), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 3), Elemento(Elemento(A2, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A2, i), 3), Elemento(Elemento(A2, i), 2))}}, i, 1, Comprimento(A2)))
9	Lista B3	Sequência(Polígono(Elemento(A3, i)), i, 1, Comprimento(A3))
10	Lista A4	Concatenar(Sequência({{Elemento(Elemento(A3, i), 1), PontoMédio(Elemento(Elemento(A3, i), 1), Elemento(Elemento(A3, i), 2)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A3, i), 1), Elemento(Elemento(A3, i), 3))}, {Elemento(Elemento(A3, i), 2), PontoMédio(Elemento(Elemento(A3, i), 2), Elemento(Elemento(A3, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A3, i), 2), Elemento(Elemento(A3, i), 3))}, {Elemento(Elemento(A3, i), 3), PontoMédio(Elemento(Elemento(A3, i), 3), Elemento(Elemento(A3, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A3, i), 3), Elemento(Elemento(A3, i), 2))}}, i, 1, Comprimento(A3)))
11	Lista B4	Sequência(Polígono(Elemento(A4, i)), i, 1, Comprimento(A4))

Quadro 2 - Protocolo de Construção do Triângulo de Sierpinski programado pela pesquisadora no GeoGebra

N.	Nome	Descrição
12	Lista A5	Concatenar(Sequência({{Elemento(Elemento(A4, i), 1), PontoMédio(Elemento(Elemento(A4, i), 1), Elemento(Elemento(A4, i), 2)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A4, i), 1), Elemento(Elemento(A4, i), 3))}, {Elemento(Elemento(A4, i), 2), PontoMédio(Elemento(Elemento(A4, i), 2), Elemento(Elemento(A4, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A4, i), 2), Elemento(Elemento(A4, i), 3))}, {Elemento(Elemento(A4, i), 3), PontoMédio(Elemento(Elemento(A4, i), 3), Elemento(Elemento(A4, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A4, i), 3), Elemento(Elemento(A4, i), 2))}}, i, 1, Comprimento(A4)))
13	Lista B5	Sequência(Polígono(Elemento(A5, i)), i, 1, Comprimento(A5))
14	Lista A6	Concatenar(Sequência({{Elemento(Elemento(A5, i), 1), PontoMédio(Elemento(Elemento(A5, i), 1), Elemento(Elemento(A5, i), 2)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A5, i), 1), Elemento(Elemento(A5, i), 3))}, {Elemento(Elemento(A5, i), 2), PontoMédio(Elemento(Elemento(A5, i), 2), Elemento(Elemento(A5, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A5, i), 2), Elemento(Elemento(A5, i), 3))}, {Elemento(Elemento(A5, i), 3), PontoMédio(Elemento(Elemento(A5, i), 3), Elemento(Elemento(A5, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A5, i), 3), Elemento(Elemento(A5, i), 2))}}, i, 1, Comprimento(A5)))
15	Lista B6	Sequência(Polígono(Elemento(A6, i)), i, 1, Comprimento(A6))
16	Número n	
17	Lista A7	Concatenar(Sequência({{Elemento(Elemento(A6, i), 1), PontoMédio(Elemento(Elemento(A6, i), 1), Elemento(Elemento(A6, i), 2)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A6, i), 1), Elemento(Elemento(A6, i), 3))}, {Elemento(Elemento(A6, i), 2), PontoMédio(Elemento(Elemento(A6, i), 2), Elemento(Elemento(A6, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A6, i), 2), Elemento(Elemento(A6, i), 3))}, {Elemento(Elemento(A6, i), 3), PontoMédio(Elemento(Elemento(A6, i), 3), Elemento(Elemento(A6, i), 1)), PontoMédio(Elemento(Elemento(A6, i), 3), Elemento(Elemento(A6, i), 2))}}, i, 1, Comprimento(A6)))
18	Lista B7	Sequência(Polígono(Elemento(A7, i)), i, 1, Comprimento(A7))

Fonte: Acervo dos autores, 2018.

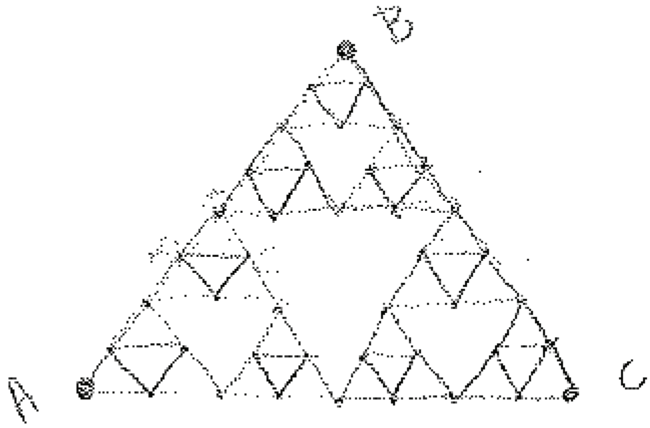
O protocolo acima foi apresentado com o intuito de mostrar a dupla uma alternativa algébrica-computacional de construir o fractal no software GeoGebra, uma vez que a dupla optou por construir de forma geométrica através das ferramentas do software. Foi solicitada a dupla a interpretação do protocolo, a qual é descrita no diálogo a seguir:

> **Pesquisadora:** Eu gostaria que vocês tentassem entender o que eu fiz. Qual foi a primeira coisa que eu fiz?
> **Blenda:** Você fez três pontos.
> **Pesquisadora:** E qual foi a diferença do que vocês fizeram?
> **Gabriel:** Nós já fizemos o triângulo.
> **Pesquisadora:** Então eu criei os pontos e depois o triângulo?
> **Gabriel:** Foi, foi isso.
> **Pesquisadora:** Só que, antes de criar os pontos e os triângulos eu fiz uma coisa que eu chamei de lista. Imaginem uma lista com três pontos. E depois disso eu fiz o que?
> **Blenda:** Você criou o triângulo.
> **Pesquisadora:** E esse triângulo foi construído a partir do que?
> **Blenda:** Da lista.
> **Pesquisadora:** E depois?
> **Gabriel:** Você fez uma outra lista entre os pontos que você já tinha e os pontos médios.
> **Pesquisadora:** E depois?
> **Blenda:** Você fez uma outra lista.
> **Gabriel:** Você fez uma lista a partir da lista anterior.
> **Pesquisadora:** O que eu fiz na lista B2?
> **Gabriel:** Na lista B2 você construiu os polígonos, porque na lista anterior você criou apenas os pontos.
> **Pesquisadora:** Então, como vocês interpretam esse código que está escrito na linha sete? Quantas partes tem a lista A2?
> **Gabriel:** Ah, entendi, esse 1 representa a primeira parte da lista A2. Que são o ponto A, o ponto médio entre A e B, e o ponto médio entre A e C.
> **Pesquisadora:** E depois?
> **Blenda:** Depois você segue para as outras posições, a segunda posição e a terceira posição.
> **Pesquisadora:** E no passo oito, vocês sabem o que significa concatenar?
> **Blenda:** Não.
> **Gabriel:** Eu sei, significa juntar.
> **Pesquisadora:** Isso, e o que esse i da lista A3 significa?
> **Gabriel:** No caso, eles vão ser os índices. Nesse caso, vão ser os elementos da posição um, dois, e três da lista anterior.

O diálogo apresentado acima nos ajuda a compreender como a interação entre a programação com o software GeoGebra e a construção de fractais contribuem para o desenvolvimento do PC. Inicialmente, através da *Análise dos Dados* é notada a diferença em sua *Representação*, uma vez que o polígono não é criado de imediato. A *Simulação* também se destaca nesta situação, visto que a animação do algoritmo contribui para a conclusão de que cada tipo de lista está programada de uma forma, ou seja, listas A_ criam pontos (sem representá-los) e listas B_ criam os polígonos a partir dos pontos criados anteriormente. Além de explorar as habilidades individuais do PC, apresentar um código pronto aos estudantes pode contribuir para futuras soluções de problemas, afim de criar um processo de resolução mais eficiente e efetivo (ISTE/CSTA, 2011).

Posteriormente, foi solicitado a dupla que representassem através de um desenho o que o código estava fazendo. A representação pode ser vista na Figura 11.

FIGURA 11 – REPRESENTAÇÃO ACERCA DA INTERPRETAÇÃO DO CÓDIGO



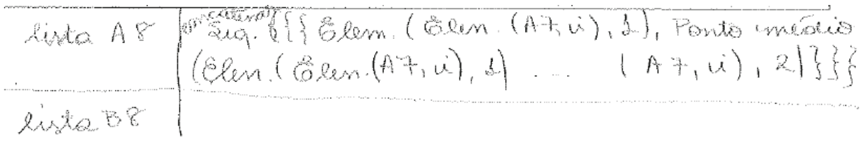
Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Blenda ainda conclui o seguinte:

> **Blenda:** Primeiro ele criou três pontos. Aí fez uma lista com esses três pontos. Depois fez um polígono. Aí, pegou os pontos médios. E aí a gente liga esses pontos e faz o polígono. Depois você pega cada um desses polígonos e aí faz tudo de novo. E aí, vai seguindo tudo na sequência. Começa por este ponto, depois faz outros pontos médios, aí você montar os polígonos e depois você pega essa sequência, dentro desse polígono, e faz os pontos médios de cada um deles, por isso que tem o i, ou seja, significa quantos você vai ter que fazer.

Nesse momento, se nota que Blenda entendeu a representação do código. Logo, foi pedido para que a dupla escrevesse as duas próximas linhas do código, que pode ser vista na Figura 12.

Figura 12 – Representação acerca da interpretação do código



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Por mais que a escrita da dupla não esteja completa, é possível perceber através da fala dos participantes que eles foram capazes de criar as listas A8 e B8, ou seja, pensando computacionalmente, puderam fomentar a continuidade do código inicialmente proposto o qual visava a construção de um Triangulo de Sierpinki.

> **Gabriel:** Então, você vai ter que fazer uma lista A8. Usando a mesma ideia anterior.
> **Blenda:** Concatenar...usando os elementos da lista A7. E daí a gente tem que seguir a mesma ideia desses anteriores. O elemento da A7, com o número 1, depois com o 2, ... E aí a gente só troca onde tem o A6 a gente coloca A7 e assim por diante. E depois a gente faz a lista B8, basta trocar, onde está A7 colocamos A8. Ah, esse comprimento significa toda a lista anterior.

A compreensão de um algoritmo por parte dos estudantes envolveu as seguintes habilidades: *Análise* e *Representação dos Dados*, uma vez que buscaram e encontraram sentido e padrões na programação, e ainda representaram a situação utilizando a mídia "lápis e papel"; *Algoritmos e Procedimentos* e a *Abstração* ao interpretarem e continuarem a escrita do código; *Automação* e *Simulação*, visto que o programa já estava pronto e a dupla utilizou a ferramenta do controle deslizante para a análise. Há ainda, indícios de que a exploração da atividade realizada na primeira parte ofereceu meios para essa compreensão da dupla acerca da segunda parte da atividade, a qual engajava os alunos na exploração de um código por si, uma vez que já apresentavam compreensões a cerca das propriedades e características do Triângulo de Sierpinski.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo buscamos trazer algumas reflexões acerca da presença de habilidades do PC (Barr; Stephenson, 2011) que emergiram durante a construção do fractal Triângulo de Sierpinski no software GeoGebra, a partir da experimentação com dois alunos de graduação em Matemática ao realizar uma atividade desenvolvida na presente pesquisa. Apresentamos como o software GeoGebra, juntamente com a criação de novas ferramentas, pode ser utilizado para exercitar habilidades destacadas do PC e como o uso das tecnologias digitais facilitam esse exercício, o que pode ser então uma possiblidade/alternativa para a inserção do PC nas salas de aula. O processo de pensar-computacionalmente com o GeoGebra na construção de um fractal perpassou por diversificadas habilidades do PC. Em outra oportunidade, discutiremos aspectos acerca das habilidades do PC referente a construção de uma pirâmide de Sierpinski com o GeoGebra.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal para sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BARR, V.; STEPHENSON, C. Bringing computational thinking to K-12: What is involved and what is the role of the computer science education community? **ACM Inroads**, *[s.l.],* v. 2, n. 1, p. 48-54, 2011.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática. **Pro-posições**, Campinas, v. 4, n. 10, p. 18-23, mar. 1993. Disponível em: http://mail.fae.unicamp.br/~proposicoes/textos/10-artigos-bicudomav.pdf. Acesso em: 14 maio 2012.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática:** sala de aula e internet em movimento. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

FARIA, R. W. S. **Padrões Fractais:** Contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos. 2012. 197f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2012.

ISTE/CSTA. **Computational Thinking Teacher Resource**. 2. ed., 2011. Disponível em: http://csta.acm.org/Curriculum/sub/CurrFiles/472.11CTTeacherResources_2ed-SP-vF.pdf. Acesso em: 01 ago. 2018.

LU, J. J.; FLETCHER, G. H. Thinking about computational thinking. In: ACM Technical Symposium on Computer Science Education, 40., 2009, Chattanooga. **Proceedings [...]** New York: CIGCSE, 2009. p. 260-264.

MANNILA, L. et al. Computational Thinking in K9 Education. In: Annual Conference on Innovation and Technology in Computer Science Education, 19., 2014, Uppsala. **Proceedings [...]** New York: SIGCSE, 2014. p. 1-29.

MARSHAL, M. N. Sampling for qualitative research. **Family Practice**, *[s.l.],* v. 13, n. 6, p. 522–526, 1996.

MOTTA-ROTH, D. et al. O tradicional e o novo: Análise de artigos acadêmicos eletrônicos. **Intercâmbio**, São Paulo, v. 9, p. 29-38, 2000.

PAPERT, S **Logo:** Computadores e Educação. São Paulo: Editora Brasiliense, 1983.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C.A. Uma abordagem à Análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de Idéias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes. **Bolema**, Rio Claro, v. 21, n. 17, p. 81-140, 2004.

RABAY, Y. S. F. **Estudo e Aplicações da Geometria Fractal.** 2013. 103f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

RIBEIRO, L.; FOSS, L.; CAVALHEIRO, S. A. C. **Entendendo o Pensamento Computacional**. s/d. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1707.00338v1.pdf. Acesso em: 16 ago. 2018.

SINCLAIR, N. et al. Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. **ZDM Mathematics Education**, *[s.l.],* v. 48, n. 5, p. 691–719, 2016.

STEFFE, L.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In: KELLY, A. E.; LESH, R. A. (Ed.).

Research design in mathematics and science education. Hillsdale: Erlbaum, 2000. p. 267-307.

VALENTE, J. A. Integração do Pensamento Computacional no currículo da Educação Básica: diferentes estratégias usadas e questões de formação de professores e avaliação do aluno. **Revista e-Curriculum**, São Paulo, v. 14, n. 3, p. 864-897, 2016.

WING, J. M. Computational thinking. **Communications of the ACM**, *[s.l.],* v. 49, n. 3, p. 33–35, 2006.

WING, J. M. Computational thinking and thinking about computing. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, *[s.l.],* v. 366, n. 1881, p. 3717–3725, 2008.